

# Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.  
Действительный анализ. Учебное пособие.  
2014 год.*

( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) )

## *Дополнительная литература*

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

*( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) и [https://vk.com/func\\_an](https://vk.com/func_an) )*

# Глава 1. Интеграл Лебега

*(продолжение)*

# 8. Суммируемые функции

Функция  $x(t)$ , определенная п.в. на  $[a, b]$  называется *суммируемой*, если п.в. на  $[a, b]$  функция

$$x(t) = f(t) - g(t),$$

где  $f, g \in C^+$ . Заметим, что указанное представление суммируемой функции в виде разности двух функций из  $C^+$  не однозначно. Множество всех функций, суммируемых на  $[a, b]$ , будем обозначать  $L[a, b]$  или просто  $L$ .

Очевидно, что всякая суммируемая функция измерима.

Если  $x \in C^+$ , то  $x \in L$ , то есть  $C^+[a, b] \subset L[a, b]$ .

Заметим также, что если на  $[a, b]$  выполняется  $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$  и функция  $x \in L$ , то и функция  $y \in L$ .

ЛЕММА 14. Пусть функции  $x, y \in L$ . Тогда множеству  $L$  принадлежат и следующие функции:

$x(t)+y(t)$ ,  $\alpha x(t)$  при  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|x(t)|$ ,  $\min\{x(t), y(t)\}$ ,  
 $\max\{x(t), y(t)\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$  и  $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$ , где  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$ .

Тогда  $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) \in L$ , так как по лемме 9  $f_1 + f_2, g_1 + g_2 \in C^+$ .

Для функции  $\alpha x(t)$  в случае  $\alpha \geq 0$  получим  $\alpha x = (\alpha f_1) - (\alpha g_1) \in L$ , так как опять по лемме 9  $\alpha f_1, \alpha g_1 \in C^+$ .

В случае  $\alpha < 0$  получим  $\alpha x = (-\alpha g_1) - (-\alpha f_1) \in L$ , ибо здесь  $-\alpha > 0$  и  $-\alpha g_1, -\alpha f_1 \in C^+$ .

Для функции  $|x(t)|$  отметим представление

$$|x(t)| = \max\{f_1(t), g_1(t)\} - \min\{f_1(t), g_1(t)\}.$$

Так как (лемма 9)

$$\max\{f_1(t), g_1(t)\}, \min\{f_1(t), g_1(t)\} \in C^+,$$

то и  $|x(t)| \in L$ .

Наконец, из равенств

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

следует, что  $\min\{x(t), y(t)\} \in L$  и  $\max\{x(t), y(t)\} \in L$ .

Лемма доказана.

Из леммы 14, в частности, следует, что  $L[a, b]$  является линейным пространством.

Определим для функции  $x \in L$  интеграл. Пусть  $x(t) = f(t) - g(t)$ , где  $f, g \in C^+$ . Положим по определению  $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig$ .

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от представления  $x = f - g$ . Пусть есть еще представление  $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ . Тогда  $f - g = f_1 - g_1$  и, следовательно,

$$f + g_1 = f_1 + g.$$

Отсюда получим

$$(C^+)I(f + g_1) = (C^+)I(f_1 + g).$$

Учитывая свойства интеграла в  $C^+$ , приходим к равенству  $(C^+)If - (C^+)Ig = (C^+)If_1 - (C^+)Ig_1$ , которое означает, что определение  $(L)Ix$  корректно.



Обратим внимание, что если  $x \in C^+$ , то  $(C^+)Ix = (L)Ix$ .

Далее, если  $x \in L$  и  $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ , то  $(L)Ix = (L)Iy$ .

ЛЕММА 15. (Свойства интеграла) Пусть функции  $x, y \in L$ . Тогда:

- 1)  $(L)I(x + y) = (L)Ix + (L)Iy$ ;
- 2)  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) [(L)I(\alpha x) = \alpha(L)Ix]$ .

*Доказательство.* Пусть  $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$  и  $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$ , где  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$ .

Тогда  $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$  и 1) следует из равенства

$$\begin{aligned}(L)I(x + y) &= (C^+)I(f_1 + f_2) - (C^+)I(g_1 + g_2) = \\ &= ((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) + ((C^+)If_2 - (C^+)Ig_2) = \\ &= (L)Ix + (L)Iy.\end{aligned}$$

Докажем 2). Если  $\alpha \geq 0$ , то

$$\begin{aligned}(L)I(\alpha x) &= (C^+)I(\alpha f_1) - (C^+)I(\alpha g_1) = \\ &= \alpha(C^+)I f_1 - \alpha(C^+)I g_1 = \alpha((C^+)I f_1 - (C^+)I g_1) = \alpha(L)I x.\end{aligned}$$

Если же  $\alpha < 0$ , то  $-\alpha > 0$  и

$$\begin{aligned}(L)I(\alpha x) &= (L)I((-\alpha)g_1 - (-\alpha)f_1) = \\ &= (C^+)I((-\alpha)g_1) - (C^+)I((-\alpha)f_1) = \\ &= (-\alpha)(C^+)I g_1 - (-\alpha)(C^+)I f_1 = \\ &= \alpha((C^+)I f_1 - (C^+)I g_1) = \alpha(L)I x.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 16. (Свойства интеграла) Пусть  $x, y \in L[a, b]$ .

1. Если  $x(t) \geq 0$  п.в. на  $[a, b]$ , то  $(L)Ix \geq 0$ .

2. Если  $x(t) \leq y(t)$  п.в. на  $[a, b]$ , то  $(L)Ix \leq (L)Iy$ .

3.  $|(L)Ix| \leq (L)I|x|$ .

*Доказательство.* Пусть  $x(t) = f(t) - g(t)$ , где  $f, g \in C^+$ , и  $x(t) \geq 0$ . Тогда  $f(t) \geq g(t)$  и, в силу следствия из леммы 10,  $(C^+)If \geq (C^+)Ig$ . Следовательно,  $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig \geq 0$ . Таким образом, доказали пункт 1.

Пункт 2 следует из пункта 1, если рассмотреть функцию  $y(t) - x(t) \geq 0$ .

Пункт 3 следует из неравенств  $-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)|$  и пункта 2.

Лемма доказана.

Далее, если не будет возникать особой необходимости,  $(L)Ix$  будем обозначать просто  $Ix$ .

# 9. Теорема Беппо Леви



**Беппо Леви** (итал. Верро Levi; 1875 — 1961) — итальянский математик.

Начиная с 1906 года Б. Леви проводит важные научные работы в области математического анализа, например по тематике интеграла Лебега (теорема Леви о монотонной сходимости). В 1906—1908 годах он пишет выдающиеся работы об эллиптических кривых. Был одним из первых учёных, сформулировавших аксиому выбора теории множеств в 1902 году.

В данном разделе будет дано обоснование монотонного предельного перехода под знаком интеграла.

**ТЕОРЕМА (БЕППО ЛЕВИ) 6.** Пусть дан функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ , где функции  $x_k \in L[a, b]$  и  $x_k(t) \geq 0$ . Пусть  $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [\sum_{k=1}^n Ix_k \leq c]$ . Тогда функция  $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \in L[a, b]$  и  $Ix = \sum_{k=1}^{\infty} Ix_k$ .  
(Без доказательства.)

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть задана последовательность функций  $\{x_n\} \subset L[a, b]$ , что  $x_n(t) \nearrow x(t)$  и  $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ix_n \leq c]$ . Тогда функция  $x \in L[a, b]$  и  $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$ .

*Доказательство.* Определим функции:

$$y_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) - x_2(t), \quad \dots,$$

$$y_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \quad \dots. \quad \text{Заметим, что}$$

$$x_n(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(t), \quad \text{где } y_k(t) \geq 0 \text{ и } y_k \in L.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n-1} I y_k = I x_n - I x_1 \leq c - I x_1 < \infty.$$

Из теоремы 6 следует, что функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L \text{ и } x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \\ = x_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L.$$

Также получим

$$I x = I x_1 + I \sum_{k=1}^{\infty} y_k = I x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} I y_k = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (I x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} I y_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} I x_n.$$

Следствие доказано.



*Замечание.* Если последовательность функций  $\{x_n\} \subset L[a, b]$  такая, что  $x_n(t) \searrow x(t)$  и  $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ix_n \geq c]$ , то, как и в следствии 1, функция  $x \in L[a, b]$  и  $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть на  $[a, b]$  функция  $x(t) \geq 0$ ,  $x \in L[a, b]$  и  $Ix = 0$ . Тогда  $x(t) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Определим функции  $y_n(t) = n x(t)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$y_n(t) \rightarrow y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) = 0 \\ \infty, & x(t) > 0. \end{cases}$$

Причем,  $y_n(t) \nearrow y(t)$  и  $Iy_n = I(nx) = nIx = 0$ . Из следствия 1 получим, что  $y \in L$ , в частности функция  $y(t)$  конечна п.в. на  $[a, b]$ . Таким образом, множество  $\{t \in [a, b] \mid x(t) > 0\}$  — ММН.

Следствие доказано.

# 10. Несобственный интеграл Римана и суммируемые функции

Пусть функция  $x(t)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $x(t) \geq 0$  на  $[a, b]$ ;
- 2)  $x(t)$  непрерывна на полуинтервале  $(a, b]$ ;
- 3)  $x(t)$  неограничена в окрестности точки  $a$ , то есть  $(\forall M > 0)(\forall \delta > 0)(\exists t_\delta \in (a, a + \delta))[x(t_\delta) > M]$ .

Напомним, что функция  $x(t)$  называется *несобственно интегрируемой по Риману* на  $[a, b]$ , если существует конечный

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b x(t) dt = \int_a^b x(t) dt = (R_\infty)Ix.$$

На языке последовательностей это означает, что для любой последовательности  $\{\varepsilon_n\}$  такой, что  $\varepsilon_n \rightarrow +0$  при  $n \rightarrow \infty$ , существует, не зависящий от последовательности  $\{\varepsilon_n\}$ , конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt.$$

При этом, без ограничения общности, можно считать (рекомендуется проделать это в качестве упражнения), что последовательность  $\varepsilon_n \searrow 0$ .

**ТЕОРЕМА 7.** Несобственная интегрируемость по Риману на отрезке  $[a, b]$  функции  $x(t)$ , определенной в этом разделе выше, равносильна суммируемости этой функции на отрезке  $[a, b]$ , при этом  $(L)Ix = (R_\infty)Ix$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольную последовательность  $\{\varepsilon_n\}$  такую, что  $\varepsilon_n \searrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $n \in \mathbb{N}$  определим функцию

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, a + \varepsilon_n) \\ x(t), & t \in [a + \varepsilon_n, b]. \end{cases}$$

Функция  $x_n(t)$  ограничена и кусочно непрерывна. Следовательно, функция  $x_n \in L$  и  $(L)Ix_n = (R)Ix_n$ . Заметим также, что  $x_n(t) \nearrow x(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Необходимость.* Предположим теперь, что существует  $(R_\infty)Ix$ . Заметим, что  $(L)Ix_n = (R)Ix_n \leq (R_\infty)Ix < \infty$ . Отсюда в силу следствия 1 теоремы 6 получим, что функция  $x \in L$  и, кроме того,

$$\begin{aligned}(L)Ix &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = \\ &= (R_\infty)Ix.\end{aligned}$$

*Достаточность.* Для обратного доказательства предположим, что  $x \in L$ . Из неравенства  $x_n(t) \leq x(t)$  получим, что  $(L)Ix_n \leq (L)Ix$ . Вновь применим следствие 1 из теоремы 6 и получим  $(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n$ . В результате установили, что существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = (L)Ix,$$

не зависящий от последовательности  $\{\varepsilon_n\}$ . Это и означает, что существует  $(R_\infty)Ix$ .

Теорема доказана.

**Пример.** Рассмотрим две функции на отрезке  $[0,1]$ :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \\ t^{-1}, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \\ t^{-1}, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \end{cases}$$

$$x(t) \stackrel{\text{почти}}{\text{всюду}} = t^{-1} = u(t), \quad y(t) \stackrel{\text{почти}}{\text{всюду}} = \frac{1}{\sqrt{t}} = z(t).$$

Функции  $u(t)$  и  $z(t)$  удовлетворяют условиям 1) – 3) на отрезке  $[0,1]$ .

Функция  $u(t)$  не является несобственно интегрируемой на отрезке  $[0,1] \Rightarrow u \notin L[0,1] \Rightarrow x \notin L[0,1]$ .

Функция  $z(t)$  несобственно интегрируема на отрезке  $[0,1] \Rightarrow z \in L[0,1] \Rightarrow y \in L[0,1]$  и  $(L)Iy = (L)Iz = (R_\infty)Iz = 2$ .