22.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Введем понятие производной ФКП.

Пусть независимой переменной

$$z = x + i \cdot y$$

дано приращение

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

Приращение функции *w=f(x)*:

$$\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$ *при* $\Delta z \to 0$ *по любому закону, то этот предел называется производной функции f(z) в точке z:*

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}}$$

Обозначают: $f'(z), \quad \omega', \quad \dfrac{d\omega}{dz}, \quad \dfrac{df}{dz}$

Требование существования предела отношения $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$ и его независимость от закона стремления к нулю приращения переменной, накладывает на функцию более сильные ограничения, чем в случае функции действительного переменного.

Для функции действительного аргумента предел существует при приближении точки $x+\Delta x$ к точке x по двум направлениям (слева и справа).

Для функции комплексного переменного точка $z+\Delta z$ должна приближаться к точке z по любому пути, и пределы по всем направлениям должны быть одинаковы.

Пусть

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$$\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$$

тогда

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x; y + \Delta y) -$$

$$- u(x, y) + i\big(v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)\big) =$$

$$= \Delta u + i \cdot \Delta v$$

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x; y + \Delta y) - u(x, y)$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x; y + \Delta y) - v(x, y)$$

Тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\cdot\Delta v}{\Delta x+i\cdot\Delta y}$$

Если функция дифференцируема в точке z, то этот предел существует и не зависит от закона стремления $\Delta z\to 0$

Если *Δz* = *Δx*, то есть точка *z+Δz* приближается к точке z по прямой, параллельной оси x, то

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\cdot\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

Если $\Delta z = i\Delta y$, то есть точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной оси y, то

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{i \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta u}{i \cdot \Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Так как

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z}$$

не должен зависеть от закона стремления $\Delta z \to 0$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

условия Коши-Римана

Это необходимое условие дифференцируемости ФКП. Оно должно выполнятся в любой точке, в которой функция *f(z)* дифференцируема.

Если функция комплексного аргумента однозначна и дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется аналитической в данной точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в данной области.

Точки плоскости z, в которых функция f(z) аналитична, называются правильными точками этой функции.

Точки плоскости z, в которых функция f(z) неаналитична, называются особыми точками.

ПРИМЕРЫ.

Выяснить, являются ли данные функции аналитичными:

1. $\omega = z^2$
2. $\omega = e^z$
3. $\omega = \bar{z}$

1

$$\omega = z^2$$

$$u + i\cdot v = (x + i\cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2i\cdot x\cdot y$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2x\cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.

2

$$\omega = e^z$$

$$u + i\cdot v = e^{x+i\cdot y} = e^x\cdot(\cos y + i\cdot\sin y)$$

$$u = e^x\cdot\cos y$$

$$v = e^x\cdot\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cdot\cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\cdot\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются во всех точках плоскости, следовательно функция является аналитичной на всей плоскости.

3

$$\omega = \bar{z}$$

$$u + i \cdot v = x - i \cdot y$$

$$u = x$$

$$v = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Условия Коши-Римана не выполняются, следовательно функция не является аналитичной ни в одной точке плоскости.