

**ОСНОВЫ  
функционального  
анализа**

# Глава 2. Линейные нормированные пространства

*Основной источник :*

*В.В. Смагин. Линейные нормированные  
пространства. Учебное пособие*

# Пространства со скалярным произведением

## Задачи

№ 8.10.  $\forall M \subset H$  — псл.

Докажем:  $M \subset (M^\perp)^\perp$ .

Доказ-во. Пусть  $x \in M$ .

Тогда  $\forall y \in M^\perp$   $(x, y) = 0 \Rightarrow x \perp M^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (M^\perp)^\perp$ .  $\text{ч.т.д.}$

N 8.11.  $\forall M \subset H$  - псл.

Доказательство:  $M^\perp$  - подпр-во пр-ва  $H$ .

Доказ-во. 1) Покажем, что  $M^\perp$  - ллм в  $H$ .

а)  $\forall x, y \in M^\perp$ . Для  $\forall z \in M$   $(x+y, z) =$   
 $= (x, z) + (y, z) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$   $x+y \in M^\perp$

б)  $\forall x \in M^\perp$ ,  $\forall$  число  $\lambda$ . Для  $\forall z \in M$   
 $(\lambda x, z) = \lambda \cdot (x, z) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow$   $\lambda x \in M^\perp$

Итак,  $M^\perp$  - ллн. подпр-е в  $H$ .

2) Доказательство:  $M^\perp$  — замкнутое множество  
(в метрике пространства  $H$   $\rho(x, y) = \|x - y\|_H =$   
 $= (x - y, x - y)^{\frac{1}{2}}$ ).

Пусть  $x \in \overline{M^\perp}$ . Тогда  $\exists$  последовательность  
 $\{x_n\} \subset M^\perp : x_n \rightarrow x$  (по метрике  $\rho$ ).

Следовательно,  $(\forall z \in M)(\forall n) [(x_n, z) = 0]$ .

Тогда при  $n \rightarrow \infty$   $0 = (x_n, z) \rightarrow (x, z)$   
(по свойству непрерывности скалярного произведения,  
Теорема 8). Следовательно,  $(x, z) = 0$  при  
 $\forall z \in M$ , т.е.  $x \perp M \Rightarrow \underline{x \in M^\perp}$ .

Итак,  $\overline{M^\perp} \subset M^\perp \Rightarrow M^\perp$  — замкнуто.

---

$M^\perp$  — замкнутое ЛМ  $\Rightarrow M^\perp$  — подпространство в  $H$ .

---

# Глава 3. Линейные операторы

# 1. Определение линейного оператора

**Определение.** Пусть  $E$  и  $F$  – ЛНП, одновременно вещественные или комплексные. Оператор  $y = A(x)$ , определенный на пространстве  $E$  и принимающий значения в пространстве  $F$ , называется *линейным*, если этот оператор:

аддитивен, т. е. для всех  $x_1$  и  $x_2$  из  $E$

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2); \quad (1)$$

однороден, т. е. для всех  $x \in E$  и любых вещественных (если  $E$  вещественно) или комплексных (если  $E$  комплексно) чисел  $\lambda$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x). \quad (2)$$

Вместо  $A(x)$  будем писать также  $Ax$ .

Обозначение :  $A : E \rightarrow F$  ( $A$  действует из  $E$  в  $F$ ).

# Примеры

① Оператор  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;  $A$  задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad Ax = Ax = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} x_k \end{pmatrix},$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Оператор  $A$  является линейным в силу соответствующих свойств операции умножения матрицы на столбец.

②  $A: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ;  $Ax = \dot{x}$  (оператор  $A$  переводит функцию  $x \in C^1[a, b]$  в её производную  $\dot{x}(t)$ );

$A \stackrel{\text{обозн.}}{=} \frac{d}{dt}$ . Нетрудно проверить выполнение свойств аддитивности и однородности оператора  $\frac{d}{dt}$ .

## 2. Линейные ограниченные операторы

Пусть  $E, F$  — линейные нормированные пространства, одновременно вещественные или комплексные.

### Определение

Линейный оператор  $A : E \rightarrow F$  называется *ограниченным*, если

$$(\exists C \geq 0)(\forall x \in E)[\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E].$$

Пример.  $A = \frac{d}{dt} : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$  — оператор дифференцирования.

$$\|Ax\|_F = \|\dot{x}\|_F = \max_{a \leq t \leq b} |\dot{x}(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |\dot{x}(t)| = \|x\|_E,$$

след-но,  $A$  — огранич. оператор (здесь  $C=1$ ).

**Теорема 2.1.** Пусть  $E, F$  — линейные нормированные пространства и  $A : E \rightarrow F$  — линейный оператор. Тогда следующие свойства оператора  $A$  равносильны :

- а)  $A$  ограничен;
- б)  $A$  переводит единичный шар в ограниченное множество;
- в)  $A$  переводит любое ограниченное множество в ограниченное множество;
- г)  $A$  непрерывен на  $E$ ;
- д)  $A$  непрерывен в нуле.

Доказ-во.    а)  $\overset{?}{\rightarrow}$  б)

Дано:  $A$  — ограничен

Доказ-во:  $A$  переводит единич. шар в огранич. мн-во.

Пусть  $M = B(\theta, 1) = \{x \in E \mid \|x\|_E < 1\}$  — открытый шар единичного радиуса в нр-ве  $E$  (с центром в т.  $\theta$ ).

$A$  — ограничен, т.е.  $(\exists c > 0)(\forall x \in E) [\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x \in M) [\|Ax\| \leq c \cdot \underbrace{\|x\|}_{< 1} < c] \Rightarrow (\forall x \in M) [Ax \in B(\theta, c)]$

$\Rightarrow A(M) \subset \underbrace{B(\theta, c)}_{\substack{\uparrow \\ \text{открытый шар в } F \text{ радиуса } c}} \Rightarrow A(M) \text{ — ограниченное мн-во}$

$(A(M) \text{ — образ мн-ва } M: A(M) = \{y = Ax \mid x \in M\})$ .

а)  $\xrightarrow{?}$  б)

Дано:  $A$  переводит единич. шар в ограи. мн-во

Доказ:  $A$  переводит  $\forall$  ограи. мн-во в ограи.-е.

Рассм-м произвольное ограищенное мн-во  $M$  в  $E$ .

Ограиченность мн-ва  $M$  означает, что  $(\exists R > 0)(\forall x \in M) [\|x\|_E < R]$ ,

т.е.  $M \subset \underbrace{B(\theta, R)}$ . Докажем ограищенное образа  $A(M)$

открытый шар рад.  $R$   
с центром в  $\theta$ .

в пр-ве  $F$ .

Рассмотрим множество  $N = \frac{1}{R} M = \left\{ \frac{1}{R} x \mid x \in M \right\} \subset E$ ; тогда

$(\forall y \in N) [\|y\|_E = \frac{1}{R} \|x\|_E < \frac{R}{R} = 1] \Rightarrow \underline{N \subset B(\theta, 1)}$ .

Оператор  $A$  переводит единич. шар  $B(\theta, 1)$  в некое ограи. мн-во

$P \subset B(\theta, K)$ , где  $K$  — некоторая константа (радиусе шара)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow A(N) \subset A(B(\theta, 1)) = P \subset B(\theta, K) \Rightarrow (\forall x \in M) [\|A\left(\frac{x}{R}\right)\|_F < K] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x \in M) [\|Ax\| < R \cdot K] \Rightarrow A(M) \subset B(\theta, R \cdot K) \Rightarrow \underline{A(M) \text{ — ограи. мн-во.}}$

b)  $\overset{?}{\rightarrow}$  a) Дано:  $A$  переводит  $\forall$  ограи. ми-во в ограи-е

Д-ть:  $A - \text{ЛОО}$

$\neg$ :  $A - \text{не ограи.}$ , т.е.  $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_\epsilon \in E) [\|Ax_\epsilon\|_F > \epsilon \cdot \|x_\epsilon\|_E]$ .

Тогда  $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n) [\|Ax_n\| > n \cdot \|x_n\|]$  (\*)

Рассм-м множ-во  $M = \{y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}\} \subset E$ ;  $\|y_n\| = 1 \forall n$ , т.е.

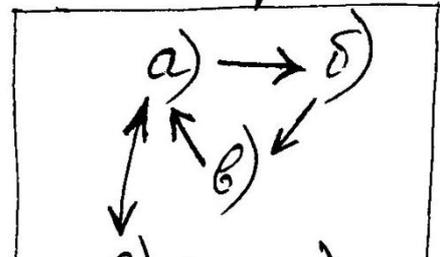
$M - \text{огранич. ми-во.}$

След-но,  $(\exists R > 0)(\forall n) [Ay_n \subset B(0, R)]$  (по опред-ю огранич. ми-ва).

Тогда  $(\forall n) [\|Ay_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} < R]$ , т.е.  $(\forall n) [\|Ax_n\| < R \cdot \|x_n\|]$ ,

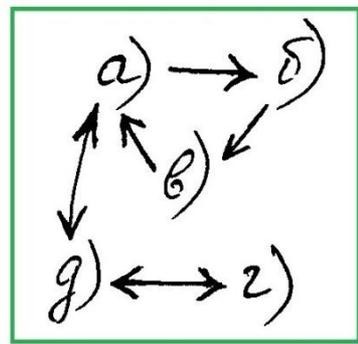
это противоречит (\*). След-но, предположение о неограниченности оп-ра  $A$  неверно  $\Rightarrow$   $A - \text{ЛОО}$ .

$\gamma) \rightarrow \delta)$  - очевидно.



если оп-ра  $A$  непрерывна  $\Rightarrow$   $A$  — л.о.о.

$z \rightarrow g$  — очевидно.



$g \xrightarrow{?} z$

Дано:  $A$  — контр. в т.  $\theta_E$

Доказ-ть:  $(\forall a \in E) [(x_n \rightarrow a) \Rightarrow (Ax_n \rightarrow Aa)]$   
(контр-ель по Теореме)

Рассм-м  $\forall a \in E$  и  $\forall \{x_n, y\} \subset E$ , сходящ-ся к  $a$ .

Тогда послед-ель  $\{y_n = x_n - a\}$  сход-ся к элементу  $a - a = \theta_E$ ,

след-но,  $Ax_n - Aa = A(x_n - a) \rightarrow A\theta_E = \theta_F \Rightarrow$   $Ax_n \rightarrow Aa$   
(при  $n \rightarrow \infty$ ).

(Заметим, что л.о. всегда переводит нулевой эл-т в нулевой:

$$A(\theta_E) = A(0 \cdot \theta_E) = 0 \cdot A(\theta_E) = \theta_F.$$

$a \xrightarrow{?} g$  Дано:  $A$  — ограи. Доказ-ть:  $A$  — контр. в  $\theta_E$ .

Т.к.  $A$  — ограи, то  $(\forall x \in E) [\|Ax\| \leq c \cdot \|x\|]$ . Пусть  $x_n \rightarrow \theta_E$ ,

тогда  $\|Ax_n\| \leq c \cdot \|x_n\| \rightarrow c \cdot \underbrace{\|\theta_E\|}_{=0} = 0 \Rightarrow \|Ax_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow$   $Ax_n \rightarrow \theta_F$ .

g) → a) Дано:  $A$  — к-р. в т.  $\theta_E$ . Доказ:  $A$  — ограничен.

$\square$ :  $A$  — не ограничен, т.е.  $(\forall n)(\exists x_n \in E) [\|Ax_n\| > n \cdot \|x_n\|]$ .

Т.о., имеем последовательность  $\{x_n\} \subset E : \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} > n \quad (\forall n)$ .

Рассм-м послед-ель  $\{z_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}\} \subset E ; \|z_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , т.е.

$z_n \rightarrow \theta_E$  (при  $n \rightarrow \infty$ ). След-но,  $Az_n \rightarrow A(\theta_E) = \theta_F$ .

$$\forall n \quad \|Az_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n \cdot \|x_n\|} > \frac{n}{n} = 1 \quad (\forall n).$$

Теорема доказана.

Получили противоречие  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  предположение неверно  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$   $A$  — ограничен.