

Глава 3

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Основы теории пределов



§ 1 Числовая последовательность и ее предел

Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента.

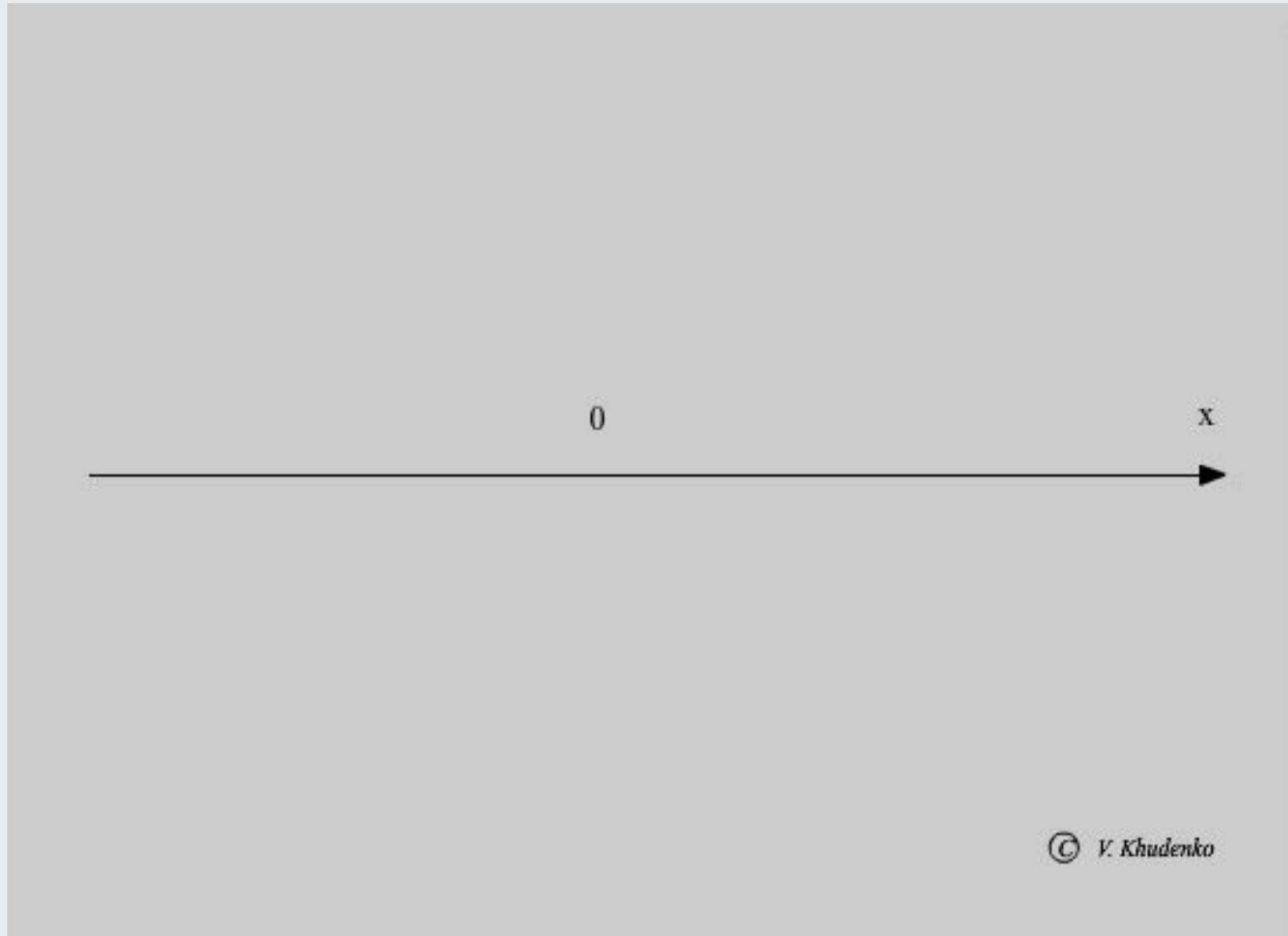
Обозначение: $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$

Число $x(n)$ называется *общим членом последовательности*, а формула $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена последовательности*.

Ограниченные и монотонные последовательности

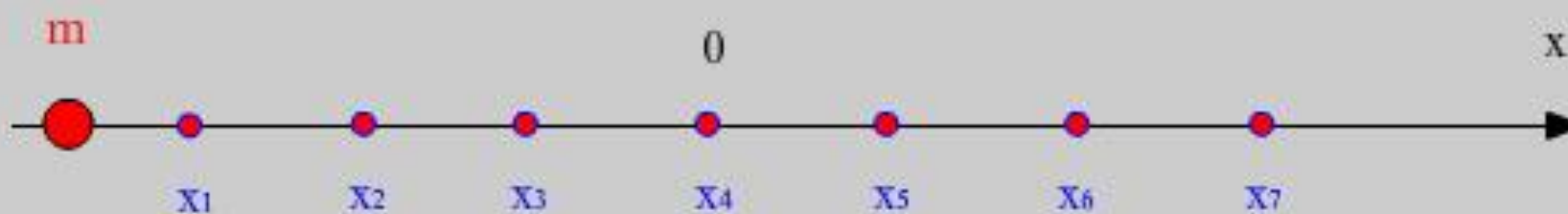


ограничена снизу на \mathbb{N} $\exists m \in \mathbb{R} : x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$



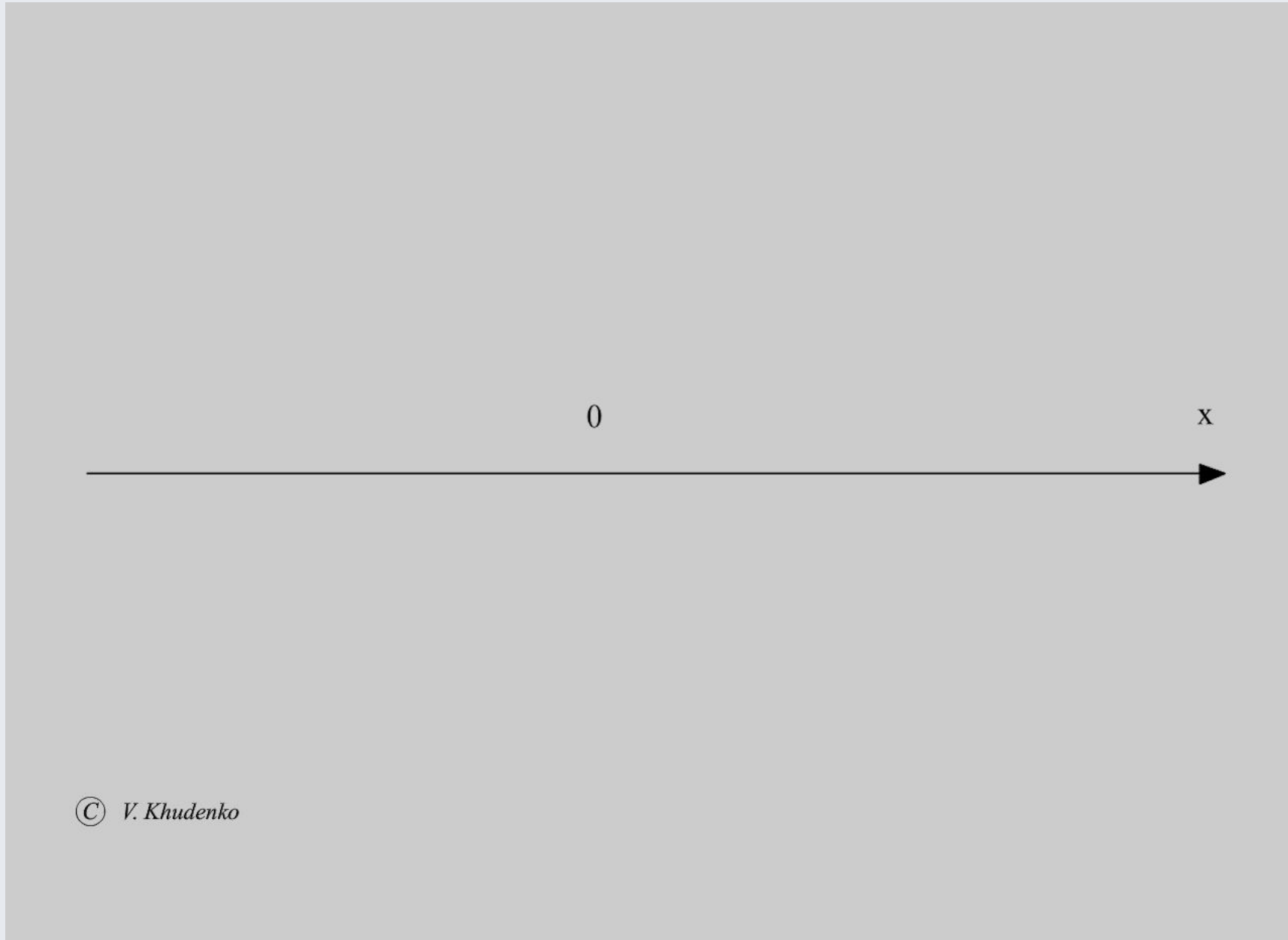
Ограниченная снизу последовательность

$$\exists m \in R: x_n \geq m, \forall n \in N$$



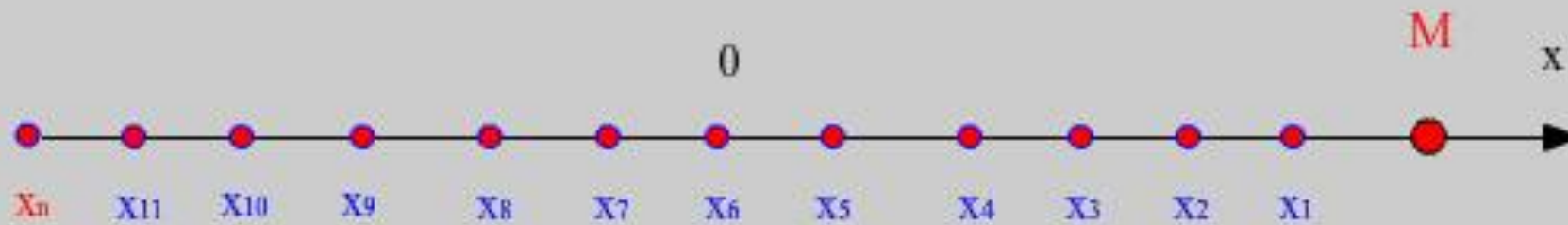
ограничена сверху на \mathbf{N}

$$\exists M \in \mathbf{R} : x_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}$$



Ограниченная сверху последовательность

$$\exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

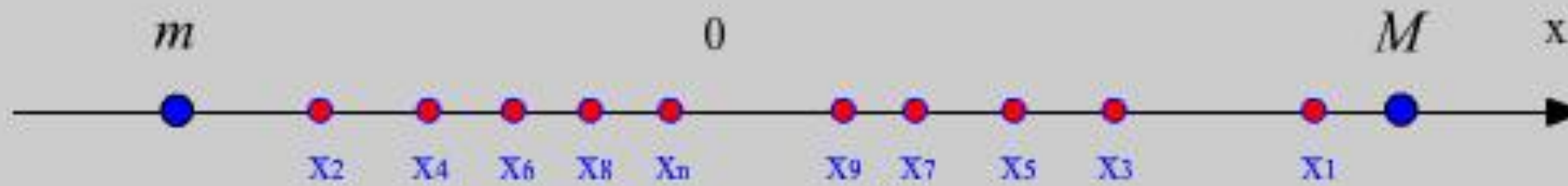


ограничена на \mathbf{N} $\exists M, m \in R: m \leq x_n \leq M, \forall n \in N$



Ограниченная последовательность

$$\exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

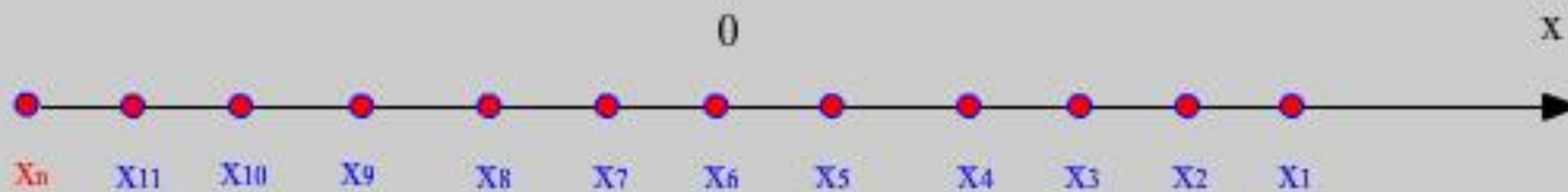


убывает на N $\forall n_1, n_2 \in N : n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}$

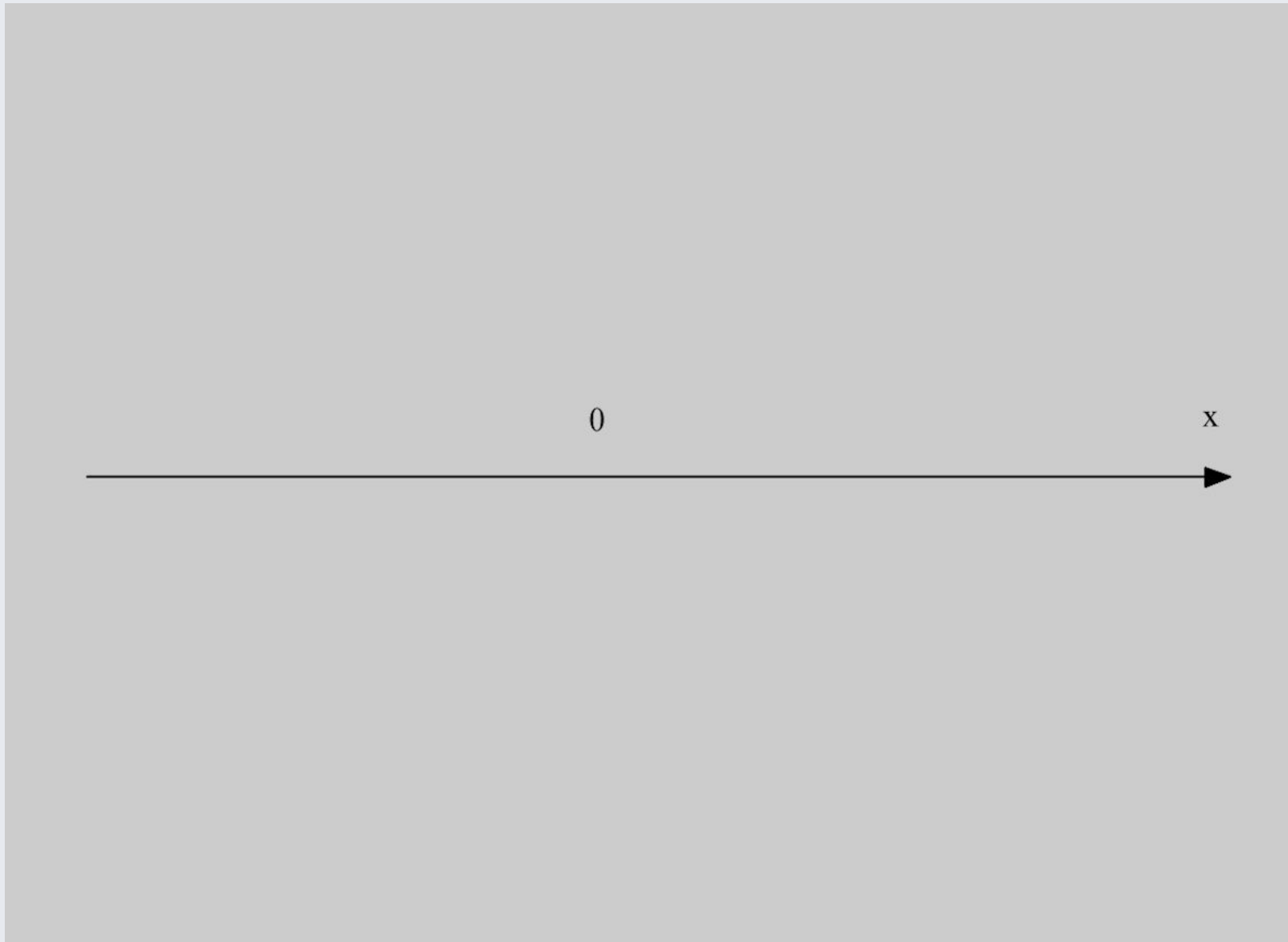


Убывающая последовательность

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}: n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}$$

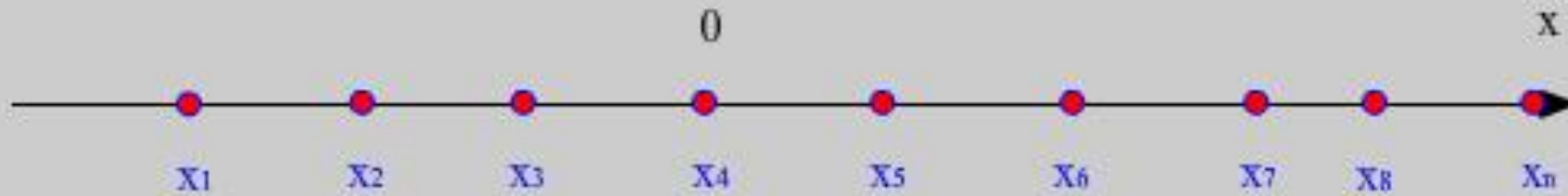


- (x_n) - *возрастает* на N



Возрастающая последовательность

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}: n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}$$



Предел числовой последовательности



Убывающие и возрастающие
последовательности называются
монотонными

Предел числовой последовательности

Понятие предела является одним из
фундаментальных в математике. На этом
понятии, как на фундаменте строится
здание математического анализа.

Число a называется *пределом числовой последовательности*, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$

В этом случае говорят, что последовательность имеет предел и пишут

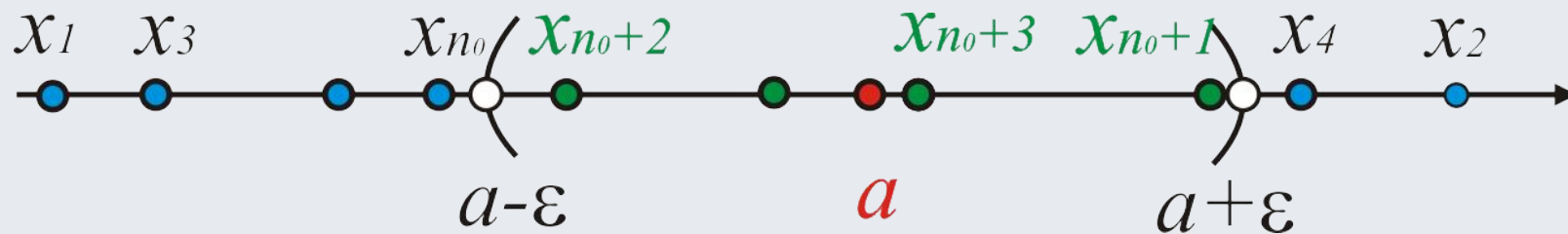
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Последовательность, имеющую предел называют *сходящейся*.

Эквивалентное определение

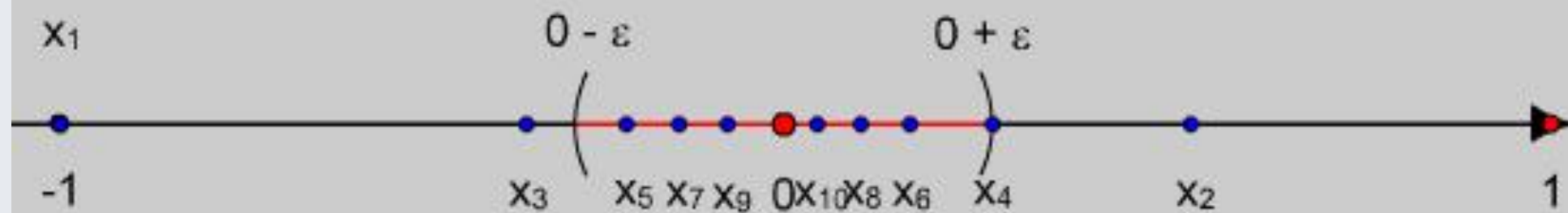
Число a называется *пределом числовой последовательности*, если в любой сколь угодно малой ε -окрестности числа a содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого числа n_0





Пример $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$

$n = 10$



Выбираем $\varepsilon = 0,25$

Свойства пределов последовательностей

Теорема 1. Если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: |x_n| \leq M$$

Пусть (x_n) - сходящаяся последовательность.

По определению предела последовательности

$\forall \varepsilon > 0$ существует натуральное число n_0

что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство

Тогда для $|x_n - a| < \varepsilon$ имеет место $\forall \varepsilon > 0$

неравенство: $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$

Т.е. $|x_n| < |a| + \varepsilon$

Пусть $M = \max\{|a| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|\}$

Тогда $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, что и означает ограниченность
числовой последовательности

Это только необходимый признак, например
последовательность

ограниченная, но не сходящаяся $\{(-1)^n\}$ $\{1, -1, 1, \dots\}$

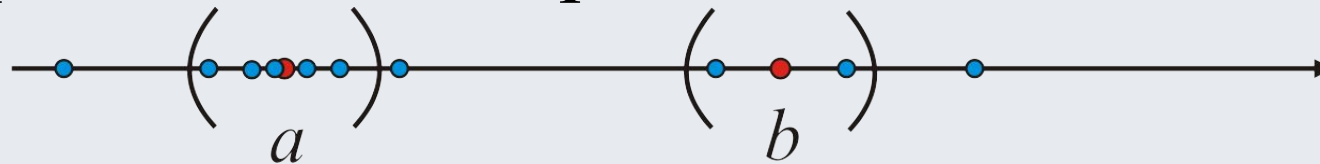
Теорема 1.2. Если последовательность имеет
предел, то только один.

Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad a \neq b$$

Пусть для определенности $a < b$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$

Рассмотрим ε окрестности точек a и b . По выбору произвольного числа ε эти окрестности не пересекаются



Из того факта, что точка a является пределом последовательности следует, что все члены последовательности (за исключением конечного их числа) содержатся в ε окрестности этой точки.

Так как окрестности не пересекаются, то в ε окрестности точки b содержатся только конечное число членов последовательности.

Получаем противоречие с предположением, что

Данное $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ противоречие доказывает теорему.

Если встречается такая неограниченная последовательность, что с возрастанием n члены последовательности неограниченно возрастают, то такие последовательности называются *бесконечно большими*





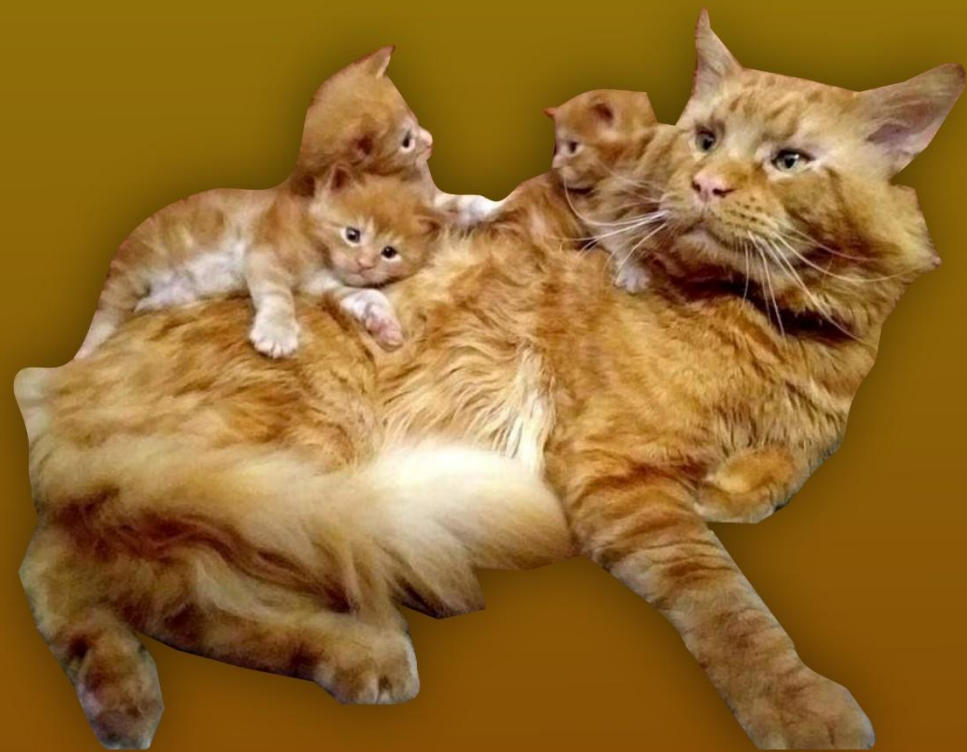
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies |x_n| > M$$



Числовую последовательность называют *бесконечно малой* если ее предел равен нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$$

**Бесконечно малые и
бесконечно большие**



Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Терема 1.3. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ выполняется } \forall n > n_0 \quad (*) \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_{(**)} \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Обозначим $n^* = \max\{n_1, n_2\}$ (возьмем $n > n^*$)

тогда неравенства (*) и (**) будут выполняться *одновременно*.

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Мы получили, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует натуральное число n^* , что для всех $n > n^*$

Выполняется неравенство $|x_n + y_n| < \varepsilon$,
следовательно, последовательность $\{x_n + y_n\}$
является бесконечно малой.

Теорема 1.4. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой.

Пусть
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (1.3)$$

и $\forall n \in \mathbb{N} \quad M \geq |y_n| < M,$

По определению предела последовательности

для $n > n_0$
$$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Следствие. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 1.5. Равносильны следующие два утверждения:

- 1) Обратная к бесконечно малой последовательности является бесконечно большой последовательностью;
- 2) Обратная к бесконечно большой последовательности является бесконечно малой последовательностью

1). Пусть , тогда $\forall \frac{1}{M} > 0 \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 |x_n| < \frac{1}{M}$

По свойствам числовых неравенств получаем,

что для $\forall n > n_0$ $\left| \frac{1}{x_n} \right| = \frac{1}{|x_n|} > M$

т.е последовательность $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности.

2) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ следовательно,

$\forall M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

по свойствам числовых неравенств

$\forall n > n_0 \quad \left| \frac{1}{y_n} \right| = \frac{1}{|y_n|} < \varepsilon$ бесконечно малая $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}$

Предел и неравенства

Теорема 1.5. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{причем} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad a < b$$

тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0 : x_n < y_n$$

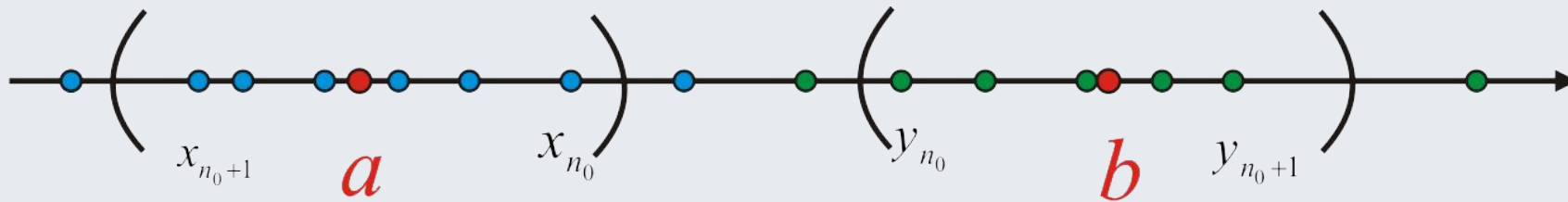
Выберем $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ тогда ε окрестности точек a и b не будут пересекаться.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 : |y_n - b| < \varepsilon,$$

Обозначим, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ (начиная с номера n_0 будут выполняться неравенства

$$x_{n_0} < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_{n_0}$$



Замечание: *Строгое неравенство в пределе может в пределе перейти в нестрогое неравенство.*

для последовательности $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ $\frac{1}{n^2} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$