

Тема 1.1. Роль и место математики  
в современном мире. Пределы.  
Свойства пределов.

Преподаватель: Баева Ольга  
Анатольевна

## План:

- 1. Роль и место математики в современном мире.
- 2. Последовательности.
- 3. Определение предела последовательности.
- 4. Определение предела функции. Основные свойства пределов
- 5. Числовая функция.
- 6. Монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность функции.

# 1. Роль и место математики в современном мире.

- Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках. Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением в глубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества.
- Математика умеет не только хорошо вычислять и тем самым позволять находить в нужных случаях требуемые цифровые данные, но предлагает весьма общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками.
- Математическая модель не редко задается в виде особого «языка», предназначенном для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVIII в. дифференциальные и интегральные исчисления. Важнейшим примером математического языка служит «язык цифр».

## 2. Последовательности.

**Опр. 1.** Функцию вида  $y = f(x)$ , называют *функцией натурального аргумента* или *числовой последовательностью* и обозначают  $y = f(n)$  или  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$

Иногда для обозначения последовательности используется запись  $(y_n)$ .

Последовательности можно задавать различными способами, например словесно, когда правило задания последовательности описано словами, без указания каких-то формул. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ....

Особенно важны аналитический и рекуррентный способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана аналитически, если указана формула ее  $n$ -го члена.

Приведем три примера.

• 1)  $y_n = n^2$ . Это аналитическое задание последовательности 1, 4, 9, 16, ...,  $n^2$ , ....

Указав конкретное значение  $n$ , нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером.

2)  $y_n = C$ . Здесь речь идет о последовательности  $C, C, C, \dots, C, \dots$

Такую последовательность называют постоянной (или стационарной).

3)  $y_n = 2^n$ . Это аналитическое задание последовательности  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить  $n$ -й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность  $(a_n)$ , заданная рекуррентно соотношениями  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a_n + d$  ( $a$  и  $d$  — заданные числа,  $d$  — разность арифметической прогрессии).

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность  $(b_n)$ , заданная рекуррентно соотношениями.

$b_1 = b$ ,  $b_{n+1} = b_n q$  ( $b$  и  $q$  — заданные числа,  $b \neq 0$ ,  $q \neq 0$ ,  $q$  — знаменатель геометрической прогрессии).

### *3. Определение предела последовательности.*

Рассмотрим две числовые последовательности  $(y_n)$  и  $(x_n)$ .

$$y(n): 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots;$$

$$x(n): 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n, \dots$$

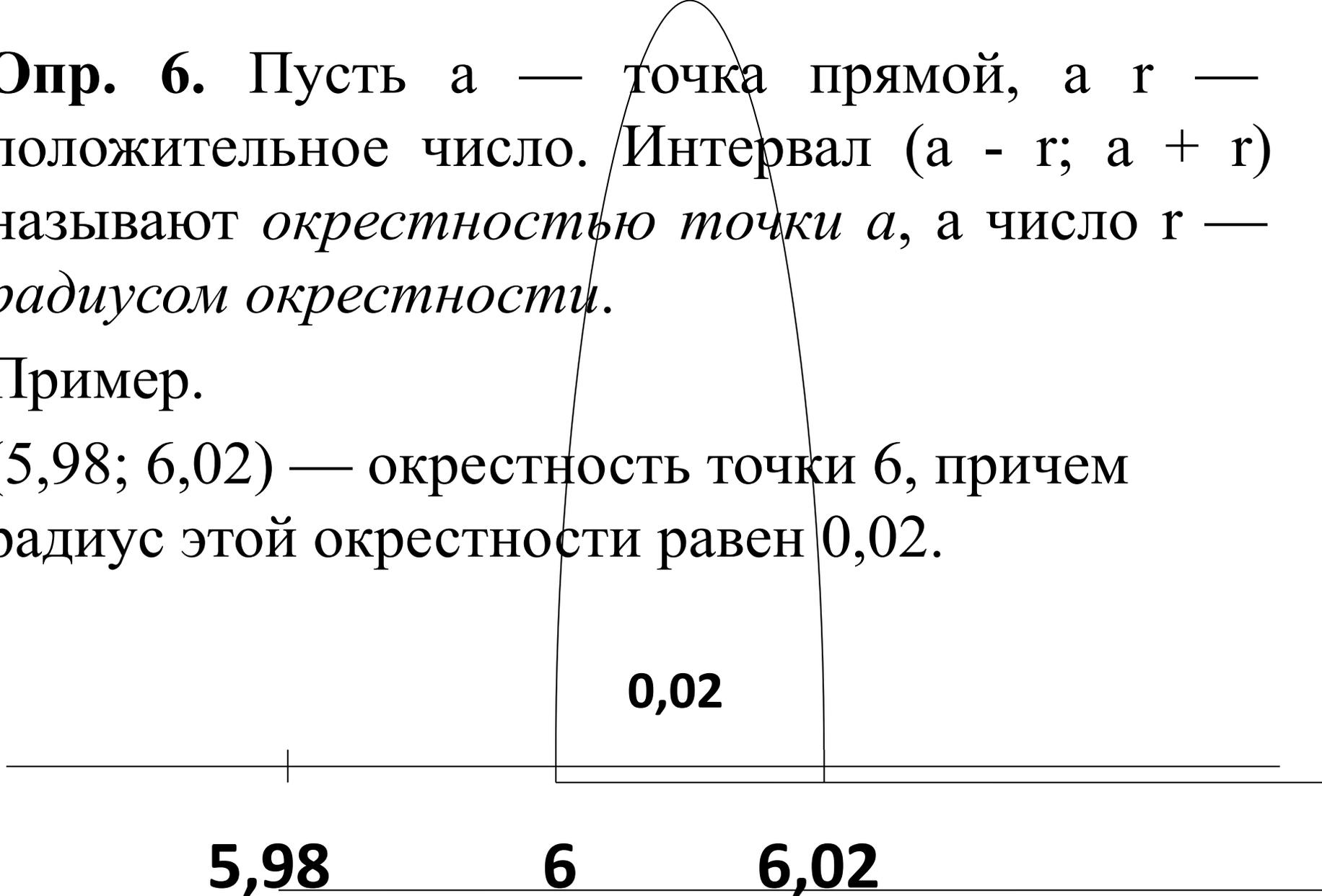
Изобразив члены этих последовательностей точками на координатной прямой.

Замечаем, что члены последовательности  $(x_n)$  как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности  $(y_n)$  такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность  $(x_n)$  сходится, а последовательность  $(y_n)$  расходится.

**Опр. 6.** Пусть  $a$  — точка прямой, а  $r$  — положительное число. Интервал  $(a - r; a + r)$  называют *окрестностью точки  $a$* , а число  $r$  — *радиусом окрестности*.

Пример.

$(5,98; 6,02)$  — окрестность точки  $6$ , причем радиус этой окрестности равен  $0,02$ .



**Опр. 7.** Число  $b$  называют *пределом* последовательности  $(y_n)$ , если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

И обозначают:  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

## 4. Определение предела функции. Основные свойства пределов

**Опр. функция – это зависимость одной переменной от другой**

**Опр. 8.** Число  $b$  называют *пределом функции  $f(x)$* , если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены функции, начиная с некоторого номера.

И обозначают: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

# Вычисление пределов функции.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^x = 0, \text{ если}$$

$$|q| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C = C$$

# Свойства пределов функции.

Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$   $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b + c;$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b \cdot c;$$

# Свойства пределов функции.

3. предел частного равен частному от пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{b}{c}; c \neq 0$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \cdot b$$

Пример. Найти пределы функции.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + 3 &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \\ &= 2 \cdot 0 - 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

- **Опр. 9.** Функцию  $y = f(x)$  называют ***непрерывной*** в точке  $x = a$ , если выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Пример. Найти пределы функции.

**1.**  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) =$

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

**2.**  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5$$

## 5. Числовая функция.

Пусть  $X$  и  $Y$  – некоторые числовые множества  $X \subseteq \mathbb{R}$ ;  $Y \subseteq \mathbb{R}$ .

Если каждому  $x \in X$  по некоторому правилу  $F$  ставится в соответствие единственный элемент  $y \in Y$ , то говорят, что *Задана функция*. Обозначается  $y = f(x)$ ,

где  $X$  – аргумент или независимая переменная функции;  $Y$  – значение функции или зависимая переменная.

Множество  $X$  значений независимой переменной называется *Областью определения функции* и обозначается  $D(y)$  или  $D(f)$ .

Множество всех значений зависимой переменной  $Y$  называется *Множеством значений функции* и обозначается  $E(y)$  или  $E(f)$ .

Частное значение функции  $y = f(x)$  при заданном частном значении аргумента  $x = x_0$  ( $x_0 \in D(y)$ ) обозначается  $f(x_0)$ .

В случае задания функции формулой  $y = f(x)$  ее область определения  $D(y)$  – это ОДЗ выражения  $f(x)$ .

*Графиком функции*  $y = f(x)$  называется множество всех точек плоскости с координатами  $(x; y)$ , где  $x \in D(y)$ ,  $y = f(x)$ .

## 6. Монотонность, четность, нечетность, периодичность функции, нули функции.

Свойства функции:

### 1. Четность и нечетность функции.

Функция  $y = f(x)$  называется **Четной**, если:

- 1)  $D(y)$  – симметричное множество относительно  $x = 0$ ;
- 2) для любого  $x \in D(y)$  выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ .

Функция  $y = f(x)$  называется **Нечетной**, если:

- 1)  $D(y)$  – симметричное множество относительно  $x = 0$ ;
- 2) для любого  $x \in D(y)$  выполняется равенство  $f(-x) = -f(x)$ .

Если функция  $f(x)$  является четной или нечетной, то говорят, что **Она обладает свойством четности**.

График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ ,  
график нечетной – относительно начала координат.

## 2. Периодичность функции.

Функция  $y = f(x)$  с областью определения  $D(y)$  называется Периодической, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для любого значения  $x \in D(y)$  выполняются условия:

- 1)  $x \pm T \in D(y)$ ;
- 2)  $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$ .

Число  $T$  называется Периодом функции.

## 3. Монотонность функции.

Пусть  $x_1, x_2$  – произвольные значения из области  $D(y)$  функции  $f(x)$  такие, что  $x_1 < x_2$ .

Если при данном условии выполняется:

$f_1(x) < f_2(x)$ , то функция называется **Возрастающей**;

$f_1(x) > f_2(x)$  – **Убывающей**;

$f_1(x) \leq f_2(x)$  – **Неубывающей**;

$f_1(x) \geq f_2(x)$  – **Невозрастающей**.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются **Монотонными** функциями (возрастающие и убывающие – строго монотонными).

Функция  $y = f(x)$  называется **Кусочно-монотонной** на множестве  $X$ , если данное множество можно разделить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция монотонна.

### 5. Промежутки знакопостоянства функции.

#### **Нули функции.**

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е.  $f(x) > 0$  или  $f(x) < 0$ ), называются **Промежутками** знакопостоянства.

Значения аргумента  $x \in D(y)$ , при которых функция  $f(x) = 0$ , называются **Нулями функции**. Нули функции – это точки пересечения графика функции с осью  $Ox$ .

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

1. Область определения функции  $x \neq 0$ ,  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Нули функции.

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

График функции пересекает ось  $Ox$  в найденных точках.

3. Промежутки знакопостоянства:

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ \hline & - & \circ & - \\ & - & & - \\ -1 & 0 & 1 & \end{array}$$

Получили, что на  $(-\infty; -1) \cup [0; 1]$  - убывает, на  $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$  - возрастает.

4. Четность, нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x)$$

Функция нечетная, график функции симметричен относительно начала координат.

График:

