Тема 1.1. Роль и место математики в современном мире. Пределы. Свойства пределов.

Преподаватель: Баева Ольга Анатольевна

План:

- 1. Роль и место математики в современном мире.
- 2. Последовательности.
- 3. Определение предела последовательности.
- 4. Определение предела функции. Основные свойства пределов
- 5. Числовая функция.
- 6. Монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность функции.

1. Роль и место математики в современном мире.

- Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках. Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением в глубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества.
- Математика умеет не только хорошо вычислять и тем самым позволять находить в нужных случаях требуемые цифровые данные, но предлагает весьма общие и достаточно четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками.
- Математическая модель не редко задается в виде особого «языка», предназначенном для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVIII в. дифференциальные и интегральные исчисления. Важнейшим примером математического языка служит «язык цифр».

2. Последовательности.

Опр. 1. Функцию вида $y = f(x)$, называют *функцией натурального аргумента или числовой последовательностью* и обозначают $y = f(n)$ или y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...

Иногда для обозначения последовательности используется запись (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например словесно, когда правило задания последовательности описано словами, без указания каких-то формул. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Особенно важны аналитический и рекуррентный способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана аналитически, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

- 1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером.

2) $y_п = C$. Здесь речь идет о последовательности C,C,C,…,C,…
Такую последовательность называют постоянной (или стационарной).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности

$2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$.

Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.
Например, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями

$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d$ (a и d — заданные числа, d — разность арифметической прогрессии).

Геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (bn), заданная рекуррентно соотношениями.

$b_1=b, b_{n+1} = b_n q$ (b и q — заданные числа, $b \neq 0$, $q \neq 0$, q — знаменатель геометрической прогрессии).

3. Определение предела последовательности.

Рассмотрим две числовые последовательности (yn) и (xn).

y(n): 1,3,5,7,9,…,2n-1,…;

x(n): 1,1/2,1/3,1/4,1/5,…,1/n… .

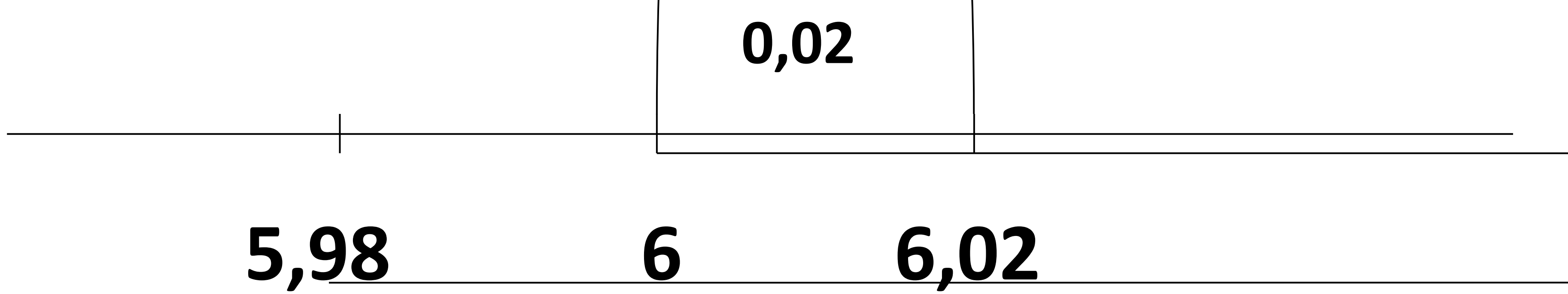
Изобразив члены этих последовательностей точками на координатной прямой.

Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится.

Опр. 6. Пусть a — точка прямой, a r — положительное число. Интервал (a - r; a + r) называют *окрестностью точки a*, а число r — *радиусом окрестности*.

Пример.

(5,98; 6,02) — окрестность точки 6, причем радиус этой окрестности равен 0,02.



Опр. 7. Число b называют *пределом последовательности* (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

И обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

4. Определение предела функции. Основные свойства пределов

Опр. функция – это зависимость одной переменной от другой

Опр. 8. Число b называют ***пределом функции f(x),*** если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены функции, начиная с некоторого номера.

И обозначают: $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Вычисление пределов функции.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}q^{x}=0$$, если $|q|\langle 1$

$$\lim_{x\to\infty}C=C$$

Свойства пределов функции.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = c$, *то*

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) = b + c;$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to\infty} g(x) = b\cdot c;$$

Свойства пределов функции.

3. предел частного равен частному от пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}=\frac{b}{c};c\neq 0$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to\infty}k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to\infty}f(x)=k\cdot b$$

Пример. Найти пределы функции.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+3=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}3$$

$$=2\cdot 0-0+3=3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

- **Опр. 9**. Функцию y = f(x) называют ***непрерывной*** в точке x = a, если выполняется соотношение

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Пример. Найти пределы функции.

1. $$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) =$$

$$1^3 - 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 3 = 7$$

2. $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{4x+12}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} =$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1{,}5$$

5. Числовая функция.

Пусть X и Y Некоторые числовые множества $X \subseteq \mathbb{R};\ Y \subseteq \mathbb{R}.$

Если каждому $x \in X$ по некоторому правилу F ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y,$ то говорят, что ***Задана функция***. Обозначается $y = f(x),$

Где X – аргумент или независимая переменная функции; $У$ – значение функции или зависимая переменная.

Множество X значений независимой переменной называется ***Областью определения функции*** и обозначается $D(y)$ или $D(f)$

Множество всех значений зависимой переменной Y называется ***Множеством значений функции*** и обозначается $E(y)$ или $E(f)$

Частное значение функции $y = f(x)$ при заданном частном значении аргумента $x = x_0\ \ (x_0 \in D(y))$ обозначается $f(x_0)$

В случае задания функции формулой $y = f(x)$ ее область определения $D(y)$ – это ОДЗ выражения $f(x).$

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; y),$ где $x \in D(y),\ y = f(x).$

6. Монотонность, четность, нечетность, периодичность функции, нули функции.

Свойства функции:

1. ***Четность и нечетность функции.***

Функция $y = f(x)$ называется ***Четной***, если:

1) $D(y)$ – симметричное множество относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Функция $y = f(x)$ называется ***Нечетной***, если:

1) $D(y)$ – симметричное множество относительно $x = 0$;

2) для любого $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция $f(x)$ является четной или нечетной, то говорят, что ***Она обладает свойством четности***.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной – относительно начала координат.

2. ***Периодичность функции.***

Функция $y = f(x)$ с областью определения $D(y)$ называется ***Периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения $x \in D(y)$ выполняются условия:

1) $x \pm T \in D(y)$;

2) $f(x-T) = f(x+T) = f(x)$.

Число T называется ***Периодом функции***.

3. ***Монотонность функции.***

Пусть $X1$, $X2$ – произвольные значения из области $D(y)$ функции $f(x)$ такие, что $x_1 < x_2$.

Если при данном условии выполняется:

$f_1(x) < f_2(x)$, то функция называется ***Возрастающей***;

$f_1(x) > f_2(x)$ – ***Убывающей***;

$f_1(x) \leq f_2(x)$ – ***Неубывающей***;

$f_1(x) \geq f_2(x)$ – ***Невозрастающей***.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются ***Монотонными*** функциями (возрастающие и убывающие – строго монотонными).

Функция $y = f(x)$ называется ***Кусочно-монотонной*** на множестве *X*, если данное множество можно разделить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция монотонна.

5. Промежутки знакопостоянства функции. Нули функции.

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$), называются ***Промежутками знакопостоянства***.

Значения аргумента $x \in D(y)$, при которых функция $f(x) = 0$, называются ***Нулями функции***. Нули функции – это точки пересечения графика функции с осью *Ox*.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

1.Область определения функции $x \neq 0$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2.Нули функции.

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 \qquad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

График функции пересекает ось Ox в найденных точках.

3.Промежутки знакопостоянства:

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & \bullet & & \circ & & \bullet & \\ & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

Получили, что на $(-\infty; -1] \cup [0, 1]$ - убывает, на $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$ - возрастает.

4. Четность, нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x)$$

Функция нечетная, график функции симметричен относительно начала координат.

График: