



# 22.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Введем понятие производной ФКП.

Пусть независимой переменной

$$z = x + i \cdot y$$


дано приращение

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

Приращение функции  $w=f(x)$ :

$$\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$$






*Если существует предел отношения  $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  по любому закону, то этот предел называется производной функции  $f(z)$  в точке  $z$ :*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$$

**Обозначают:**  $f'(z)$ ,  $\omega'$ ,  $\frac{d\omega}{dz}$ ,  $\frac{df}{dz}$





Требование существования предела отношения  $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$

и его независимость от закона стремления к нулю приращения переменной, накладывает на функцию более сильные ограничения, чем в случае функции действительного переменного.

Для функции действительного аргумента предел существует при приближении точки  $x+\Delta x$  к точке  $x$  по двум направлениям (слева и справа).

Для функции комплексного переменного точка  $z+\Delta z$  должна приближаться к точке  $z$  по любому пути, и пределы по всем направлениям должны быть одинаковы.





Пусть

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$


$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x; y + \Delta y) - \\ &\quad - u(x, y) + i(v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)) = \\ &= \Delta u + i \cdot \Delta v \end{aligned}$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x; y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)$$




Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x + i \cdot \Delta y}$$

Если функция дифференцируема в точке  $z$ , то этот предел существует и не зависит от закона стремления  $\Delta z \rightarrow 0$

Если  $\Delta z = \Delta x$ , то есть точка  $z + \Delta z$  приближается к точке  $z$  по прямой, параллельной оси  $x$ , то

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$





Если  $\Delta z = i\Delta y$ , то есть точка  $z + \Delta z$  приближается к точке  $z$  по прямой, параллельной оси  $y$ , то

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{i \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{i \cdot \Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$


Так как

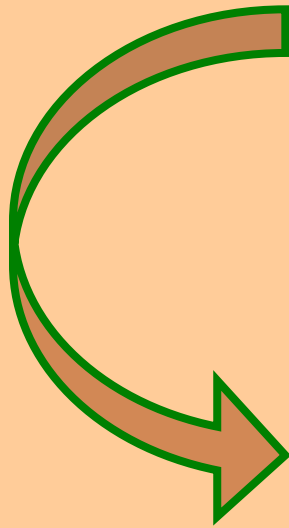
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$$

не должен зависеть от закона стремления  $\Delta z \rightarrow 0$

то




$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

*условия Коши-Римана*





Это необходимое условие дифференцируемости ФКП.  
Оно должно выполняться в любой точке, в которой  
функция  $f(z)$  дифференцируема.

*Если функция комплексного аргумента  
однозначна и дифференцируема не только  
в данной точке, но и в некоторой  
окрестности этой точки, то она  
называется аналитической в данной точке.*







*Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в данной области.*

*Точки плоскости  $z$ , в которых функция  $f(z)$  аналитична, называются правильными точками этой функции.*

*Точки плоскости  $z$ , в которых функция  $f(z)$  неаналитична, называются особыми точками.*





# ПРИМЕРЫ.

*Выяснить, являются ли данные функции аналитическими:*


1

$$\omega = z^2$$

2

$$\omega = e^z$$

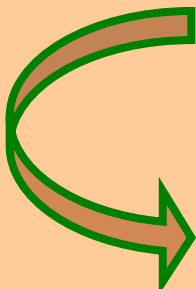
3

$$\omega = \bar{z}$$




1

$$\omega = z^2$$



$$u + i \cdot v = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2i \cdot x \cdot y$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2x \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.**





2

$$\omega = e^z$$


$$u + i \cdot v = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$


$$u = e^x \cdot \cos y$$

$$v = e^x \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.**





3

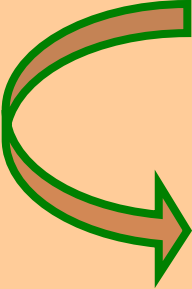
$$\omega = \bar{z}$$

$$u + i \cdot v = x - i \cdot y$$

$$u = x$$

$$v = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$



**Условия Коши-Римана не выполняются,  
следовательно функция не является аналитичной  
ни в одной точке плоскости.**

