

Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.
Действительный анализ. Учебное пособие.
2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1. Интеграл Лебега

(продолжение)

8. Суммируемые функции

Функция $x(t)$, определенная п.в. на $[a, b]$ называется *суммируемой*, если п.в. на $[a, b]$ функция

$$x(t) = f(t) - g(t),$$

где $f, g \in C^+$. Заметим, что указанное представление суммируемой функции в виде разности двух функций из C^+ не однозначно. Множество всех функций, суммируемых на $[a, b]$, будем обозначать $L[a, b]$ или просто L .

Очевидно, что всякая суммируемая функция измерима.

Если $x \in C^+$, то $x \in L$, то есть $C^+[a, b] \subset L[a, b]$.

Заметим также, что если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in L$, то и функция $y \in L$.

ЛЕММА 14. Пусть функции $x, y \in L$. Тогда множеству L принадлежат и следующие функции:

$x(t)+y(t)$, $\alpha x(t)$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x(t)|$, $\min\{x(t), y(t)\}$,
 $\max\{x(t), y(t)\}$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.

Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) \in L$, так как по лемме 9 $f_1 + f_2, g_1 + g_2 \in C^+$.

Для функции $\alpha x(t)$ в случае $\alpha \geq 0$ получим $\alpha x = (\alpha f_1) - (\alpha g_1) \in L$, так как опять по лемме 9 $\alpha f_1, \alpha g_1 \in C^+$.

В случае $\alpha < 0$ получим $\alpha x = (-\alpha g_1) - (-\alpha f_1) \in L$, ибо здесь $-\alpha > 0$ и $-\alpha g_1, -\alpha f_1 \in C^+$.

Для функции $|x(t)|$ отметим представление

$$|x(t)| = \max\{f_1(t), g_1(t)\} - \min\{f_1(t), g_1(t)\}.$$

Так как (лемма 9)

$$\max\{f_1(t), g_1(t)\}, \min\{f_1(t), g_1(t)\} \in C^+,$$

то и $|x(t)| \in L$.

Наконец, из равенств

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

следует, что $\min\{x(t), y(t)\} \in L$ и $\max\{x(t), y(t)\} \in L$.

Лемма доказана.

Из леммы 14, в частности, следует, что $L[a, b]$ является линейным пространством.

Определим для функции $x \in L$ интеграл. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Положим по определению $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig$.

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от представления $x = f - g$. Пусть есть еще представление $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$. Тогда $f - g = f_1 - g_1$ и, следовательно,

$$f + g_1 = f_1 + g.$$

Отсюда получим

$$(C^+)I(f + g_1) = (C^+)I(f_1 + g).$$

Учитывая свойства интеграла в C^+ , приходим к равенству $(C^+)If - (C^+)Ig = (C^+)If_1 - (C^+)Ig_1$, которое означает, что определение $(L)Ix$ корректно.

Обратим внимание, что если $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (L)Ix$.

Далее, если $x \in L$ и $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$, то $(L)Ix = (L)Iy$.

ЛЕММА 15. (Свойства интеграла) Пусть функции $x, y \in L$. Тогда:

- 1) $(L)I(x + y) = (L)Ix + (L)Iy$;
- 2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) [(L)I(\alpha x) = \alpha(L)Ix]$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.

Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ и 1) следует из равенства

$$\begin{aligned}(L)I(x + y) &= (C^+)I(f_1 + f_2) - (C^+)I(g_1 + g_2) = \\ &= ((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) + ((C^+)If_2 - (C^+)Ig_2) = \\ &= (L)Ix + (L)Iy.\end{aligned}$$

Докажем 2). Если $\alpha \geq 0$, то

$$\begin{aligned}(L)I(\alpha x) &= (C^+)I(\alpha f_1) - (C^+)I(\alpha g_1) = \\ &= \alpha(C^+)I f_1 - \alpha(C^+)I g_1 = \alpha((C^+)I f_1 - (C^+)I g_1) = \alpha(L)I x.\end{aligned}$$

Если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и

$$\begin{aligned}(L)I(\alpha x) &= (L)I((- \alpha)g_1 - (- \alpha)f_1) = \\ &= (C^+)I((- \alpha)g_1) - (C^+)I((- \alpha)f_1) = \\ &= (- \alpha)(C^+)I g_1 - (- \alpha)(C^+)I f_1 = \\ &= \alpha((C^+)I f_1 - (C^+)I g_1) = \alpha(L)I x.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 16. (Свойства интеграла) Пусть $x, y \in L[a, b]$.

1. Если $x(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$, то $(L)Ix \geq 0$.

2. Если $x(t) \leq y(t)$ п.в. на $[a, b]$, то $(L)Ix \leq (L)Iy$.

3. $|(L)Ix| \leq (L)I|x|$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$, и $x(t) \geq 0$. Тогда $f(t) \geq g(t)$ и, в силу следствия из леммы 10, $(C^+)If \geq (C^+)Ig$. Следовательно, $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig \geq 0$. Таким образом, доказали пункт 1.

Пункт 2 следует из пункта 1, если рассмотреть функцию $y(t) - x(t) \geq 0$.

Пункт 3 следует из неравенств $-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)|$ и пункта 2.

Лемма доказана.

Далее, если не будет возникать особой необходимости, $(L)Ix$ будем обозначать просто Ix .

9. Теорема Беппо Леви



Беппо Леви (итал. Верро Levi; 1875 — 1961) — итальянский математик.

Начиная с 1906 года Б. Леви проводит важные научные работы в области математического анализа, например по тематике интеграла Лебега (теорема Леви о монотонной сходимости). В 1906—1908 годах он пишет выдающиеся работы об эллиптических кривых. Был одним из первых учёных, сформулировавших аксиому выбора теории множеств в 1902 году.

В данном разделе будет дано обоснование монотонного предельного перехода под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА (БЕППО ЛЕВИ) 6. Пусть дан функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$, где функции $x_k \in L[a, b]$ и $x_k(t) \geq 0$. Пусть $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [\sum_{k=1}^n Ix_k \leq c]$. Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \in L[a, b]$ и $Ix = \sum_{k=1}^{\infty} Ix_k$.
(Без доказательства.)

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть задана последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ix_n \leq c]$. Тогда функция $x \in L[a, b]$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$.

Доказательство. Определим функции:

$$y_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) - x_2(t), \quad \dots,$$

$$y_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \quad \dots. \quad \text{Заметим, что}$$

$$x_n(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(t), \quad \text{где } y_k(t) \geq 0 \text{ и } y_k \in L.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n-1} I y_k = I x_n - I x_1 \leq c - I x_1 < \infty.$$

Из теоремы 6 следует, что функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L \text{ и } x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \\ = x_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L.$$

Также получим

$$I x = I x_1 + I \sum_{k=1}^{\infty} y_k = I x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} I y_k = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (I x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} I y_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} I x_n.$$

Следствие доказано.

Замечание. Если последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что $x_n(t) \searrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N}) [Ix_n \geq c]$, то, как и в следствии 1, функция $x \in L[a, b]$ и $Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть на $[a, b]$ функция $x(t) \geq 0$, $x \in L[a, b]$ и $Ix = 0$. Тогда $x(t) = 0$ п.в. на $[a, b]$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = n x(t)$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$y_n(t) \rightarrow y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) = 0 \\ \infty, & x(t) > 0. \end{cases}$$

Причем, $y_n(t) \nearrow y(t)$ и $Iy_n = I(nx) = nIx = 0$. Из следствия 1 получим, что $y \in L$, в частности функция $y(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$. Таким образом, множество $\{t \in [a, b] \mid x(t) > 0\}$ — ММН.

Следствие доказано.

10. Несобственный интеграл Римана и суммируемые функции

Пусть функция $x(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $x(t) \geq 0$ на $[a, b]$;
- 2) $x(t)$ непрерывна на полуинтервале $(a, b]$;
- 3) $x(t)$ неограничена в окрестности точки a , то есть $(\forall M > 0)(\forall \delta > 0)(\exists t_\delta \in (a, a + \delta))[x(t_\delta) > M]$.

Напомним, что функция $x(t)$ называется *несобственно интегрируемой по Риману* на $[a, b]$, если существует конечный

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b x(t) dt = \int_a^b x(t) dt = (R_\infty)Ix.$$

На языке последовательностей это означает, что для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ такой, что $\varepsilon_n \rightarrow +0$ при $n \rightarrow \infty$, существует, не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$, конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt.$$

При этом, без ограничения общности, можно считать (рекомендуется проделать это в качестве упражнения), что последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$.

ТЕОРЕМА 7. Несобственная интегрируемость по Риману на отрезке $[a, b]$ функции $x(t)$, определенной в этом разделе выше, равносильна суммируемости этой функции на отрезке $[a, b]$, при этом $(L)Ix = (R_\infty)Ix$.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, a + \varepsilon_n) \\ x(t), & t \in [a + \varepsilon_n, b]. \end{cases}$$

Функция $x_n(t)$ ограничена и кусочно непрерывна. Следовательно, функция $x_n \in L$ и $(L)Ix_n = (R)Ix_n$. Заметим также, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Необходимость. Предположим теперь, что существует $(R_\infty)Ix$. Заметим, что $(L)Ix_n = (R)Ix_n \leq (R_\infty)Ix < \infty$. Отсюда в силу следствия 1 теоремы 6 получим, что функция $x \in L$ и, кроме того,

$$\begin{aligned}(L)Ix &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = \\ &= (R_\infty)Ix.\end{aligned}$$

Достаточность. Для обратного доказательства предположим, что $x \in L$. Из неравенства $x_n(t) \leq x(t)$ получим, что $(L)Ix_n \leq (L)Ix$. Вновь применим следствие 1 из теоремы 6 и получим $(L)Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n$. В результате установили, что существует конечный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^b x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (R)Ix_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (L)Ix_n = (L)Ix,$$

не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$. Это и означает, что существует $(R_\infty)Ix$.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим две функции на отрезке $[0,1]$:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \\ t^{-1}, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \\ t^{-1}, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \end{cases}$$

$$x(t) \stackrel{\text{почти}}{\text{всюду}} = t^{-1} = u(t), \quad y(t) \stackrel{\text{почти}}{\text{всюду}} = \frac{1}{\sqrt{t}} = z(t).$$

Функции $u(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют условиям 1) – 3) на отрезке $[0,1]$.

Функция $u(t)$ не является несобственно интегрируемой на отрезке $[0,1] \Rightarrow u \notin L[0,1] \Rightarrow x \notin L[0,1]$.

Функция $z(t)$ несобственно интегрируема на отрезке $[0,1] \Rightarrow z \in L[0,1] \Rightarrow y \in L[0,1]$ и $(L)Iy = (L)Iz = (R_\infty)Iz = 2$.