

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Учитель математики Антонова Г.В.,
ГБОУ гимназия им. С.В.Байменова
город Похвистнево Самарская область

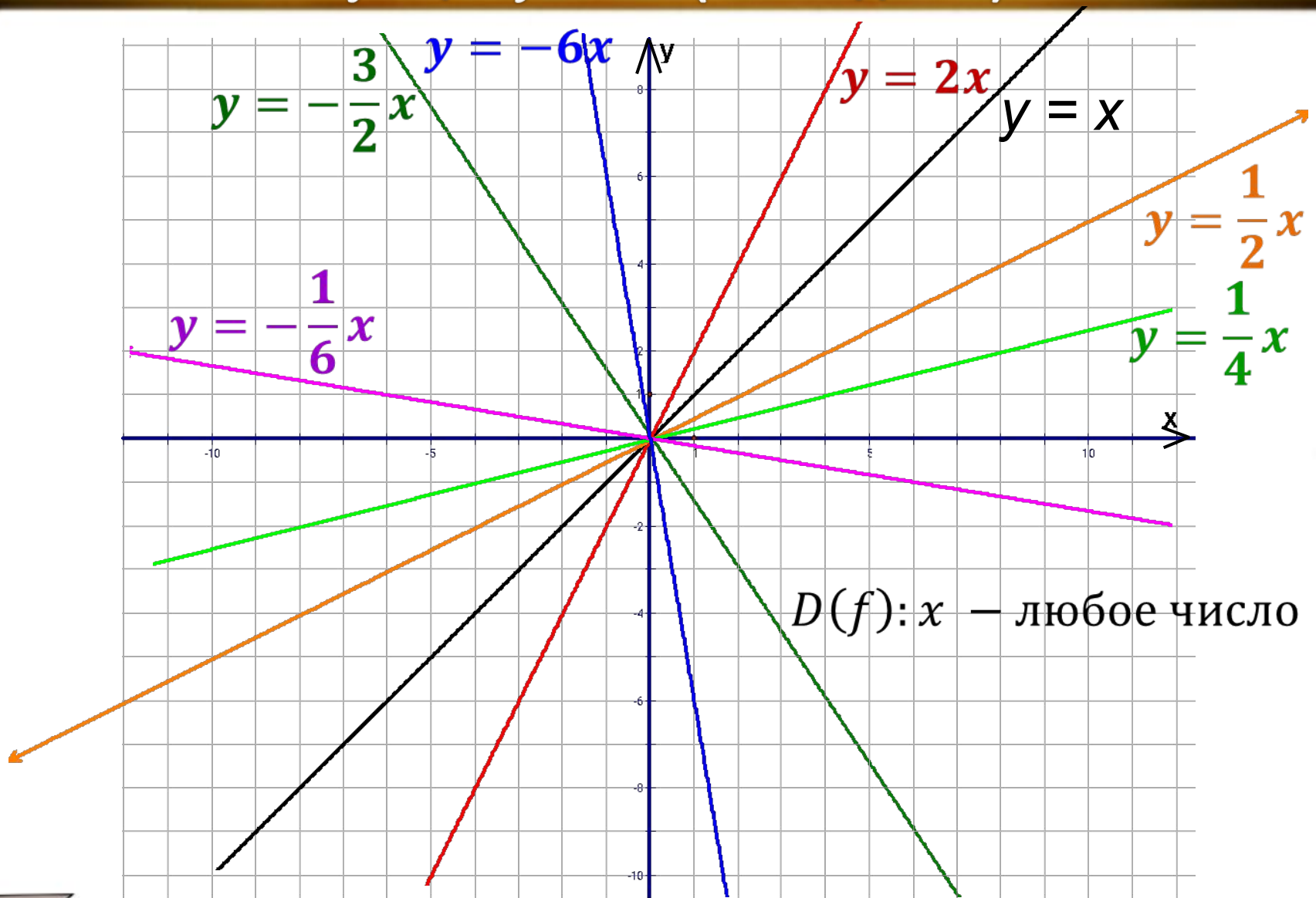


СОДЕРЖАНИЕ

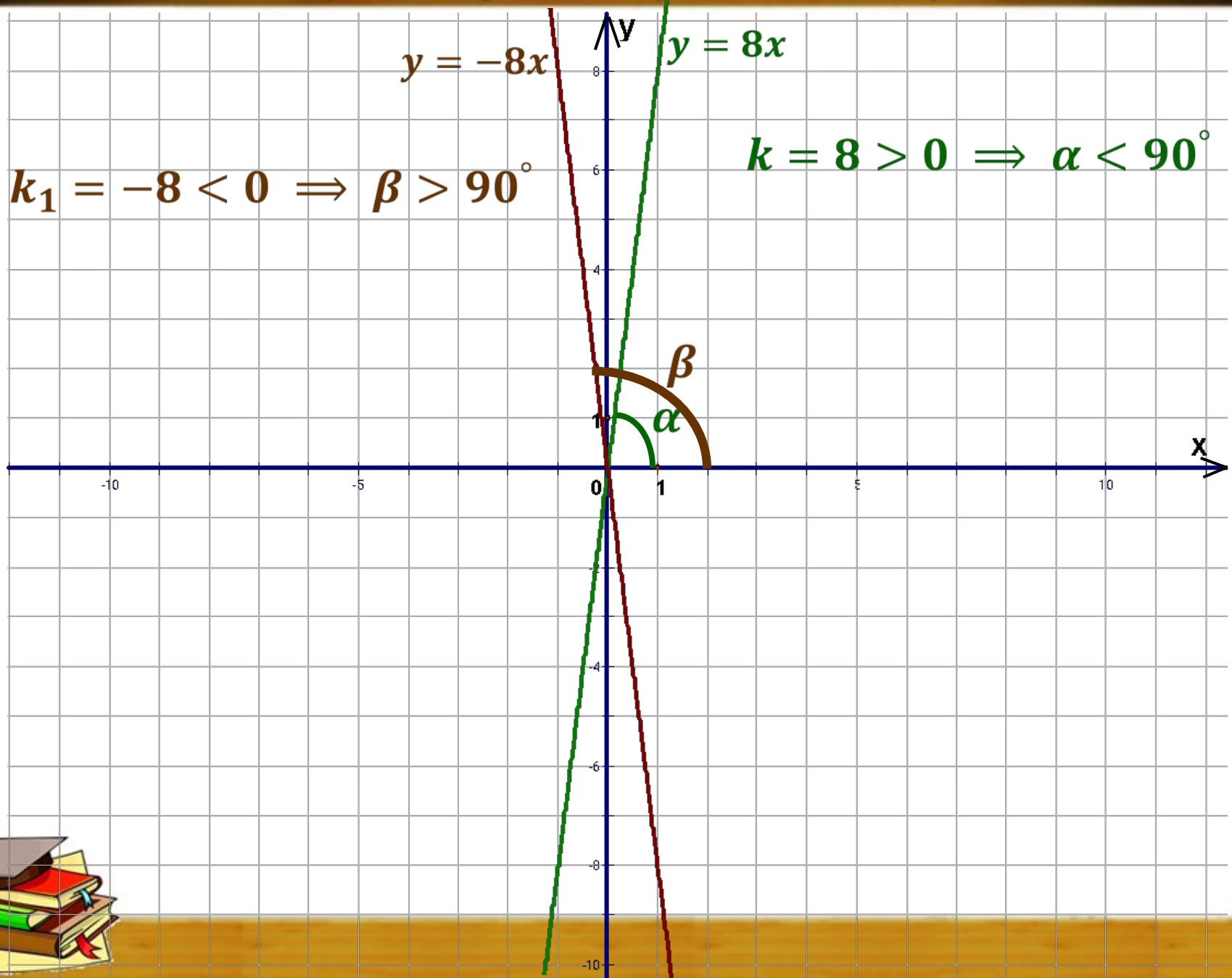
1. Функция $y = kx + b$.
2. Функция $y = \frac{k}{x}$.
3. Функция $y = kx^2$.
4. Функция $y = ax^2 + bx + c$.
5. Функция $y = \sqrt{x}$.
6. Функция $y = |x|$.
7. Преобразования графиков:
 - 1) $f(x) \rightarrow f(x) + b$
 - 2) $f(x) \rightarrow f(x + a)$
 - 3) $f(x) \rightarrow f(x + a) + b$
 - 4) $f(x) \rightarrow -f(x)$
 - 5) $f(x) \rightarrow a \cdot f(x), 0 < a < 1$
 - 6) $f(x) \rightarrow a \cdot f(x), a > 1$
 - 7) $f(x) \rightarrow f(-x)$
 - 8) $f(x) \rightarrow |f(x)|$
 - 9) $f(x) \rightarrow f(|x|)$
8. Примеры решения заданий высокого уровня сложности



Функция $y = kx$ (1 слайд из 4)



Функция $y = kx$ (2 слайд из 4)



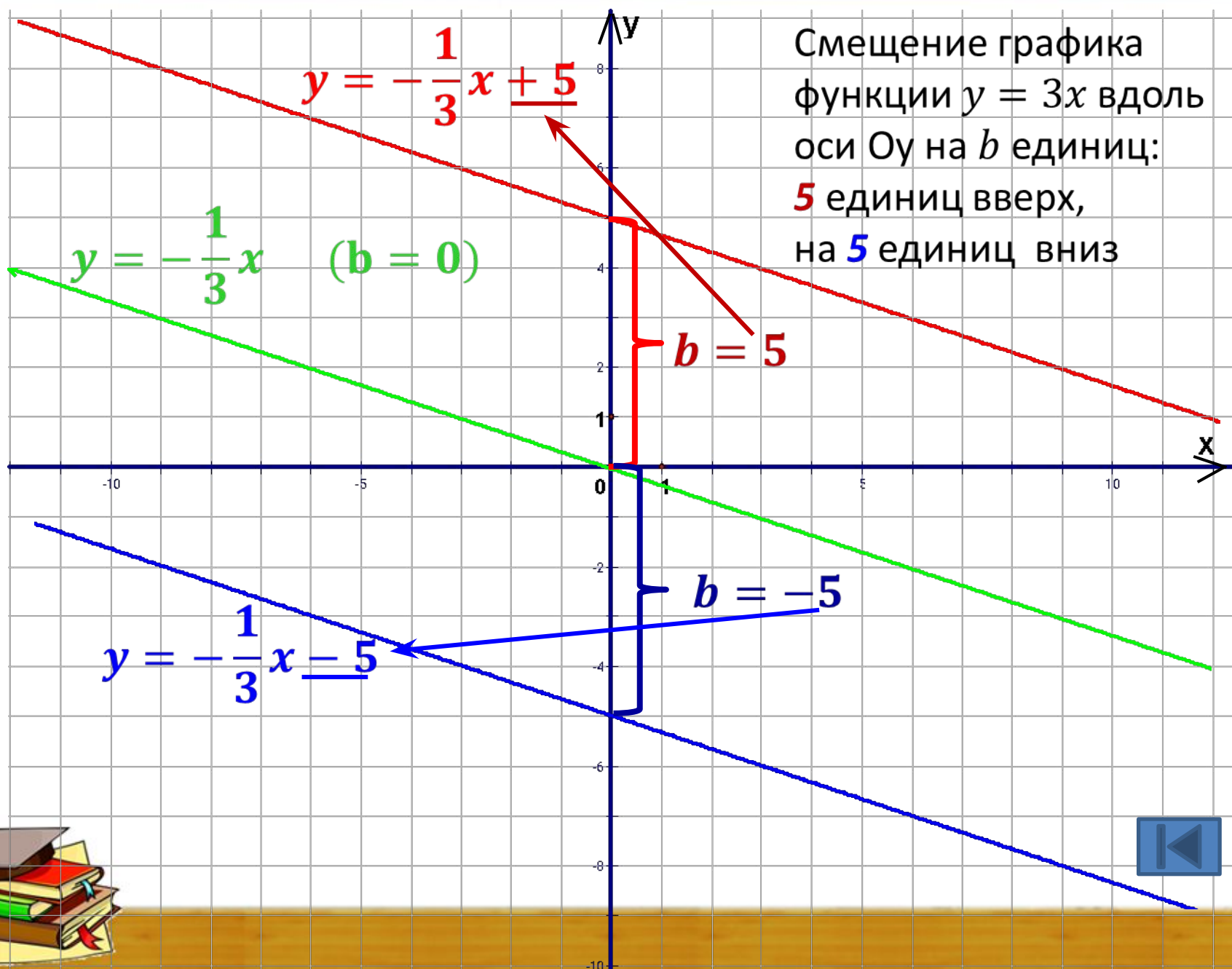
Функция $y = kx + b$ (3 слайд из 4)

Смещение графика функции $y = 3x$ вдоль оси Oy на 5 единиц вверх, получим график функции $y = 3x + 5$

Смещение графика функции $y = 3x$ вдоль оси Oy на 6 единиц вниз, получим график функции $y = 3x - 6$



Функция $y = kx + b$ (4 слайд из 4)



Функция $y = \frac{k}{x}$ (1 слайд из 4)

$$D(f): x \neq 0$$

$$k = 6; 4; 1; \frac{1}{2} > 0$$

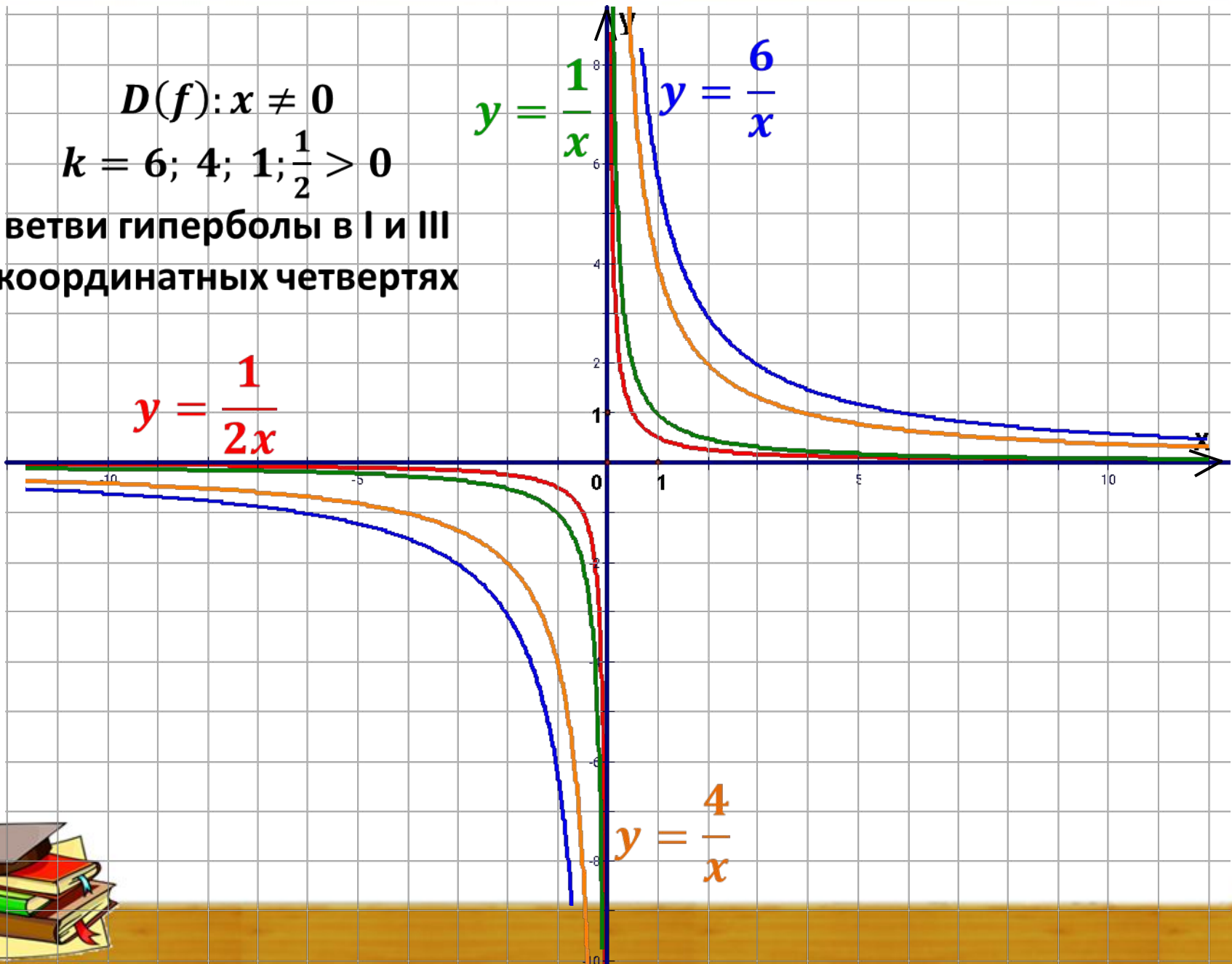
ветви гиперболы в I и III
координатных четвертях

$$y = \frac{1}{2x}$$

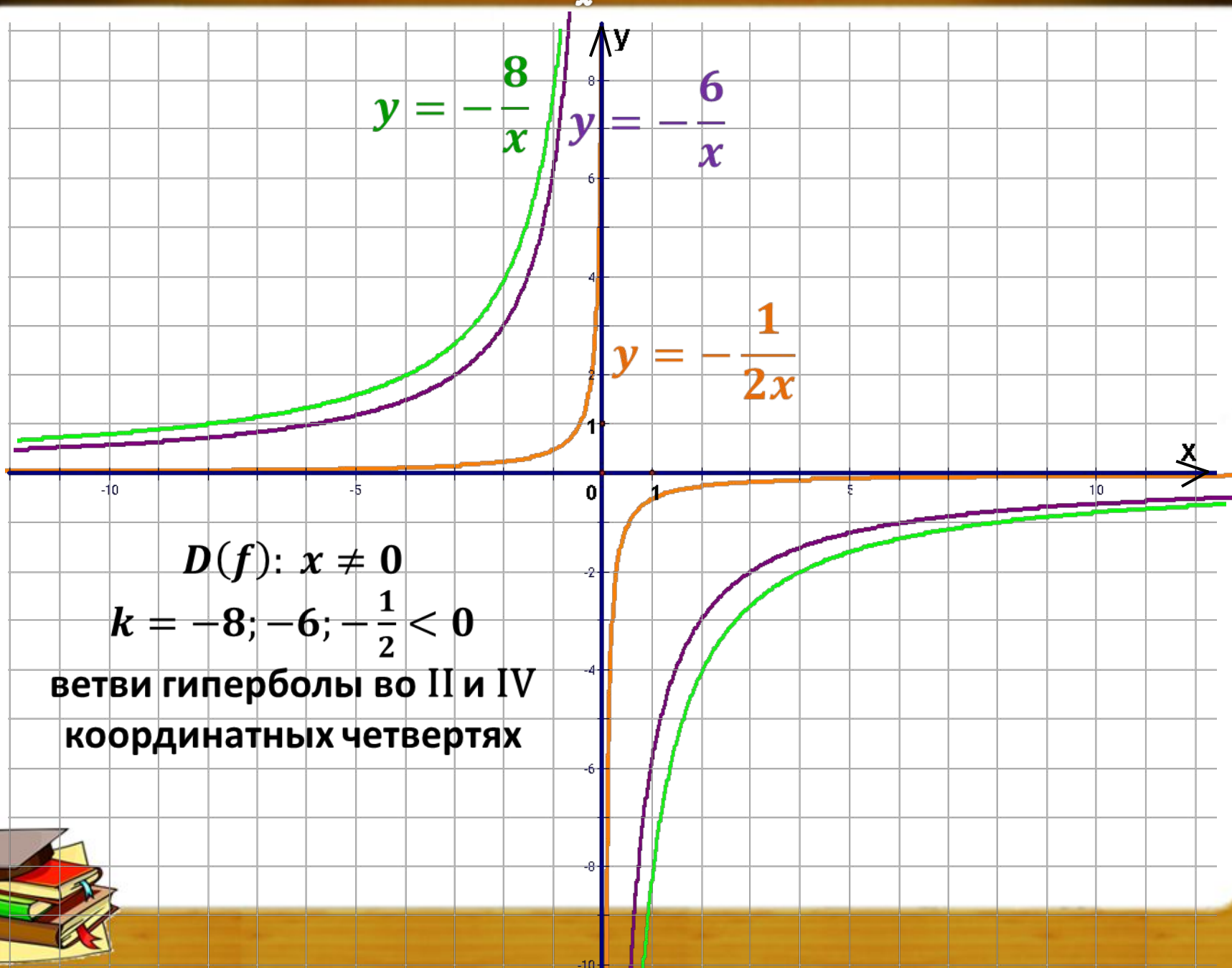
$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{6}{x}$$

$$y = \frac{4}{x}$$



Функция $y = \frac{k}{x}$ (2 слайд из 4)



$D(f): x \neq 0$

$k = -8; -6; -\frac{1}{2} < 0$

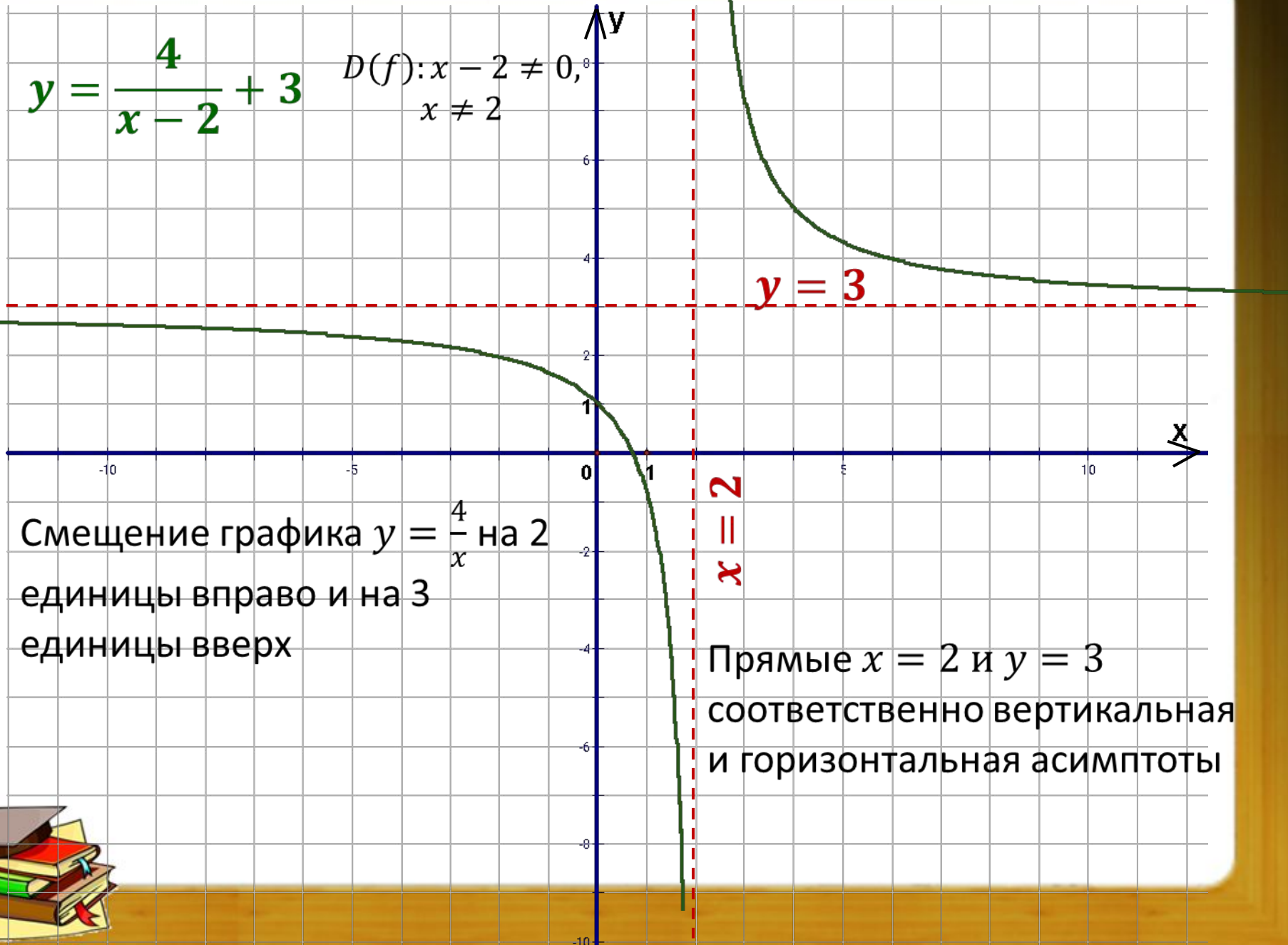
ветви гиперболы во II и IV
координатных четвертях



Функция $y = \frac{k}{x}$ (3 слайд из 4)

$$y = \frac{4}{x-2} + 3$$

$$D(f): x - 2 \neq 0, \\ x \neq 2$$



Смещение графика $y = \frac{4}{x}$ на 2
единицы вправо и на 3
единицы вверх

$$x = 2$$

Прямые $x = 2$ и $y = 3$
соответственно вертикальная
и горизонтальная асимптоты



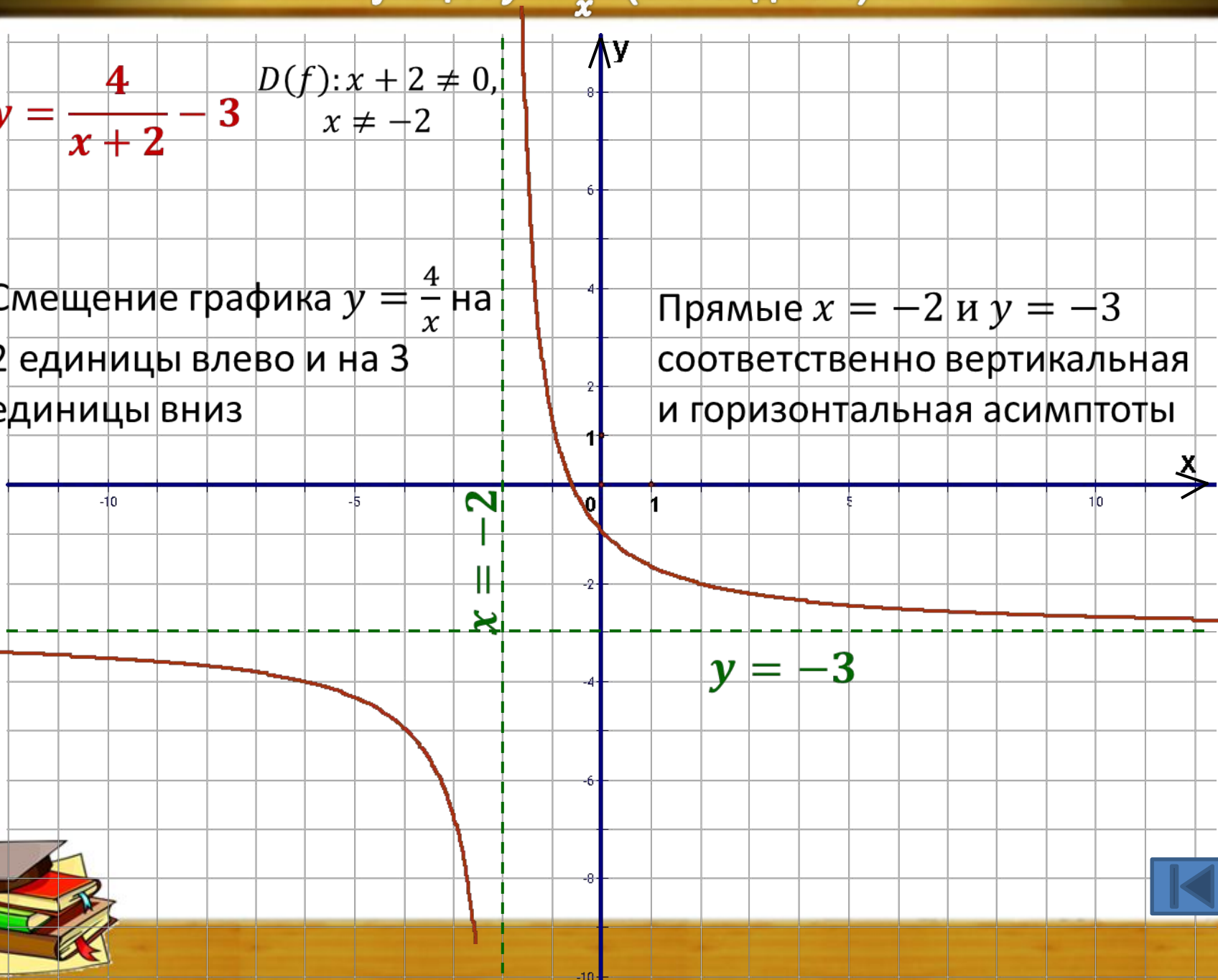
Функция $y = \frac{k}{x}$ (4 слайд из 4)

$$y = \frac{4}{x+2} - 3$$

$$D(f): x + 2 \neq 0, \\ x \neq -2$$

Смещение графика $y = \frac{4}{x}$ на
2 единицы влево и на 3
единицы вниз

Прямые $x = -2$ и $y = -3$
соответственно вертикальная
и горизонтальная асимптоты



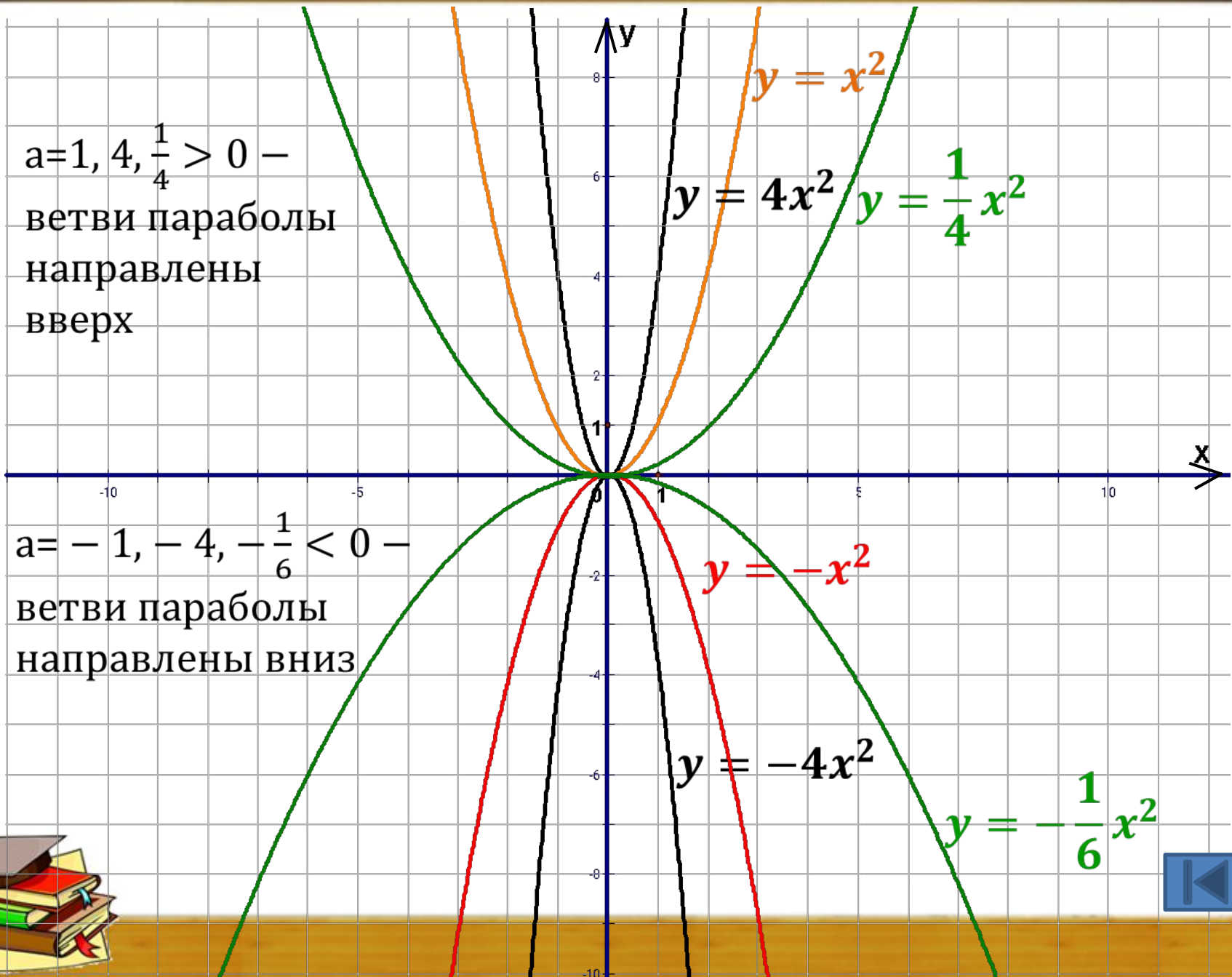
Функция $y = ax^2$ (1 слайд из 1)

$$a = 1, 4, \frac{1}{4} > 0 -$$

ветви параболы
направлены
вверх

$$a = -1, -4, -\frac{1}{6} < 0 -$$

ветви параболы
направлены вниз



Функция $y = ax^2 + bx + c$ (1 слайд из 4)

$$y = x^2 - 6x + 10$$

Квадратичная функция,
где $a = 1$, график
получается из графика
функции $y = x^2$, для
этого нужно:

1) Найти координаты
вершины параболы

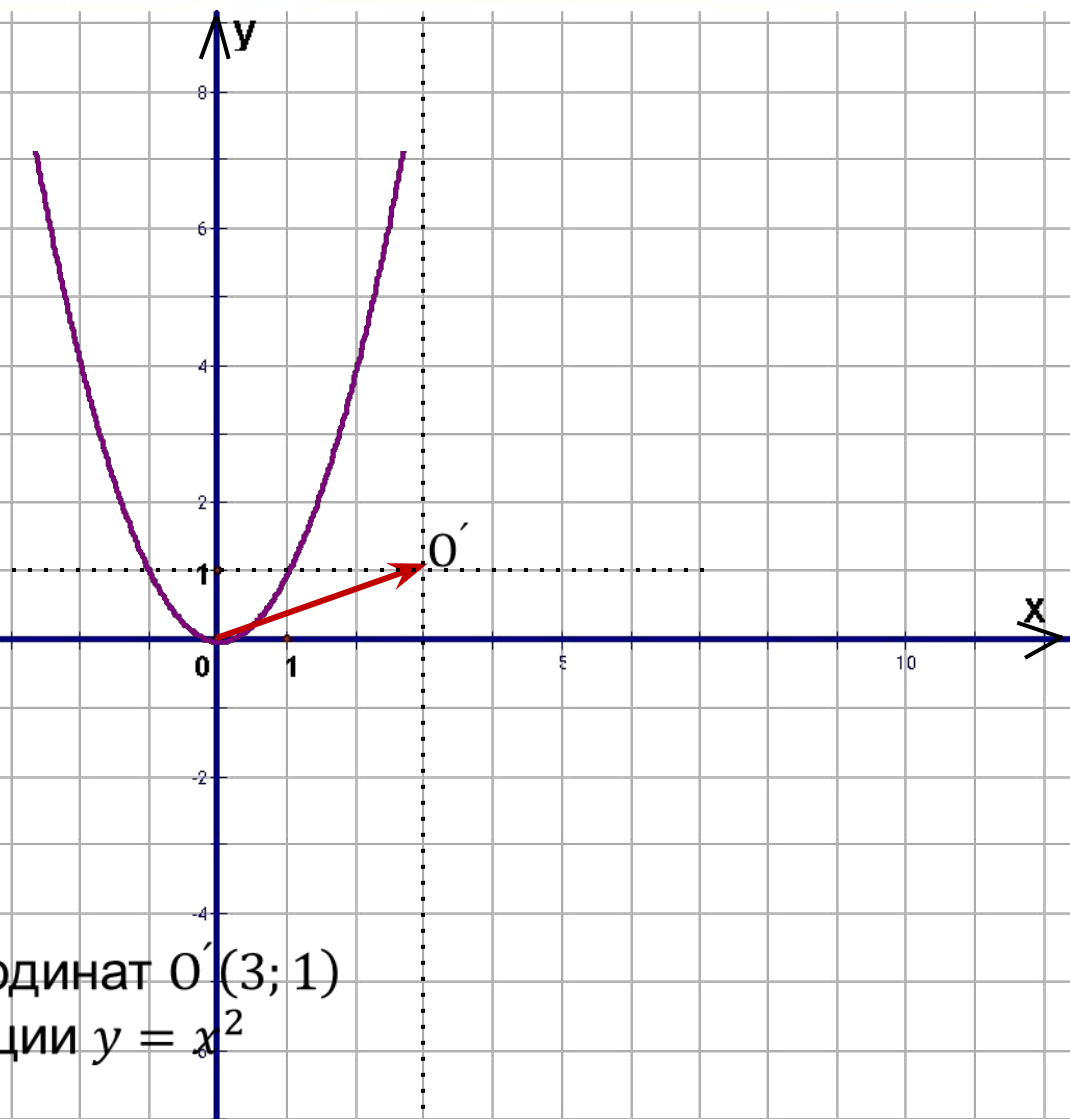
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$x_0 = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

$$y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$$

2) В новой системе координат $O'(3; 1)$
построить график функции $y = x^2$



Функция $y = ax^2 + bx + c$ (2 слайд из 4)

$$y = -x^2 + 6x - 10$$

Квадратичная функция, график получается из графика функции $y = -x^2$, для этого нужно:

1) Найти координаты вершины параболы

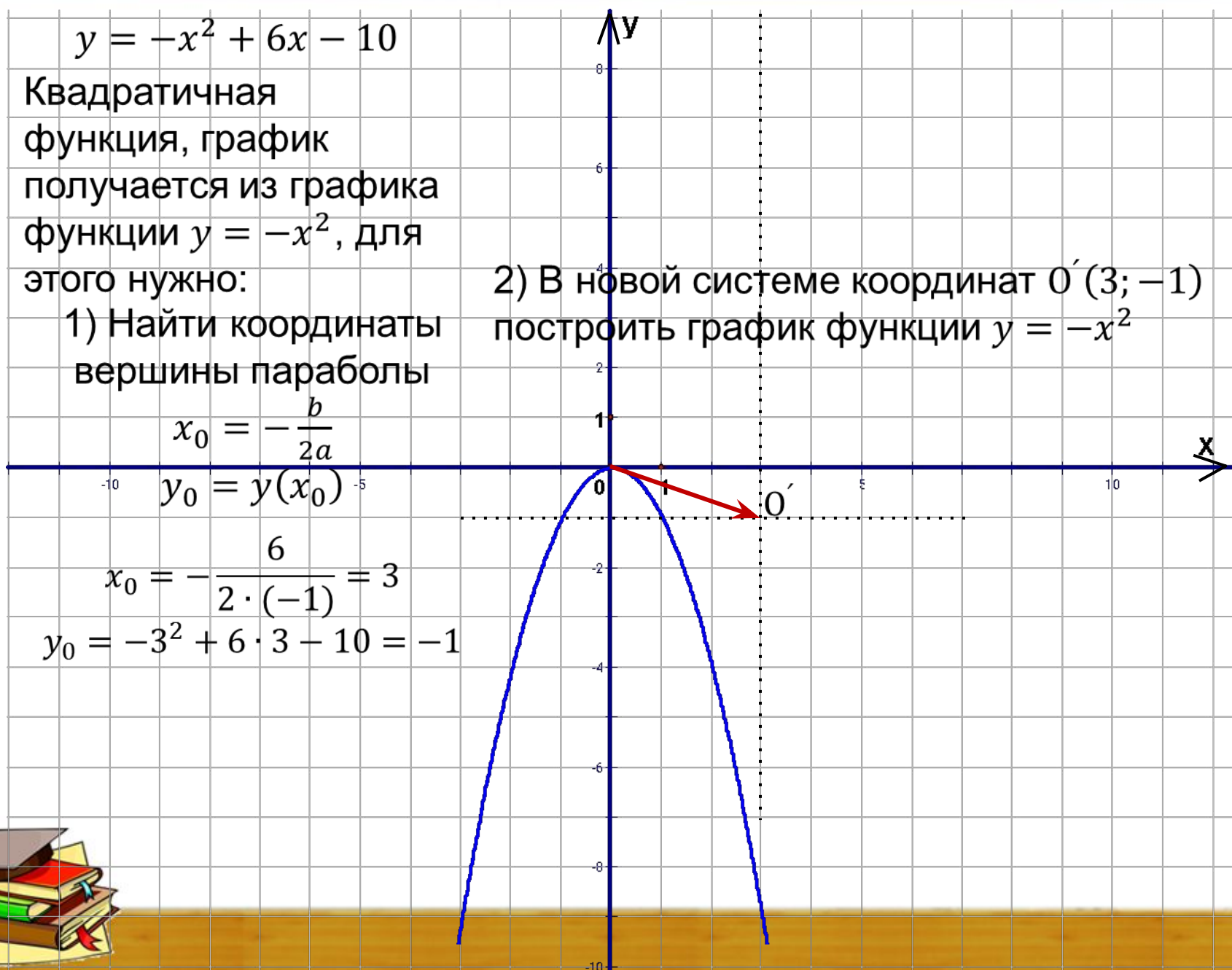
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$x_0 = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$$

$$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 10 = -1$$

2) В новой системе координат $O'(3; -1)$ построить график функции $y = -x^2$



Функция $y = ax^2 + bx + c$ (3 слайд из 4)

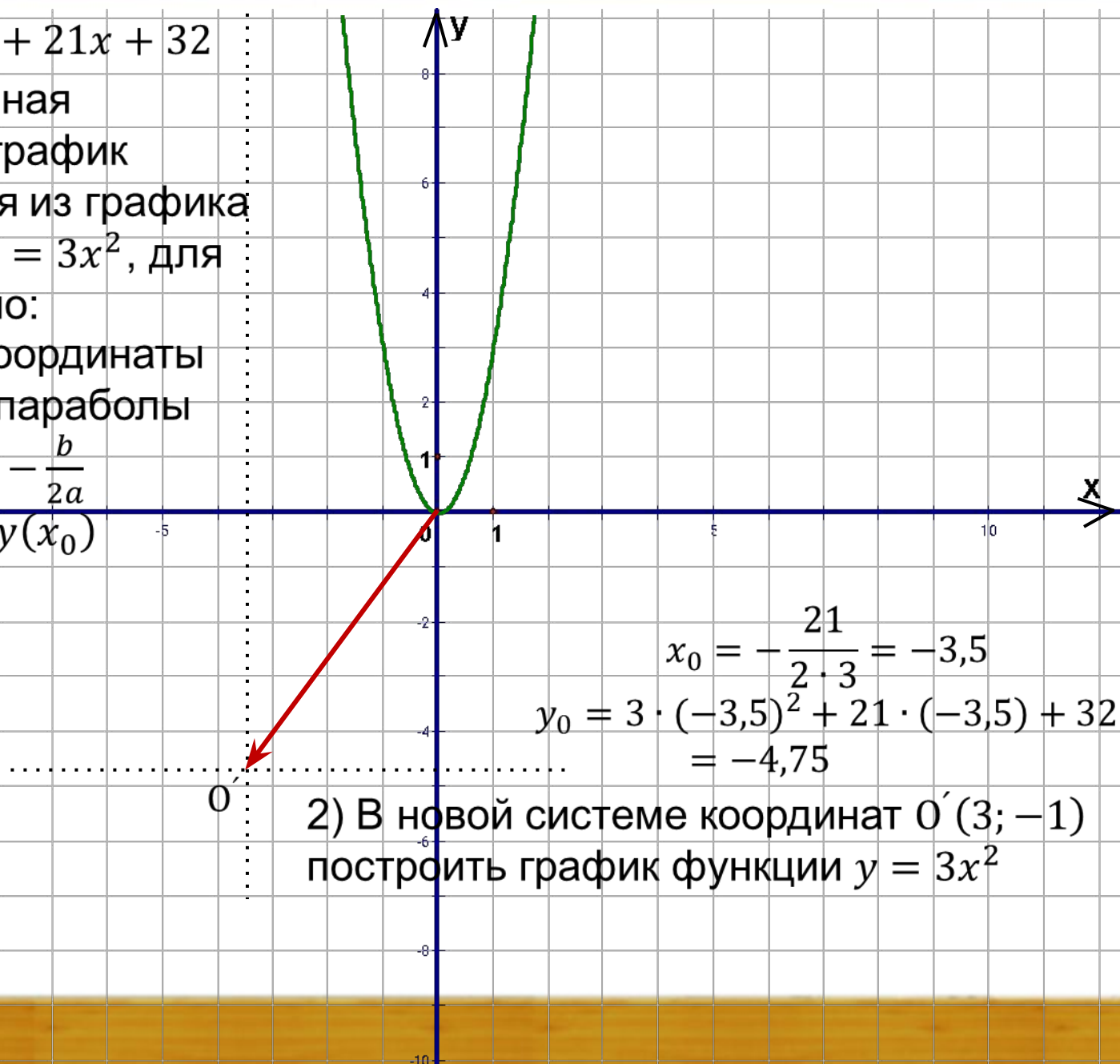
$$y = 3x^2 + 21x + 32$$

Квадратичная функция, график получается из графика функции $y = 3x^2$, для этого нужно:

1) Найти координаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = y(x_0)$$



$$x_0 = -\frac{21}{2 \cdot 3} = -3,5$$

$$y_0 = 3 \cdot (-3,5)^2 + 21 \cdot (-3,5) + 32 = -4,75$$

2) В новой системе координат $O'(3; -1)$ построить график функции $y = 3x^2$



Функция $y = ax^2 + bx + c$ (4 слайд из 4)

$$y = -2x^2 - 4x + 2$$

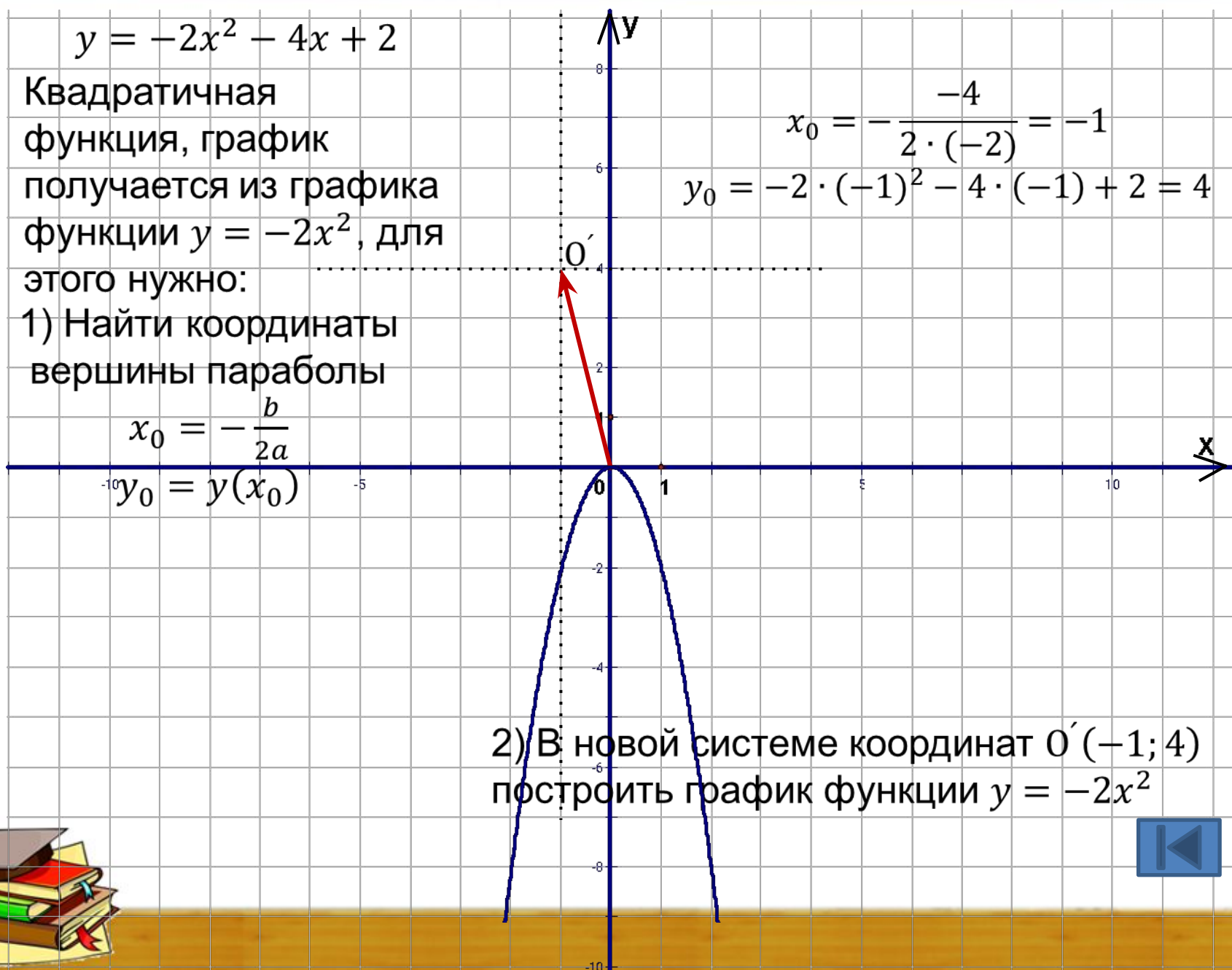
Квадратичная функция, график получается из графика функции $y = -2x^2$, для этого нужно:

1) Найти координаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = y(x_0)$$

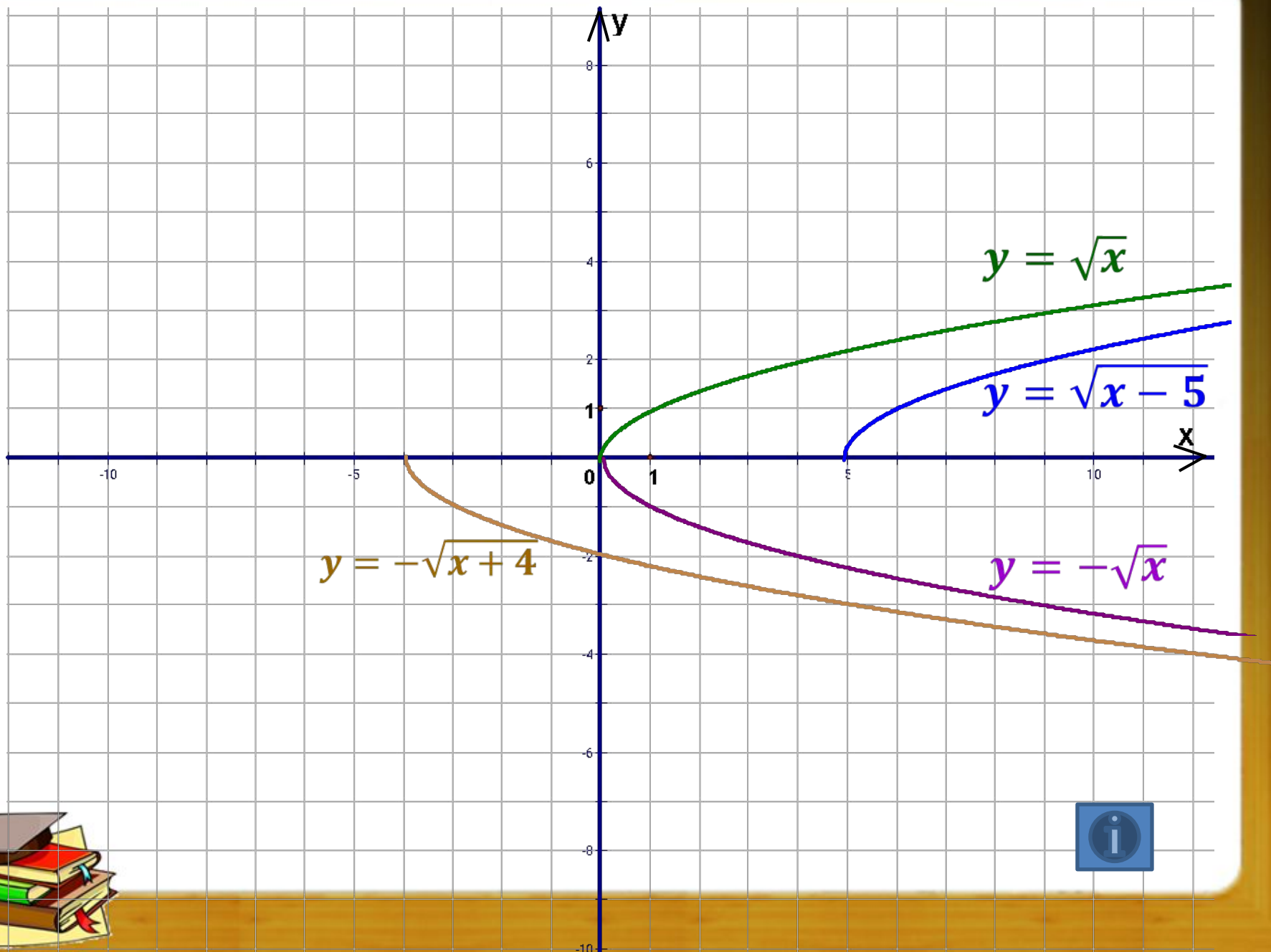
$$x_0 = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$$
$$y_0 = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 2 = 4$$



2) В новой системе координат $O'(-1; 4)$ построить график функции $y = -2x^2$



Функция $y = \sqrt{x}$ (1 слайд из 3)



Функция $y = \sqrt{x}$ (2 слайд из 3)

$D(f): x \leq 0$

$$y = \sqrt{-2x}$$

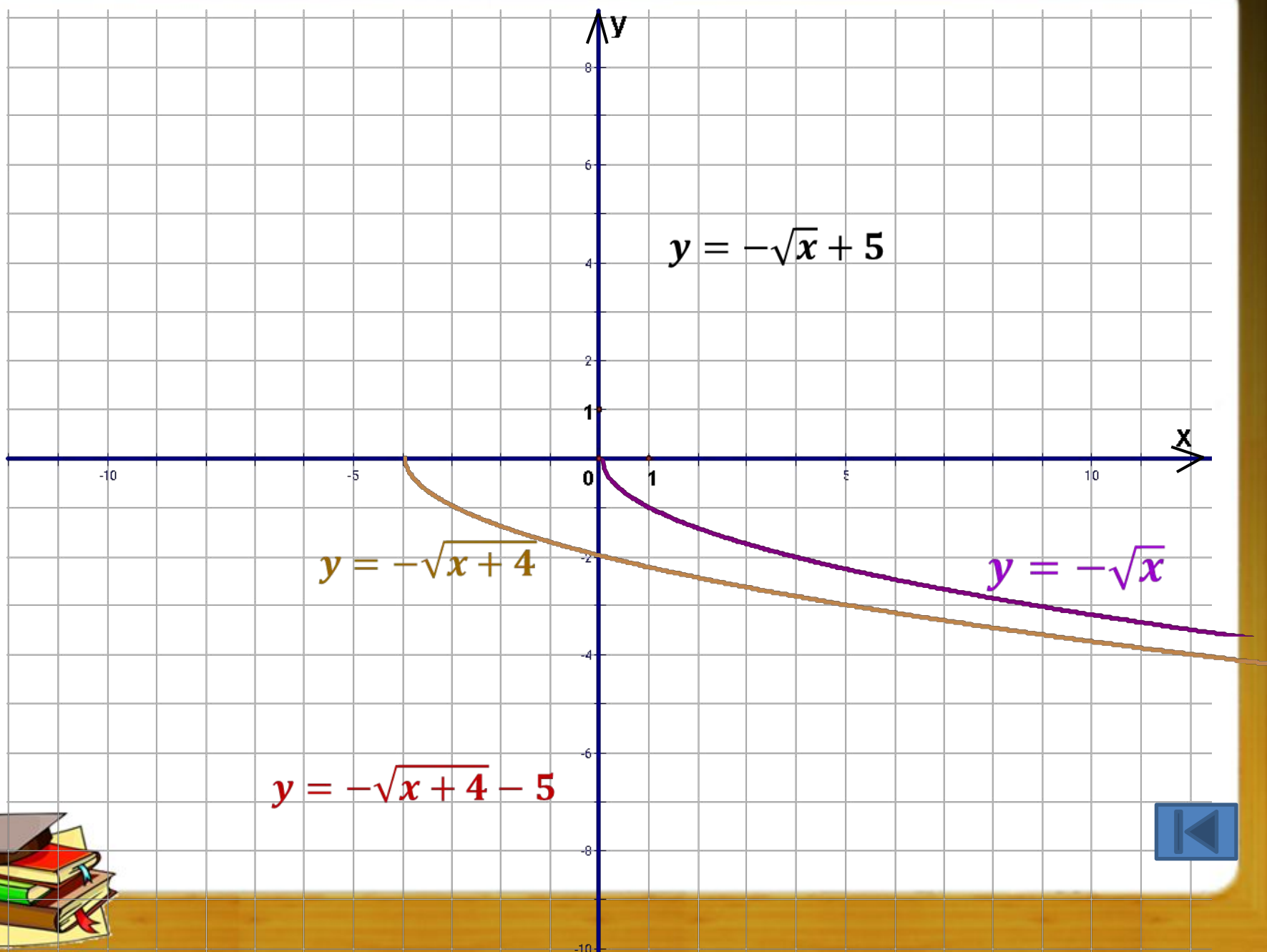
$$y = \sqrt{-x}$$

$$y = -\sqrt{-2x}$$

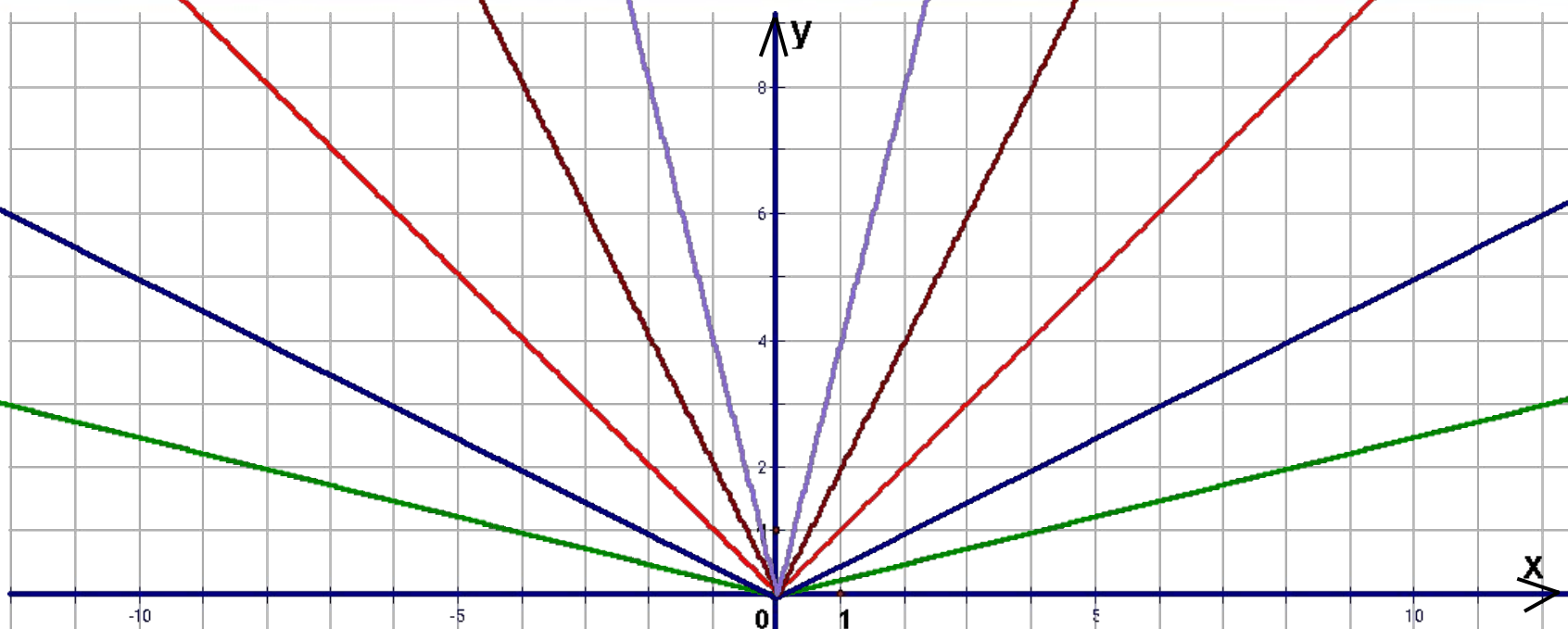
$$y = -\sqrt{-4x}$$



Функция $y = \sqrt{x}$ (3 слайд из 3)



Функция $y = |x|$ (1 слайд из 3)



$$y = |x|$$

$$y = \left| \frac{1}{4}x \right|$$

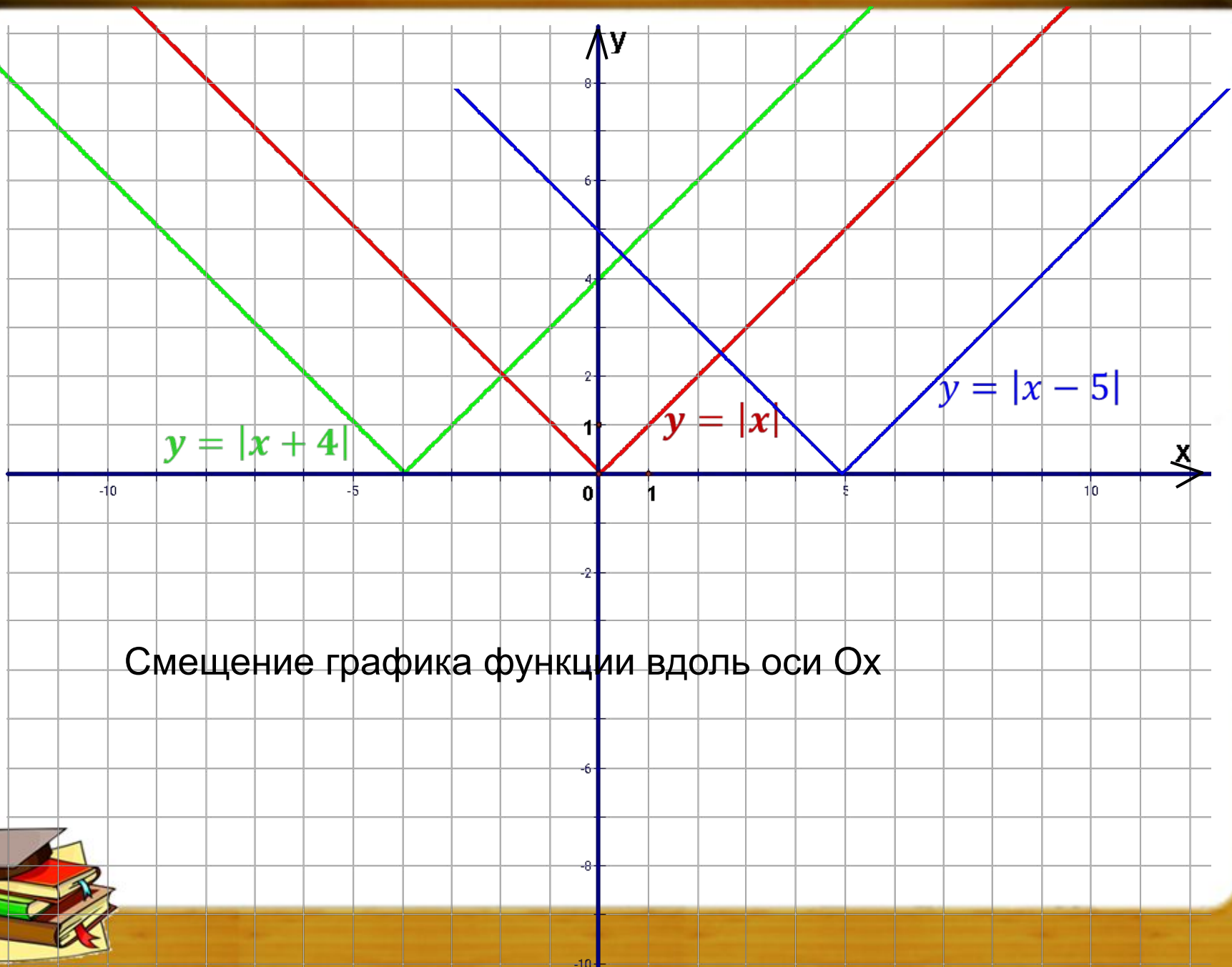
$$y = \left| \frac{1}{2}x \right|$$

$$y = |2x|$$

$$y = |4x|$$



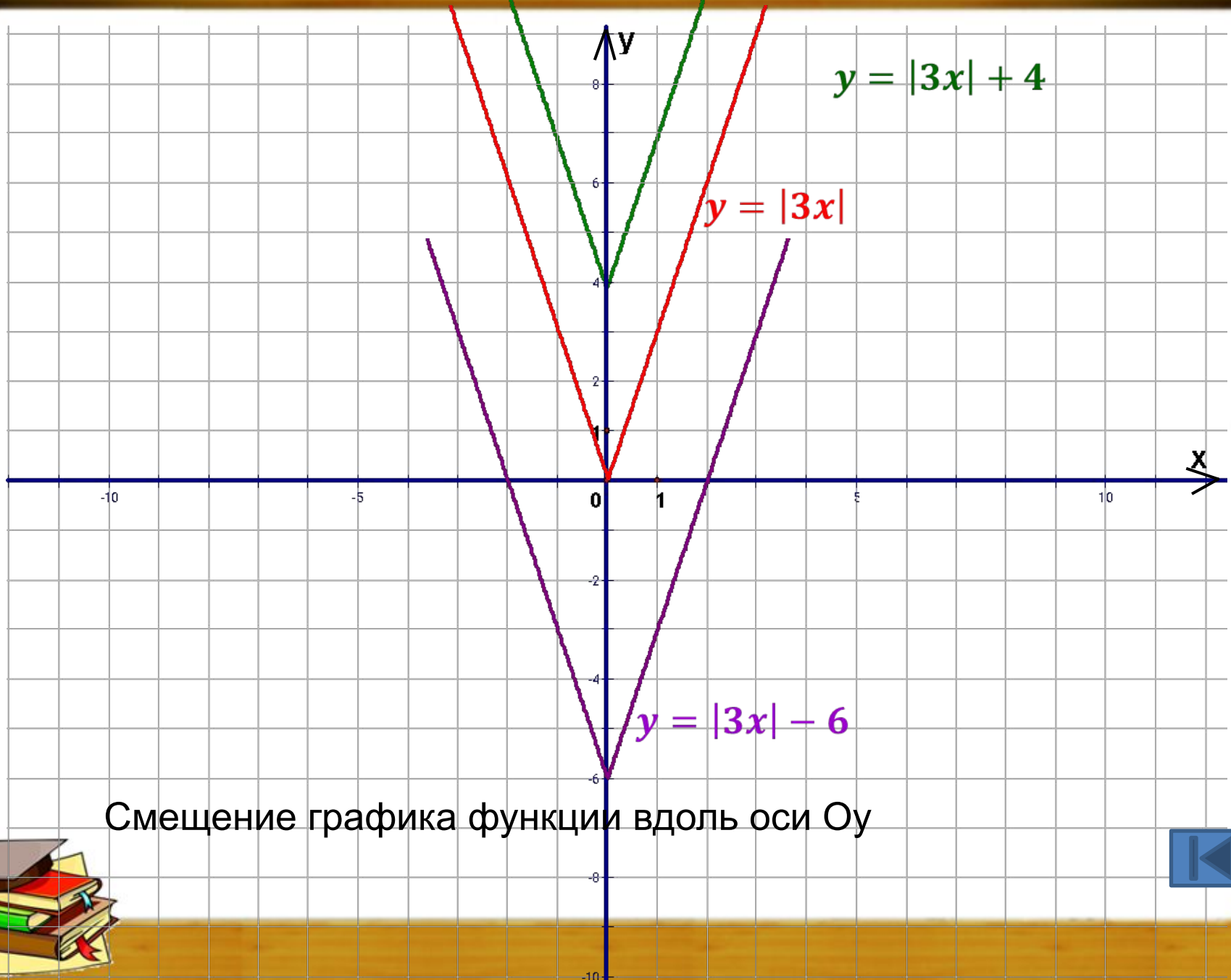
Функция $y = |x|$ (2 слайд из 3)



Смещение графика функции вдоль оси Ox



Функция $y = |ax|$ (3 слайд из 3)



Смещение графика функции вдоль оси Oy



Пример 1 из 8

Построить график функции

$$y = 2x^2 - 4|x| - 2$$

Построение:

1. Строим график функции

$$y = 2x^2 - 4x - 2$$

2. Строим график функции

$$y = 2x^2 - 4|x| - 2$$

y

8

6

4

2

1

0

-2

-4

-6

-8

-10

x

10



Пример 2 из 8

Построить график
функции

$$y = |2x^2 - 4x - 2|$$

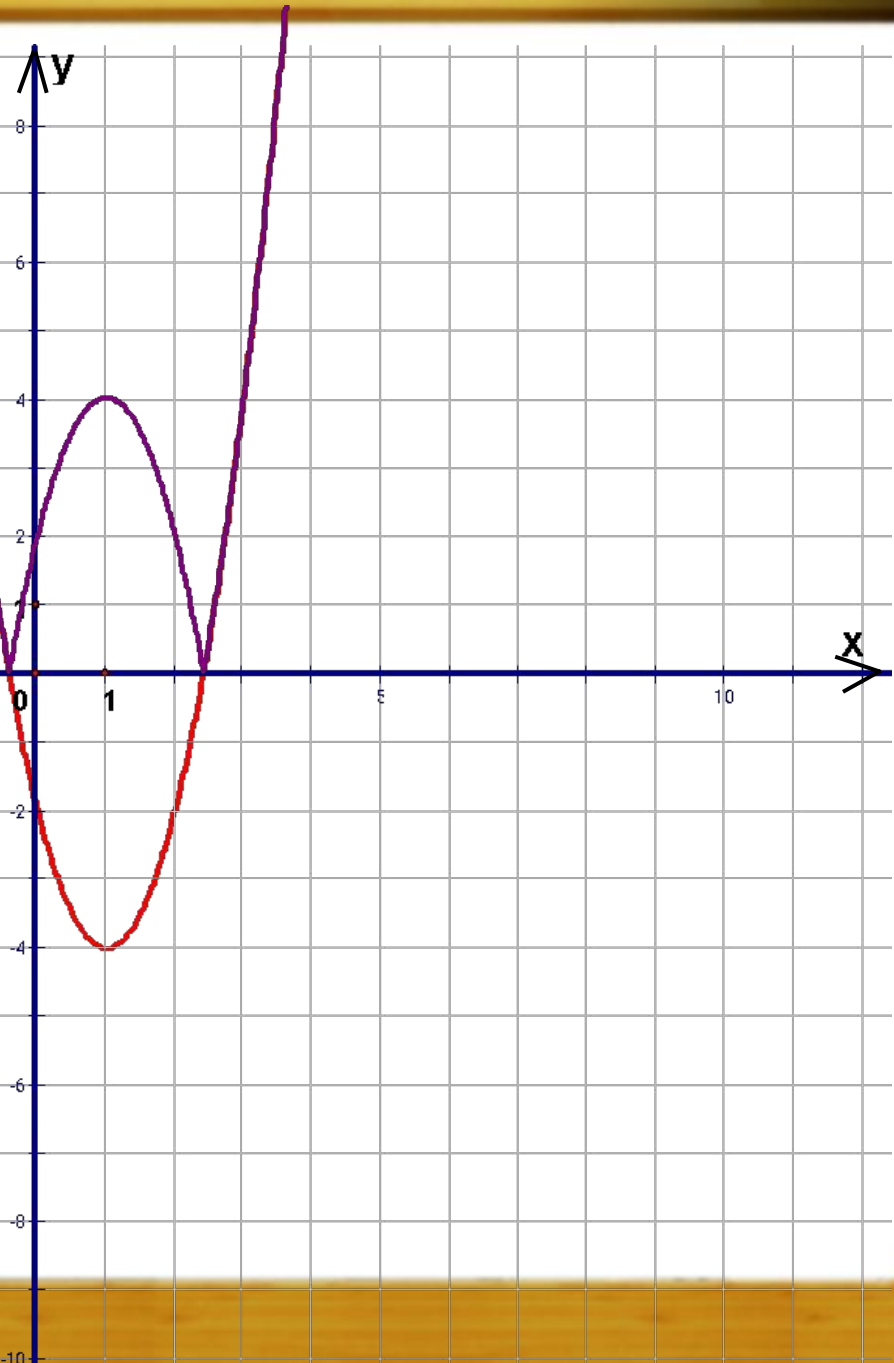
Построение:

1. Строим график
функции

$$y = 2x^2 - 4x - 2$$

2. Строим график
функции

$$y = |2x^2 - 4x - 2|$$



Пример 3 из 8

Постройте график функции $y = -3 + \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

$$D(f): x^2 + 5x \neq 0; x \neq 0, x \neq -5$$

$$y = -3 + \frac{x+5}{x^2+5x} = -3 + \frac{x+5}{x(x+5)} = -3 + \frac{1}{x}$$

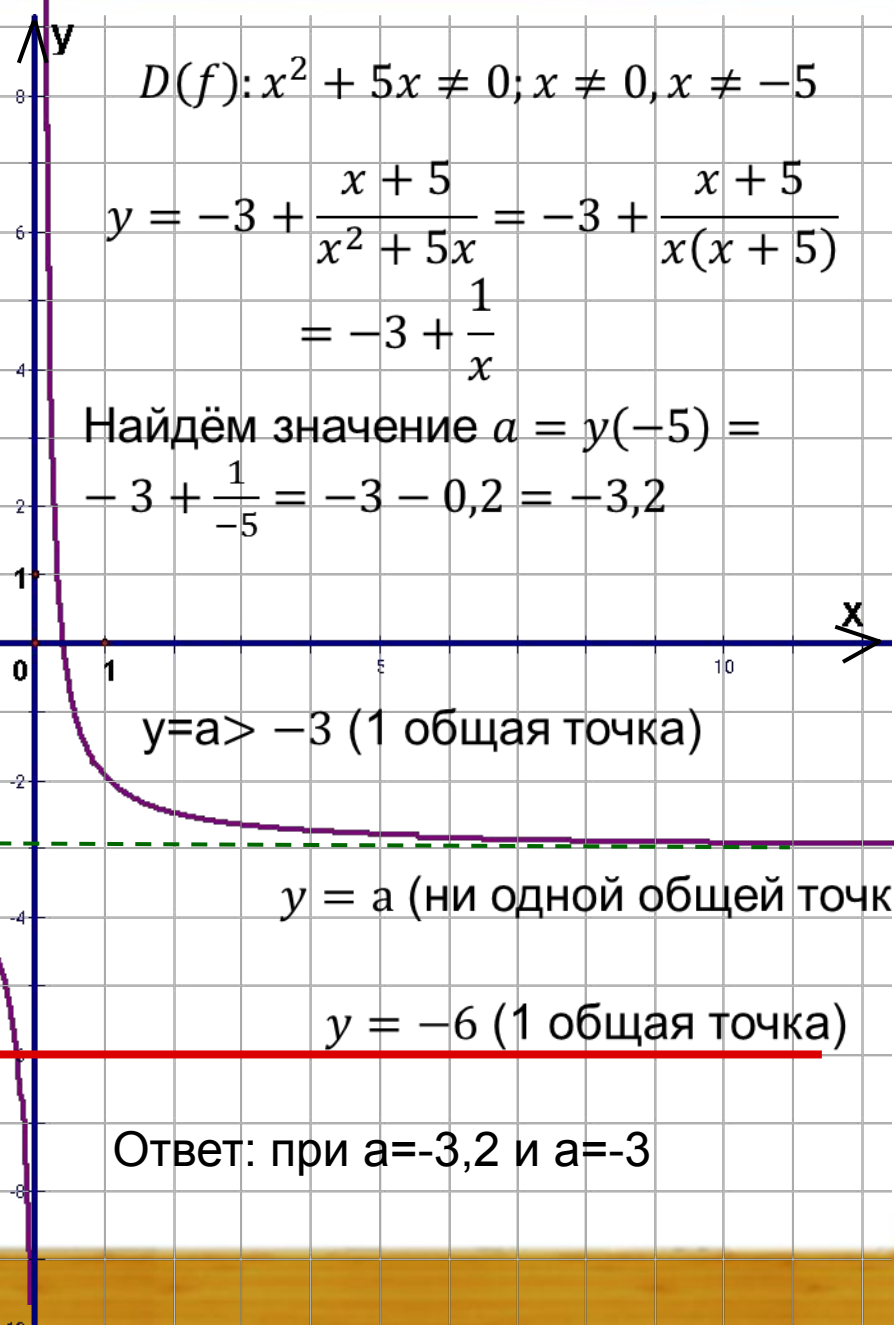
$$\text{Найдём значение } a = y(-5) = -3 + \frac{1}{-5} = -3 - 0,2 = -3,2$$

$y = a > -3$ (1 общая точка)

$y = a$ (ни одной общей точки)

$y = -6$ (1 общая точка)

Ответ: при $a = -3,2$ и $a = -3$



$y = -3$ (ни одной общей точки)

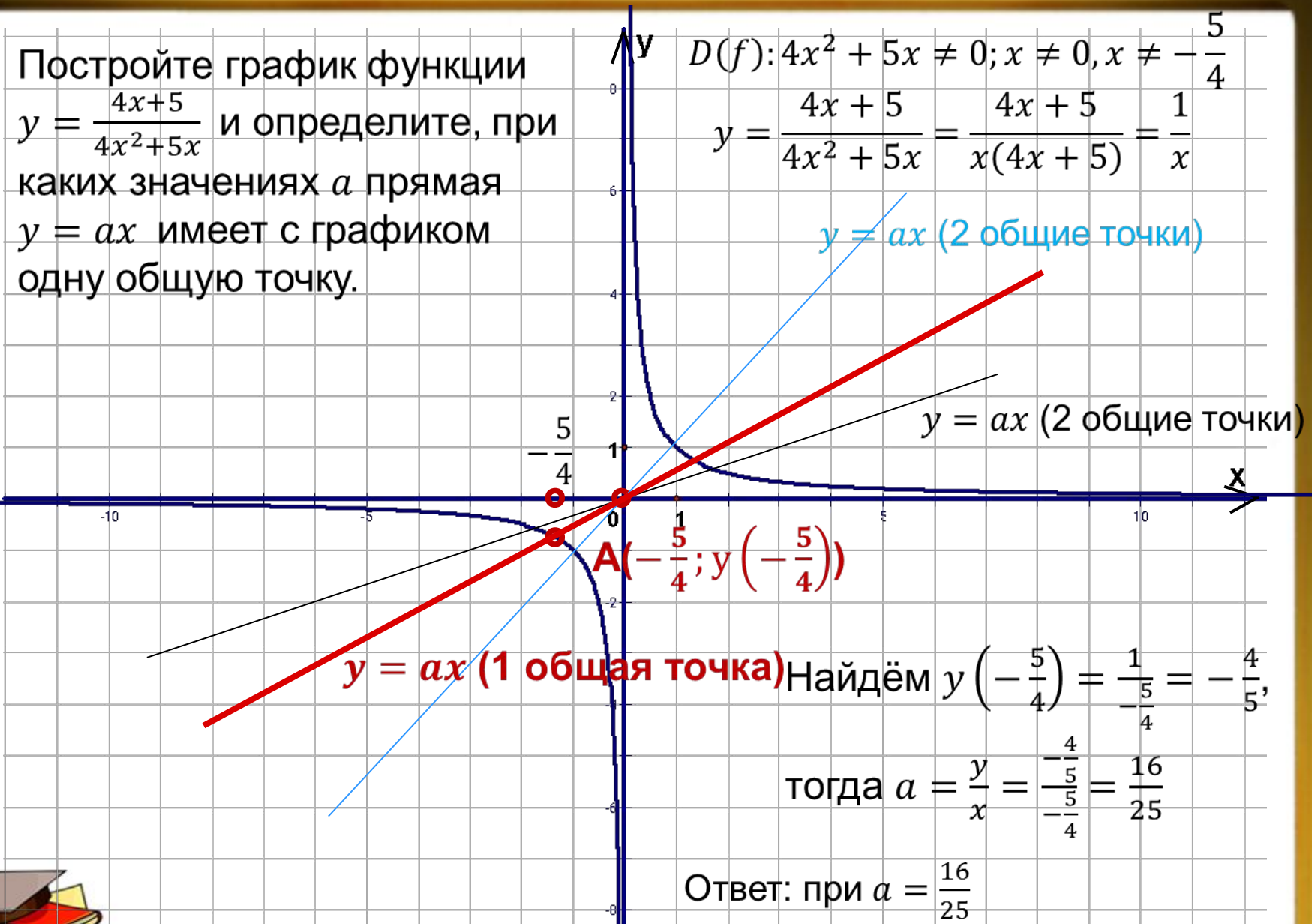


Пример 4 из 8

Постройте график функции $y = \frac{4x+5}{4x^2+5x}$ и определите, при каких значениях a прямая $y = ax$ имеет с графиком одну общую точку.

$$D(f): 4x^2 + 5x \neq 0; x \neq 0, x \neq -\frac{5}{4}$$

$$y = \frac{4x + 5}{4x^2 + 5x} = \frac{4x + 5}{x(4x + 5)} = \frac{1}{x}$$



Найдём $y(-\frac{5}{4}) = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$,

тогда $a = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{5}{4}} = \frac{16}{25}$

Ответ: при $a = \frac{16}{25}$

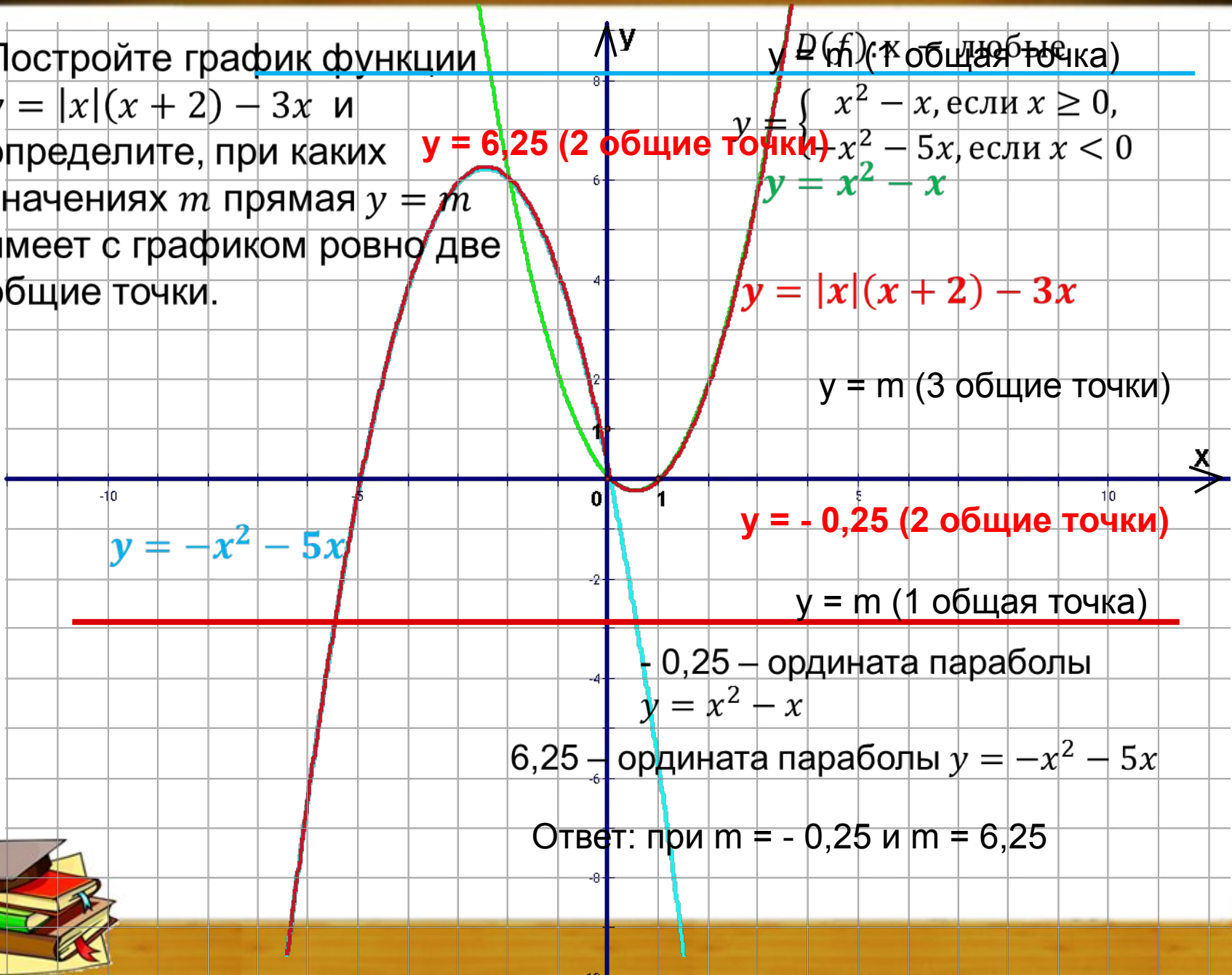


Пример 5 из 8

Постройте график функции $y = |x|(x + 2) - 3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

$y \in D(f)$ (любая точка)

$$y = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2 - 5x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



$y = 6,25$ (2 общие точки)

$y = |x|(x + 2) - 3x$

$y = m$ (3 общие точки)

$y = -0,25$ (2 общие точки)

$y = m$ (1 общая точка)

- 0,25 – ордината параболы $y = x^2 - x$

6,25 – ордината параболы $y = -x^2 - 5x$

Ответ: при $m = -0,25$ и $m = 6,25$



Пример 6 из 8

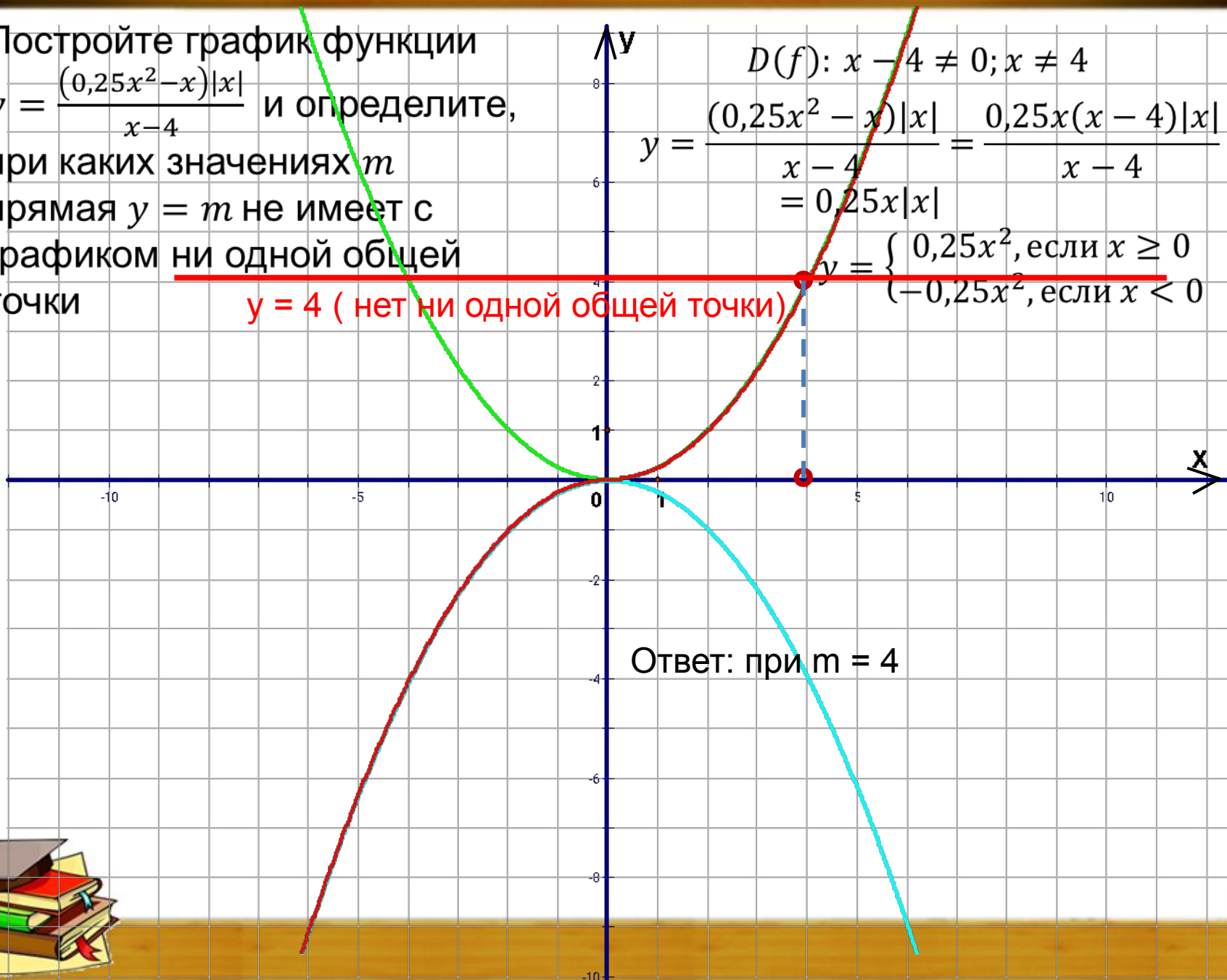
Постройте график функции $y = \frac{(0,25x^2 - x)|x|}{x - 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки

$y = 4$ (нет ни одной общей точки)

$$D(f): x - 4 \neq 0; x \neq 4$$

$$y = \frac{(0,25x^2 - x)|x|}{x - 4} = \frac{0,25x(x - 4)|x|}{x - 4} = 0,25x|x|$$

$$y = \begin{cases} 0,25x^2, & \text{если } x \geq 0 \\ -0,25x^2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Ответ: при $m = 4$



Пример 7 из 8

Постройте график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Построение:

1. Строим график функции

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y(3) = -4$$

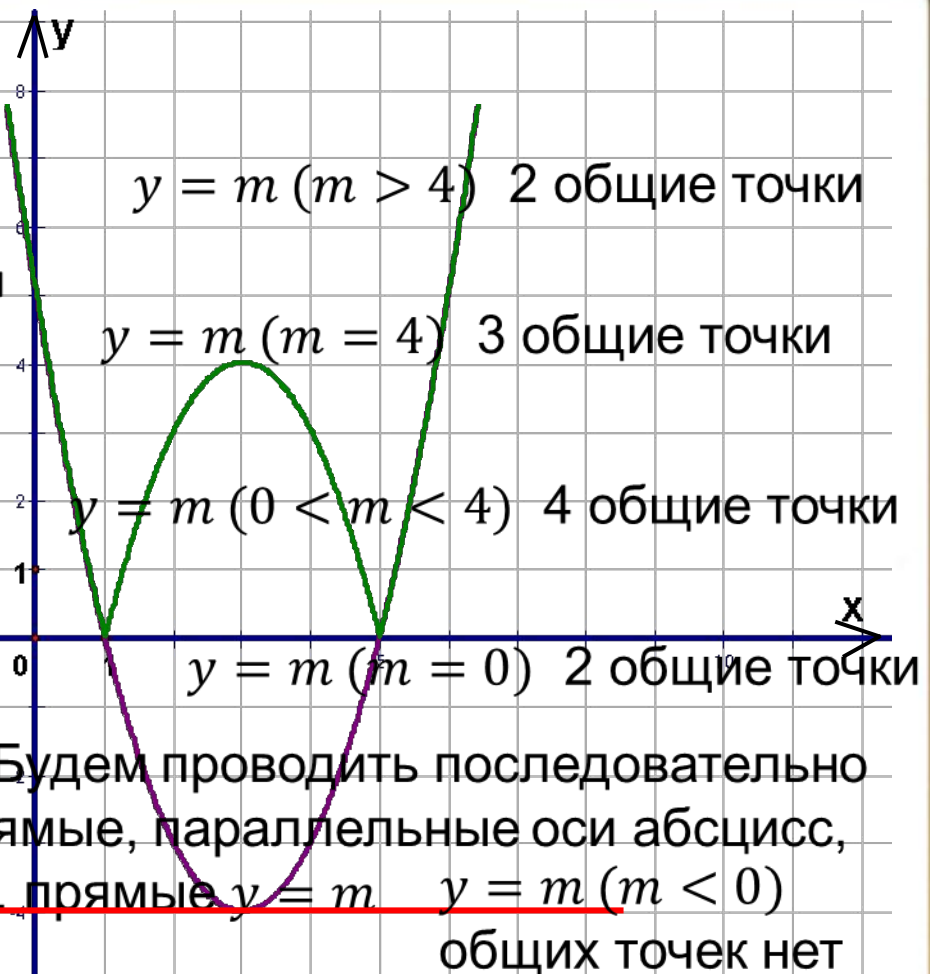
2. Строим график функции

$$y = |x^2 - 4x + 5|$$

3. Будем проводить последовательно прямые, параллельные оси абсцисс, т.е. прямые $y = m$

$y = m (m < 0)$
общих точек нет

Ответ: 4 – наибольшее число общих точек



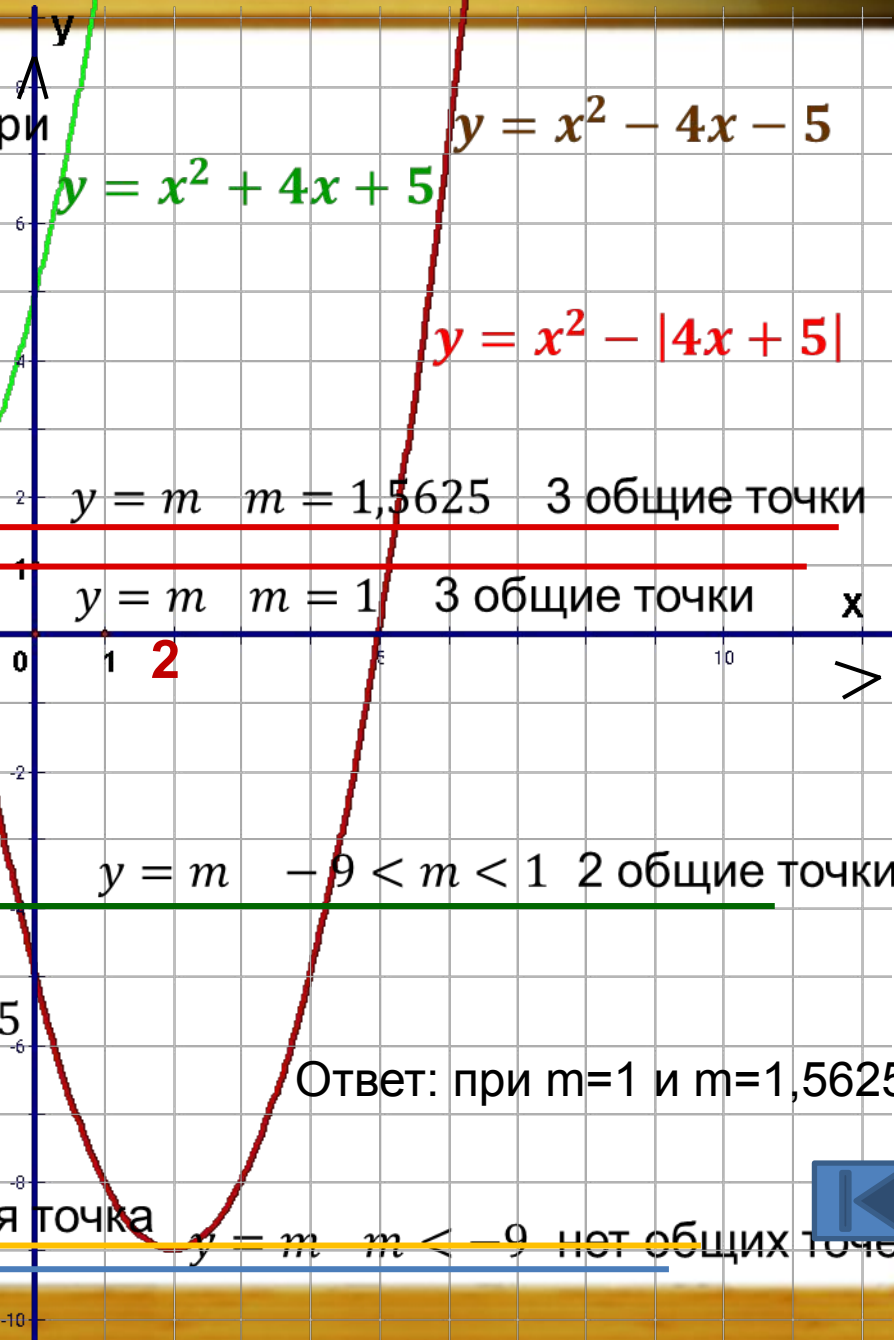
Пример 8 из 8

Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 5|$ и определите, при каких значениях m $y = m$ имеет с графиком ровно 3 общие точки.

$$|4x + 5| = \begin{cases} 4x + 5, & \text{если } x \geq -1,25 \\ -4x - 5, & \text{если } x < -1,25 \end{cases}$$

Тогда

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & \text{если } x \geq -1,25 \\ x^2 + 4x + 5, & \text{если } x < -1,25 \end{cases}$$



$$y = x^2 - 4x - 5$$

$$y = x^2 + 4x + 5$$

$$y = x^2 - |4x + 5|$$

$y = m$ $m = 1,5625$ 3 общие точки

$y = m$ $m = 1$ 3 общие точки

$y = m$ $-9 < m < 1$ 2 общие точки

$y = m$ $m = -9$ 1 общая точка

$y = m$ $m < -9$ нет общих точек

Координаты вершины первой параболы (2;-9)
Координаты вершины второй параболы (-2;1)

Найдём $f(-1,25) =$
 $= (-1,25)^2 - |4 \cdot (-1,25) + 5| = 1,5625$

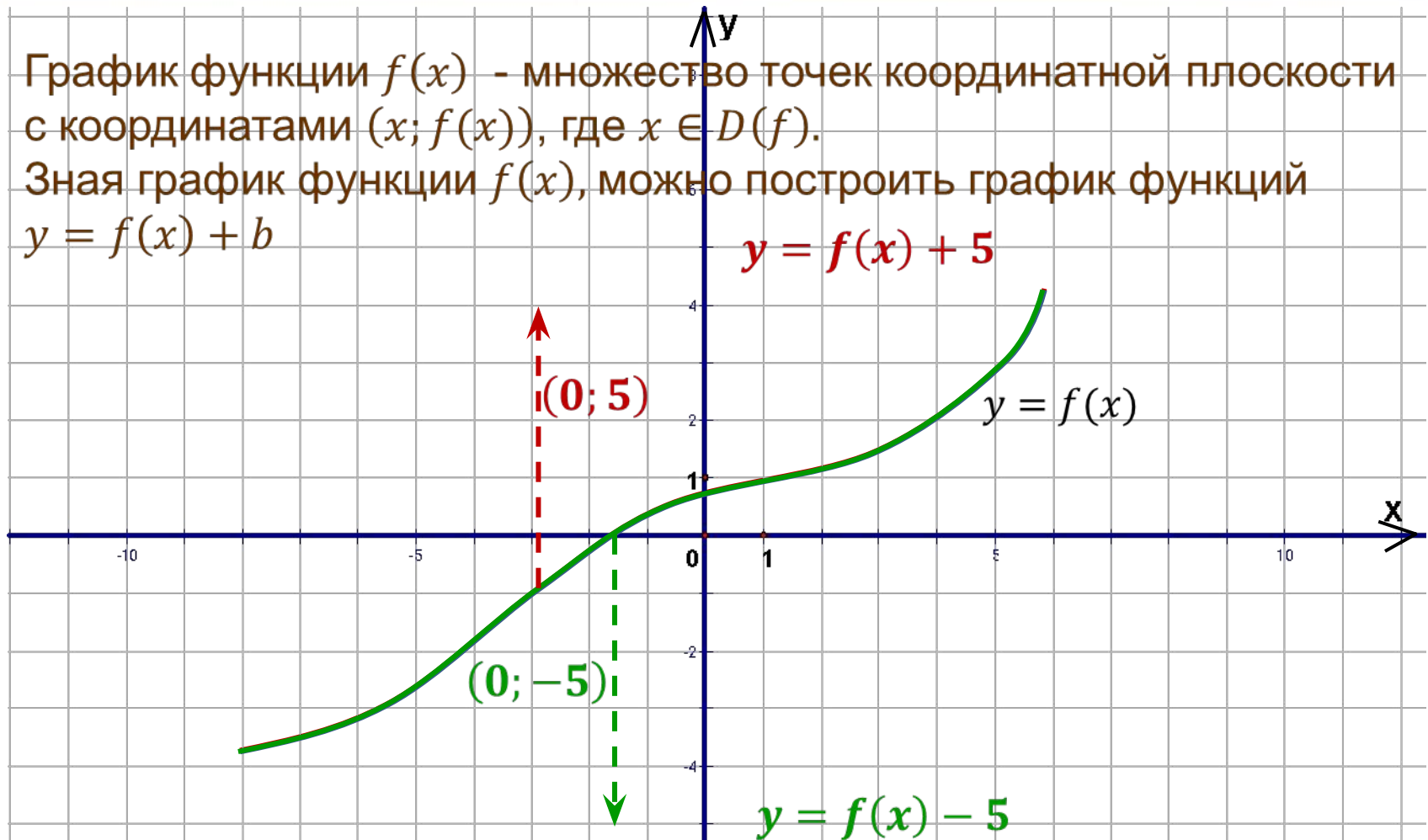
Ответ: при $m=1$ и $m=1,5625$



Преобразования графиков функций (1 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = f(x) + b$



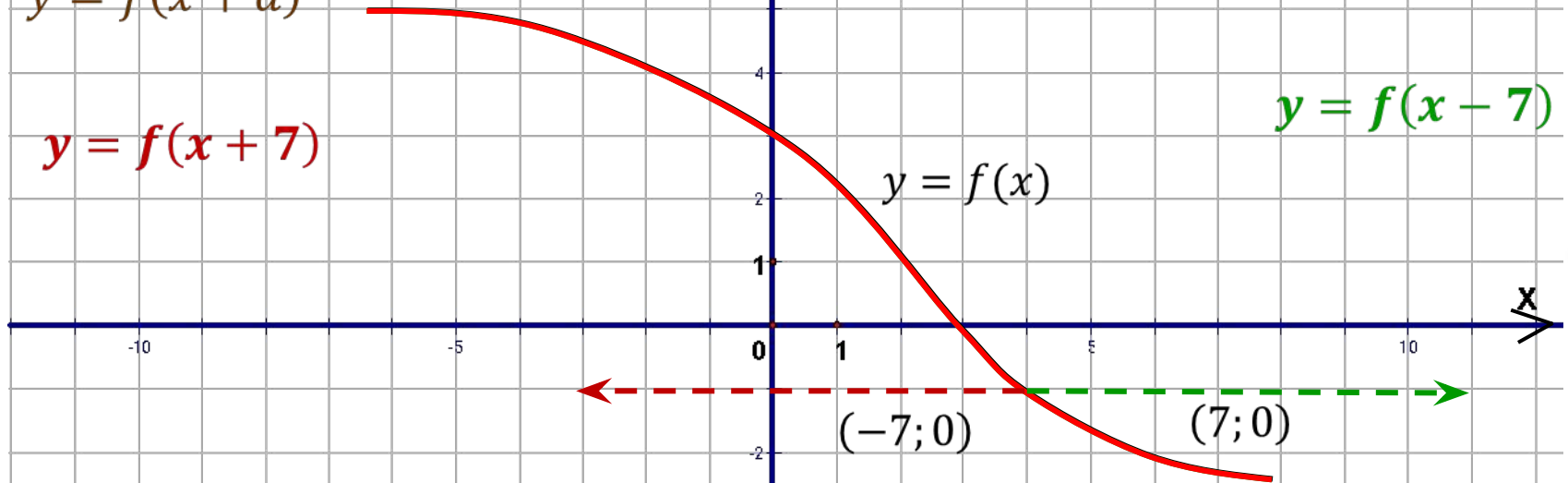
Преобразование графика $f(x)$: перенос графика $f(x)$ на вектор $(0; b)$ вдоль оси Oy



Преобразования графиков функций (2 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = f(x + a)$



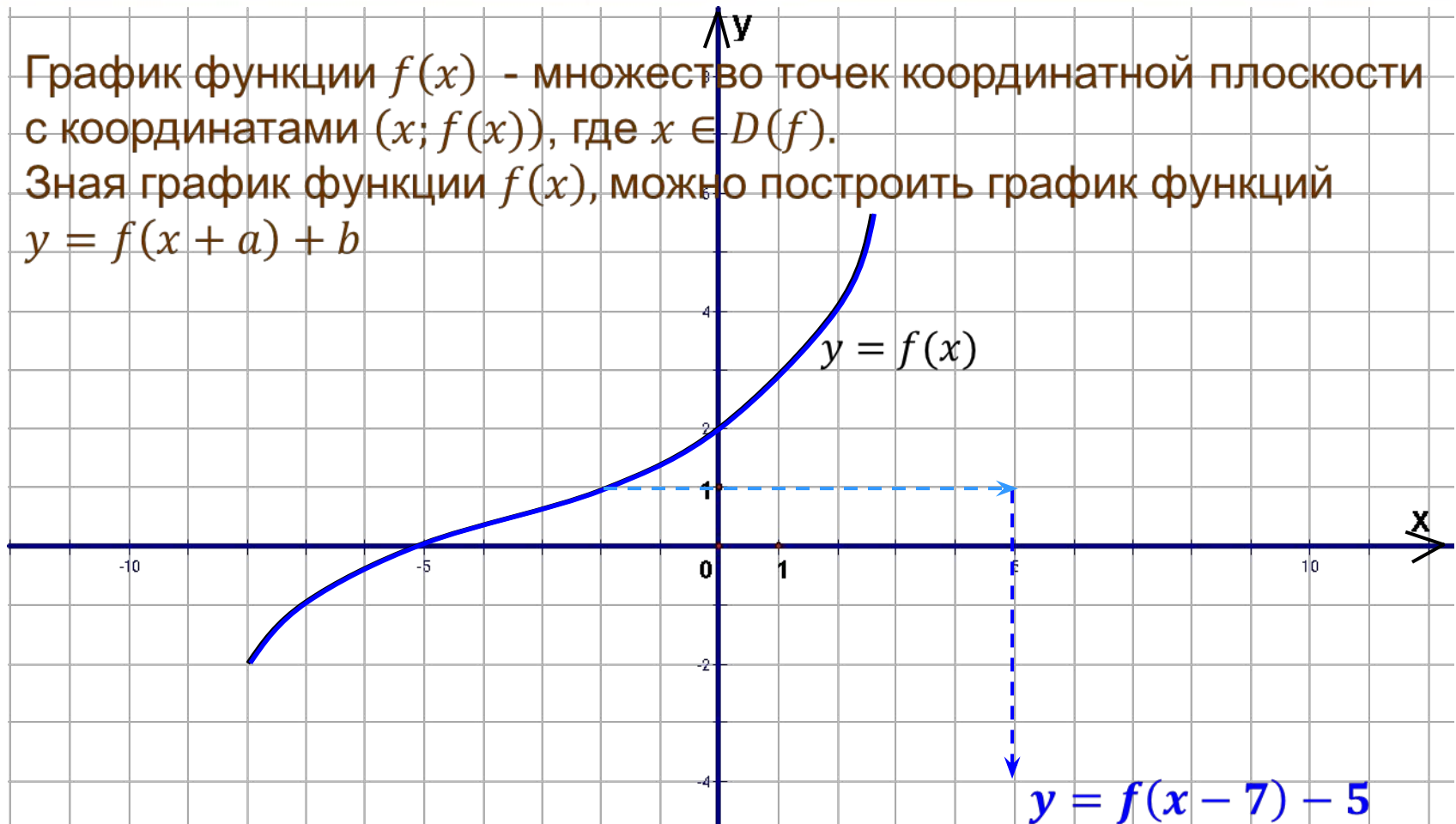
Преобразование графика $f(x)$: перенос графика $f(x)$ на вектор $(-a; 0)$ вдоль оси Ox



Преобразования графиков функций (3 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = f(x + a) + b$



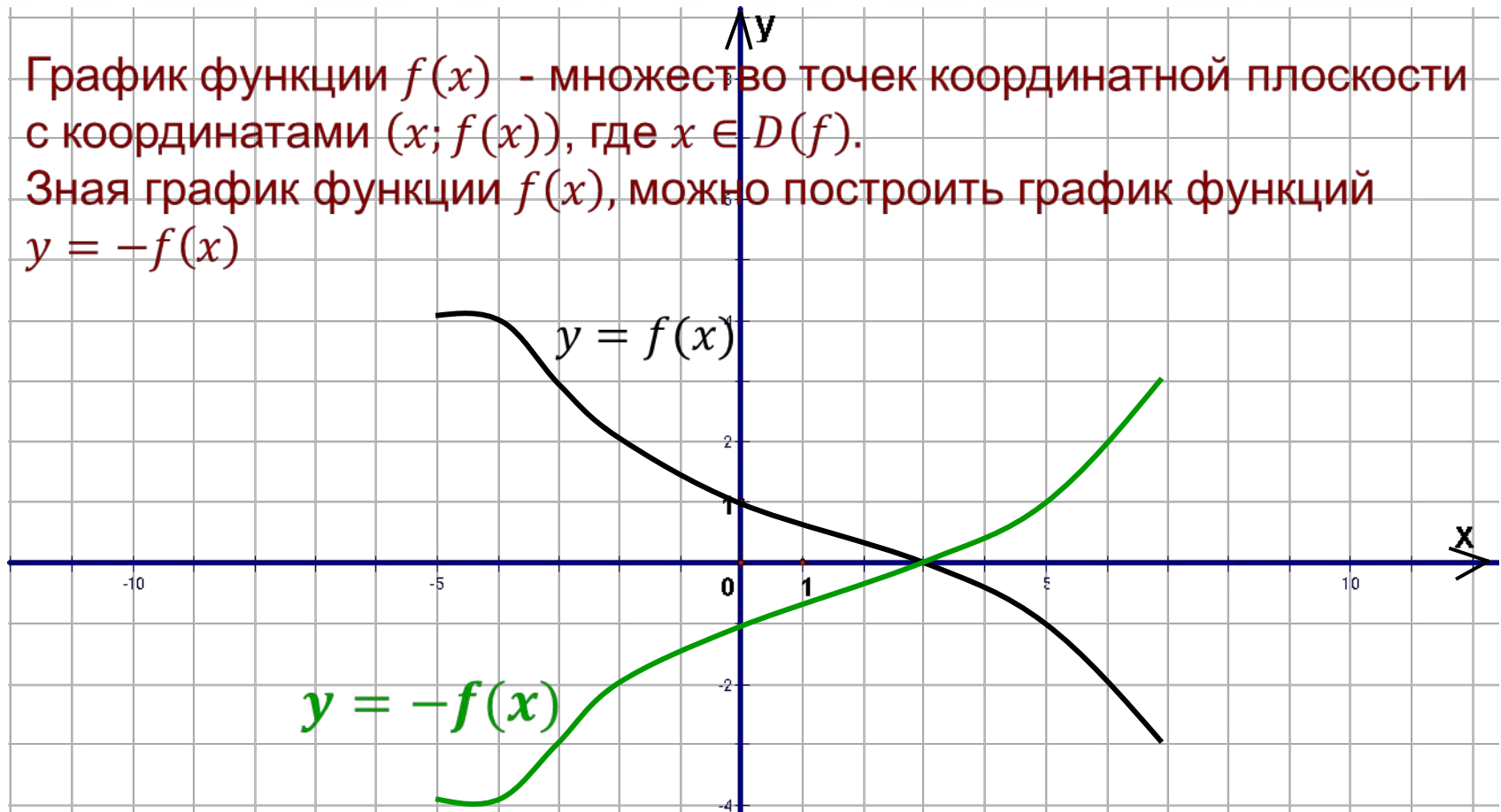
Преобразование графика $f(x)$: перенос графика $f(x)$ на вектор $(-a; b)$



Преобразования графиков функций (4 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = -f(x)$



Преобразование графика $f(x)$: симметричное отображение графика $f(x)$ относительно оси Ox



Преобразования графиков функций (5 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = a \cdot f(x)$, $0 < a < 1$



Преобразование графика $f(x)$: сжатие графика $f(x)$ в $\frac{1}{a}$

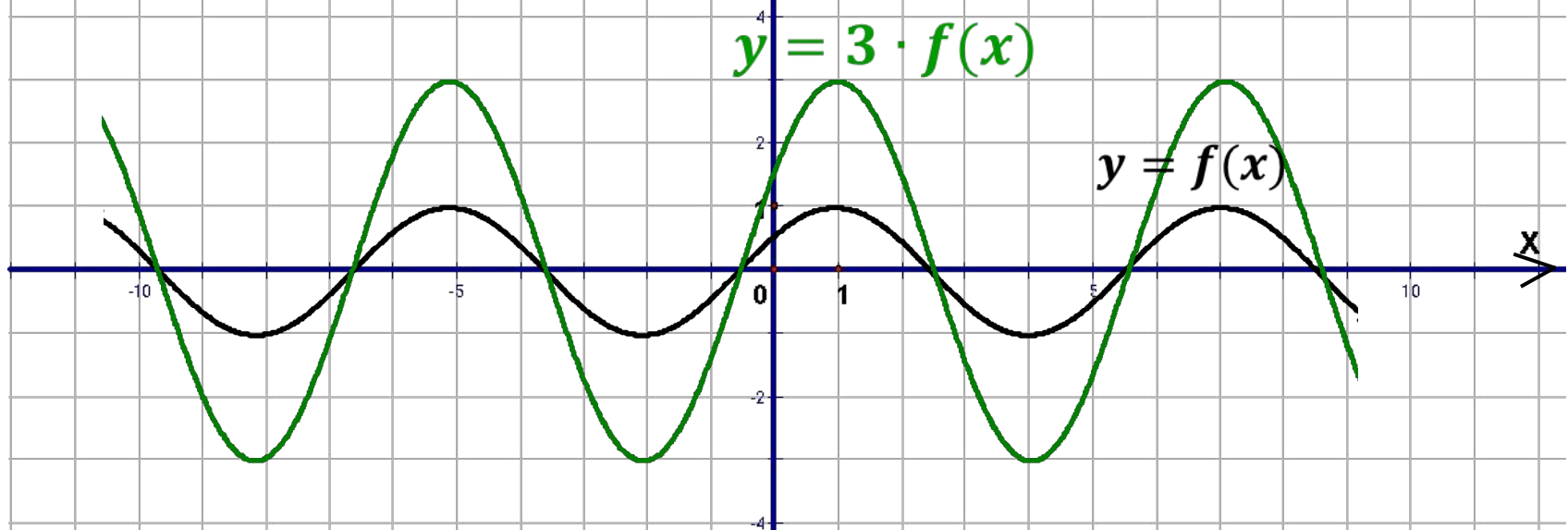
раз вдоль оси Oy



Преобразования графиков функций (6 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = a \cdot f(x), a > 1$



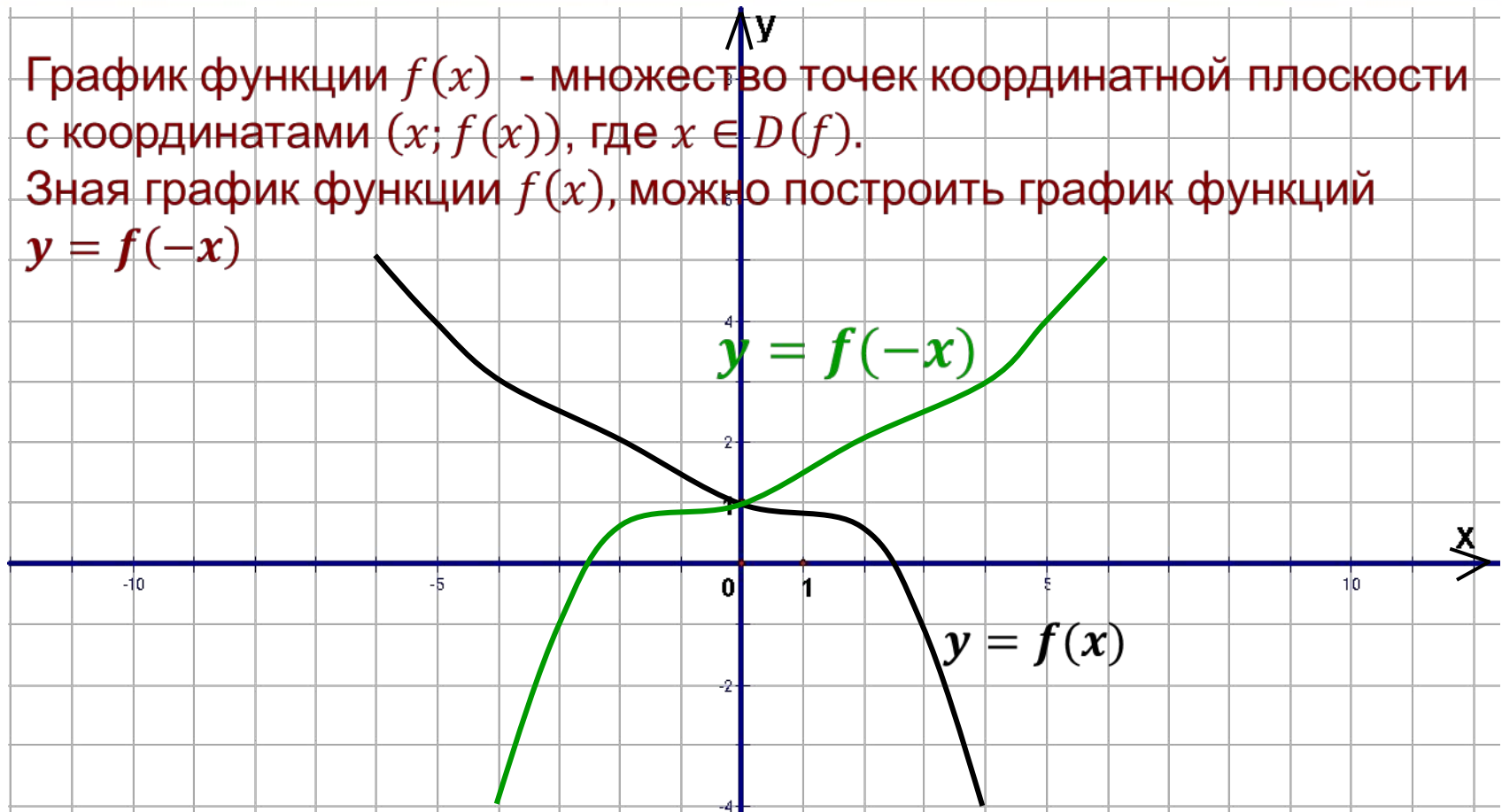
Преобразование графика $f(x)$: растяжение графика $f(x)$ в a раз вдоль оси Oy



Преобразования графиков функций (7 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = f(-x)$



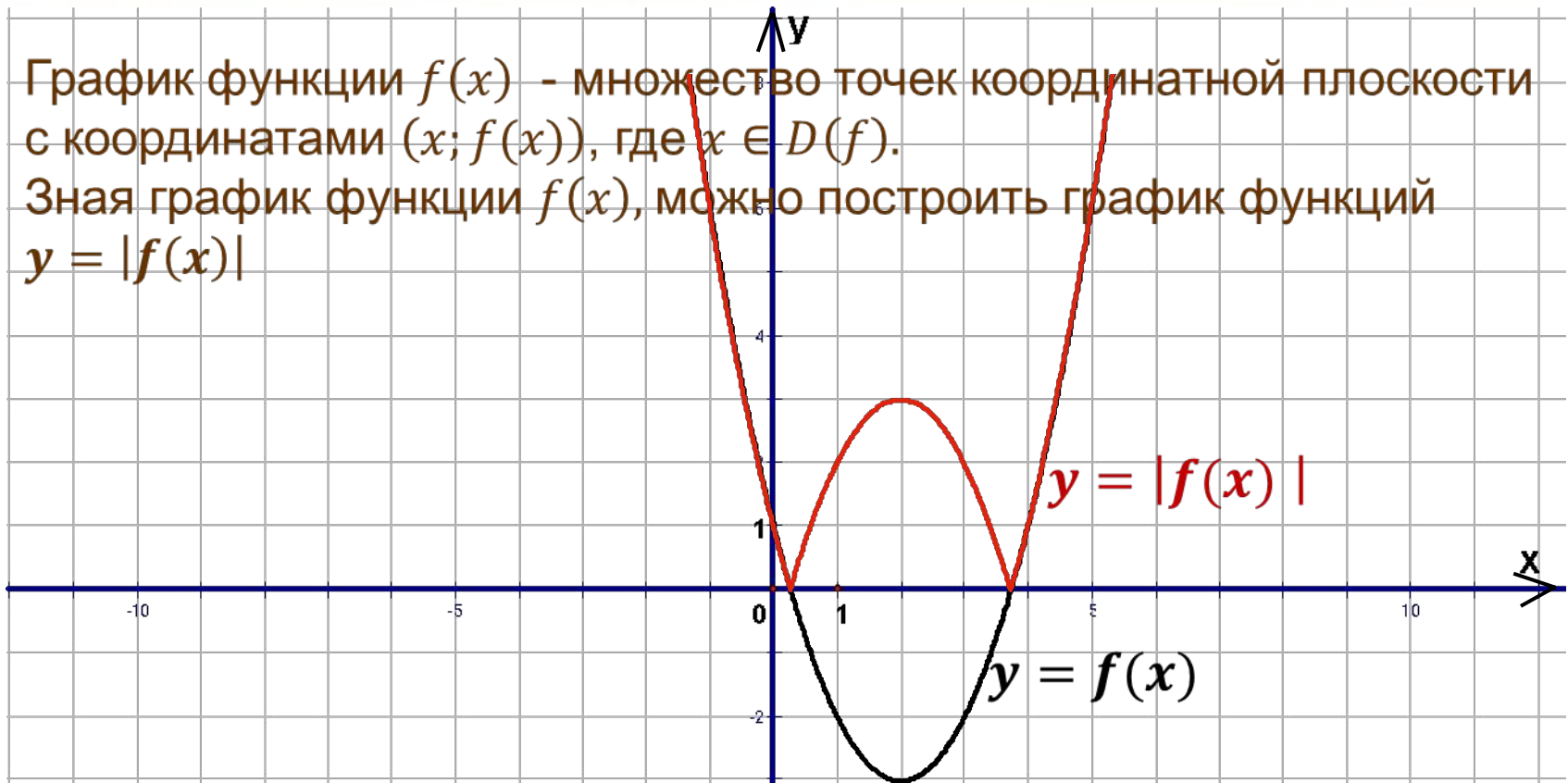
Преобразование графика $f(x)$: симметричное отображение графика $f(x)$ относительно оси Oy



Преобразования графиков функций (8 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = |f(x)|$



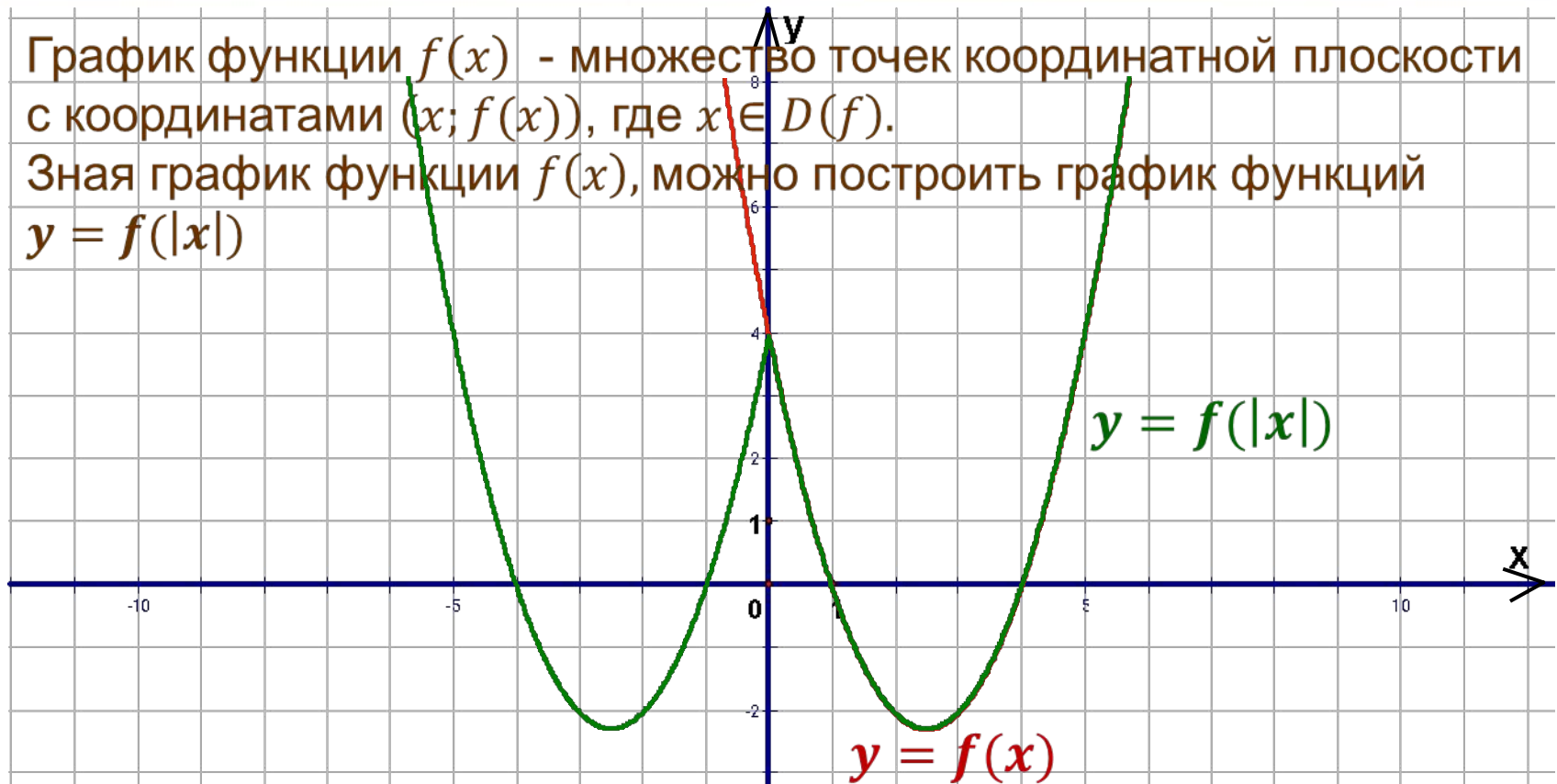
Преобразование графика $f(x)$: часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Oy



Преобразования графиков функций (9 из 9)

График функции $f(x)$ - множество точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Зная график функции $f(x)$, можно построить график функций $y = f(|x|)$



Преобразование графика $f(x)$: часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части графика в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy



Использованные источники

1. Математика. Весь школьный курс в таблицах/ авт.-сост. Т.С.Степанова – Мн.:Современная школа, 2006.
2. Алгебра в таблицах. 7 – 11 кл.: справочное пособие/ авт.-сост. Л.И.Звавич, А.Р.Рязановский. – 12-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008.
3. Тренировочные материалы к основному государственному экзамену по математике в 2016 году: Дидактические материалы/ сост.: А.А. Максютин, Ю.Н.Неценко. –Самара:, 2015.

Автор данного шаблона: Ермолаева Ирина
Алексеевна
учитель информатики и математики МОУ
«Павловская сош» с.Павловск
Алтайский край



Источники изображений



<http://psychology.careeredublogs.com/files/2010/02/school.jpg>



http://www.grafamania.net/uploads/posts/2008-08/1219611582_7.jpg



<http://88.198.21.149/images/photoframes/2010/6/02/17/55/g2IP8mW0czgigFNweb.jpg>

