Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

8. Суммируемые функции

Функция $x(t)$, определенная п.в. на $[a,b]$ называется *суммируемой*, если п.в. на $[a,b]$ функция

$$x(t) = f(t) - g(t),$$

где $f, g \in C^+$. Заметим, что указанное представление суммируемой функции в виде разности двух функций из C^+ не однозначно. Множество всех функций, суммируемых на $[a,b]$, будем обозначать $L[a,b]$ или просто L.

Очевидно, что всякая суммируемая функция измерима.

Если $x \in C^+$, то $x \in L$, то есть $C^+[a,b] \subset L[a,b]$.

Заметим также, что если на $[a,b]$ выполняется $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in L$, то и функция $y \in L$.

Лемма 14. *Пусть функции $x, y \in L$. Тогда множеству L принадлежат и следующие функции:*

$x(t)+y(t)$, $\alpha x(t)$ *при* $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x(t)|$, $\min\{x(t), y(t)\}$, $\max\{x(t), y(t)\}$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.
Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2) \in L$, так как по лемме 9 $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2 \in C^+$.

Для функции $\alpha x(t)$ в случае $\alpha \geq 0$ получим $\alpha x = (\alpha f_1) - (\alpha g_1) \in L$, так как опять по лемме 9 $\alpha f_1, \alpha g_1 \in C^+$.

В случае $\alpha < 0$ получим $\alpha x = (-\alpha g_1) - (-\alpha f_1) \in L$, ибо здесь $-\alpha > 0$ и $-\alpha g_1, -\alpha f_1 \in C^+$.

Для функции $|x(t)|$ отметим представление

$$|x(t)| = \max\{f_1(t), g_1(t)\} - \min\{f_1(t), g_1(t)\}.$$

Так как (лемма 9)

$$\max\{f_1(t), g_1(t)\}, \min\{f_1(t), g_1(t)\} \in C^+,$$

то и $|x(t)| \in L$.

Наконец, из равенств

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|), \quad \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

следует, что $\min\{x(t), y(t)\} \in L$ и $\max\{x(t), y(t)\} \in L$.

Лемма доказана.

Из леммы 14, в частности, следует, что $L[a, b]$ является линейным пространством.

Определим для функции $x \in L$ *интеграл*. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$. Положим по определению

$$(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig.$$

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от представления $x = f - g$. Пусть есть еще представление $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$. Тогда $f - g = f_1 - g_1$ и, следовательно,

$$f + g_1 = f_1 + g.$$

Отсюда получим

$$(C^+)I(f + g_1) = (C^+)I(f_1 + g).$$

Учитывая свойства интеграла в C^+, приходим к равенству $(C^+)If - (C^+)Ig = (C^+)If_1 - (C^+)Ig_1$, которое означает, что определение $(L)Ix$ корректно.

Обратим внимание, что если $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (L)Ix$.

Далее, если $x \in L$ и $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$, то $(L)Ix = (L)Iy$.

Лемма 15. (Свойства интеграла) *Пусть функции* $x, y \in L$. *Тогда:*

1) $\quad (L)I(x+y) = (L)Ix + (L)Iy;$

2) $\quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})\,[\,(L)I(\alpha\, x) = \alpha (L)Ix].$

Доказательство. Пусть $x(t) = f_1(t) - g_1(t)$ и $y(t) = f_2(t) - g_2(t)$, где $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C^+$.

Тогда $x + y = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ и 1) следует из равенства

$$(L)I(x+y) = (C^+)I(f_1+f_2) - (C^+)I(g_1+g_2) =$$

$$= ((C^+)If_1 - (C^+)Ig_1) + ((C^+)If_2 - (C^+)Ig_2) =$$

$$= (L)Ix + (L)Iy.$$

Докажем 2). Если $\alpha \geq 0$, то

$$(L)I(\alpha\, x) = (C^{+})I(\alpha\, f_1) - (C^{+})I(\alpha\, g_1) =$$

$$= \alpha(C^{+})I f_1 - \alpha(C^{+})I g_1 = \alpha((C^{+})I f_1 - (C^{+})I g_1) = \alpha(L)I x.$$

Если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и

$$(L)I(\alpha\, x) = (L)I((-\alpha)g_1 - (-\alpha)f_1) =$$

$$= (C^{+})I((-\alpha)g_1) - (C^{+})I((-\alpha)f_1) =$$

$$= (-\alpha)(C^{+})I g_1 - (-\alpha)(C^{+})I f_1 =$$

$$= \alpha((C^{+})I f_1 - (C^{+})I g_1) = \alpha(L)I x.$$

Лемма доказана.

Лемма 16. (Свойства интеграла) *Пусть* $x, y \in L[a, b]$.

1. Если $x(t) \geq 0$ *п.в. на* $[a, b]$, *то* $(L)Ix \geq 0$.

2. Если $x(t) \leq y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$, *то* $(L)Ix \leq (L)Iy$.

3. $|\,(L)I\,x\,| \leq (L)I\,|\,x\,|$.

Доказательство. Пусть $x(t) = f(t) - g(t)$, где $f, g \in C^+$, и $x(t) \geq 0$. Тогда $f(t) \geq g(t)$ и, в силу следствия из леммы 10, $(C^+)If \geq (C^+)Ig$. Следовательно, $(L)Ix = (C^+)If - (C^+)Ig \geq 0$. Таким образом, доказали пункт 1.

Пункт 2 следует из пункта 1, если рассмотреть функцию $y(t) - x(t) \geq 0$.

Пункт 3 следует из неравенств $-|x(t)| \leq x(t) \leq |x(t)|$ и пункта 2.

Лемма доказана.

Далее, если не будет возникать особой необходимости, $(L)Ix$ будем обозначать просто Ix.

9. Теорема Беппо Леви

Беппо Леви (итал. Beppo Levi; 1875 — 1961) — итальянский математик.

Начиная с 1906 года Б. Леви проводит важные научные работы в области математического анализа, например по тематике интеграла Лебега (теорема Леви о монотонной сходимости). В 1906—1908 годах он пишет выдающиеся работы об эллиптических кривых. Был одним из первых учёных, сформулировавших аксиому выбора теории множеств в 1902 году.

В данном разделе будет дано обоснование монотонного предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема (Беппо Леви) 6. *Пусть дан функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$, *где функции* $x_k \in L[a,b]$ *и* $x_k(t) \geq 0$. *Пусть* $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})\left[\sum_{k=1}^{n} Ix_k \leq c\right]$. *Тогда функция* $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \in L[a,b]$ *и* $Ix = \sum_{k=1}^{\infty} Ix_k$.

(Без доказательства.)

Следствие 1. *Пусть задана последовательность функций* $\{x_n\} \subset L[a,b]$, *что* $x_n(t) \nearrow x(t)$ *и* $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})\left[Ix_n \leq c\right]$. *Тогда функция* $x \in L[a,b]$ *и* $Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n$.

Доказательство. Определим функции:
$y_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) - x_2(t), \dots,$
$y_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \dots$. Заметим, что
$x_n(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(t)$, где $y_k(t) \geq 0$ и $y_k \in L$.
Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n-1} Iy_k = Ix_n - Ix_1 \leq c - Ix_1 < \infty.$$

Из теоремы 6 следует, что функция
$\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L$ и $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) =$
$= x_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in L$.

Также получим
$Ix = Ix_1 + I\sum_{k=1}^{\infty} y_k = Ix_1 + \sum_{k=1}^{\infty} Iy_k =$
$= \lim_{n\to\infty}(Ix_1 + \sum_{k=1}^{n-1} Iy_k) = \lim_{n\to\infty} Ix_n.$

Следствие доказано.

Замечание. Если последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a,b]$ такая, что $x_n(t) \searrow x(t)$ и $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,Ix_n \geq c\,]$, то, как и в следствии 1, функция $x \in L[a.b]$ и $Ix = \lim_{n\to\infty} Ix_n$.

Следствие 2. *Пусть на* $[a,b]$ *функция* $x(t) \geq 0$, $x \in L[a,b]$ *и* $Ix = 0$. *Тогда* $x(t) = 0$ *п.в. на* $[a,b]$.

Доказательство. Определим функции $y_n(t) = n\,x(t)$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \to \infty$

$$y_n(t) \to y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) = 0 \\ \infty, & x(t) > 0\,. \end{cases}$$

Причем, $y_n(t) \nearrow y(t)$ и $Iy_n = I(nx) = nIx = 0$. Из следствия 1 получим, что $y \in L$, в частности функция $y(t)$ конечна п.в. на $[a,b]$. Таким образом, множество $\{t \in [a,b] \,|\, x(t) > 0\}$ – ММН.

Следствие доказано.

10. Несобственный интеграл Римана и суммируемые функции

Пусть функция $x(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $x(t) \geq 0$ на $[a, b]$;

2) $x(t)$ непрерывна на полуинтервале $(a, b]$;

3) $x(t)$ неограничена в окрестности точки a, то есть $(\forall M > 0)(\forall \delta > 0)(\exists t_\delta \in (a, a + \delta))[x(t_\delta) > M]$.

Напомним, что функция $x(t)$ называется *несобственно интегрируемой по Риману* на $[a, b]$, если существует конечный

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} x(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt = (R_\infty) I x.$$

На языке последовательностей это означает, что для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ такой, что $\varepsilon_n \to +0$ при $n \to \infty$, существует, не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$, конечный

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a+\varepsilon_n}^{b} x(t)\,dt.$$

При этом, без ограничения общности, можно считать (рекомендуется проделать это в качестве упражнения), что последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$.

Теорема 7. *Несобственная интегрируемость по Риману на отрезке $[a,b]$ функции $x(t)$, определенной в этом разделе выше, равносильна суммируемости этой функции на отрезке $[a,b]$, при этом $(L)Ix = (R_\infty)Ix$.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$x_n(t) = \begin{cases} \quad 0, & t \in [a,\, a+\varepsilon_n) \\ x(t), & t \in [a+\varepsilon_n,\, b]\,. \end{cases}$$

Функция $x_n(t)$ ограничена и кусочно непрерывна. Следовательно, функция $x_n \in L$ и $(L)Ix_n = (R)Ix_n$. Заметим также, что $x_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \to \infty$.

Необходимость. Предположим теперь, что существует $(R_\infty)Ix$. Заметим, что $(L)Ix_n = (R)Ix_n \le (R_\infty)Ix < \infty$. Отсюда в силу следствия 1 теоремы 6 получим, что функция $x \in L$ и, кроме того,

$$(L)Ix = \lim_{n\to\infty}(L)Ix_n = \lim_{n\to\infty}(R)Ix_n = \lim_{n\to\infty}\int_{a+\varepsilon_n}^{b} x(t)\,dt =$$

$$= (R_\infty)Ix.$$

Достаточность. Для обратного доказательства предположим, что $x \in L$. Из неравенства $x_n(t) \leq x(t)$ получим, что $(L)Ix_n \leq (L)Ix$. Вновь применим следствие 1 из теоремы 6 и получим $(L)Ix = \lim_{n\to\infty}(L)Ix_n$. В результате установили, что существует конечный

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a+\varepsilon_n}^{b} x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(R)Ix_n = \lim_{n\to\infty}(L)Ix_n = (L)Ix,$$

не зависящий от последовательности $\{\varepsilon_n\}$. Это и означает, что существует $(R_\infty)Ix$.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим две функции на отрезке $[0,1]$:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t\in[0,1]\cap\mathbf{Q},\\ t^{-1}, & t\in[0,1]\setminus\mathbf{Q},\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}, & t\in[0,1]\setminus\mathbf{Q},\\ t^{-1}, & t\in[0,1]\cap\mathbf{Q},\end{cases}$$

$$x(t)\overset{\substack{\textit{почти}\\ \textit{всюду}}}{=}t^{-1}=u(t),\qquad y(t)\overset{\substack{\textit{почти}\\ \textit{всюду}}}{=}\frac{1}{\sqrt{t}}=z(t).$$

Функции $u(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют условиям 1) – 3) на отрезке $[0,1]$.

Функция $u(t)$ не является несобственно интегрируемой на отрезке $[0,1]\Rightarrow u\notin L[0,1]\Rightarrow x\notin L[0,1]$.

Функция $z(t)$ несобственно интегрируема на отрезке $[0,1]\Rightarrow z\in L[0,1]\Rightarrow y\in L[0,1]$ и
$(L)Iy=(L)Iz=(R_\infty)Iz=2$.