Глава 3
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Основы теории пределов

§ 1 Числовая последовательность и ее предел

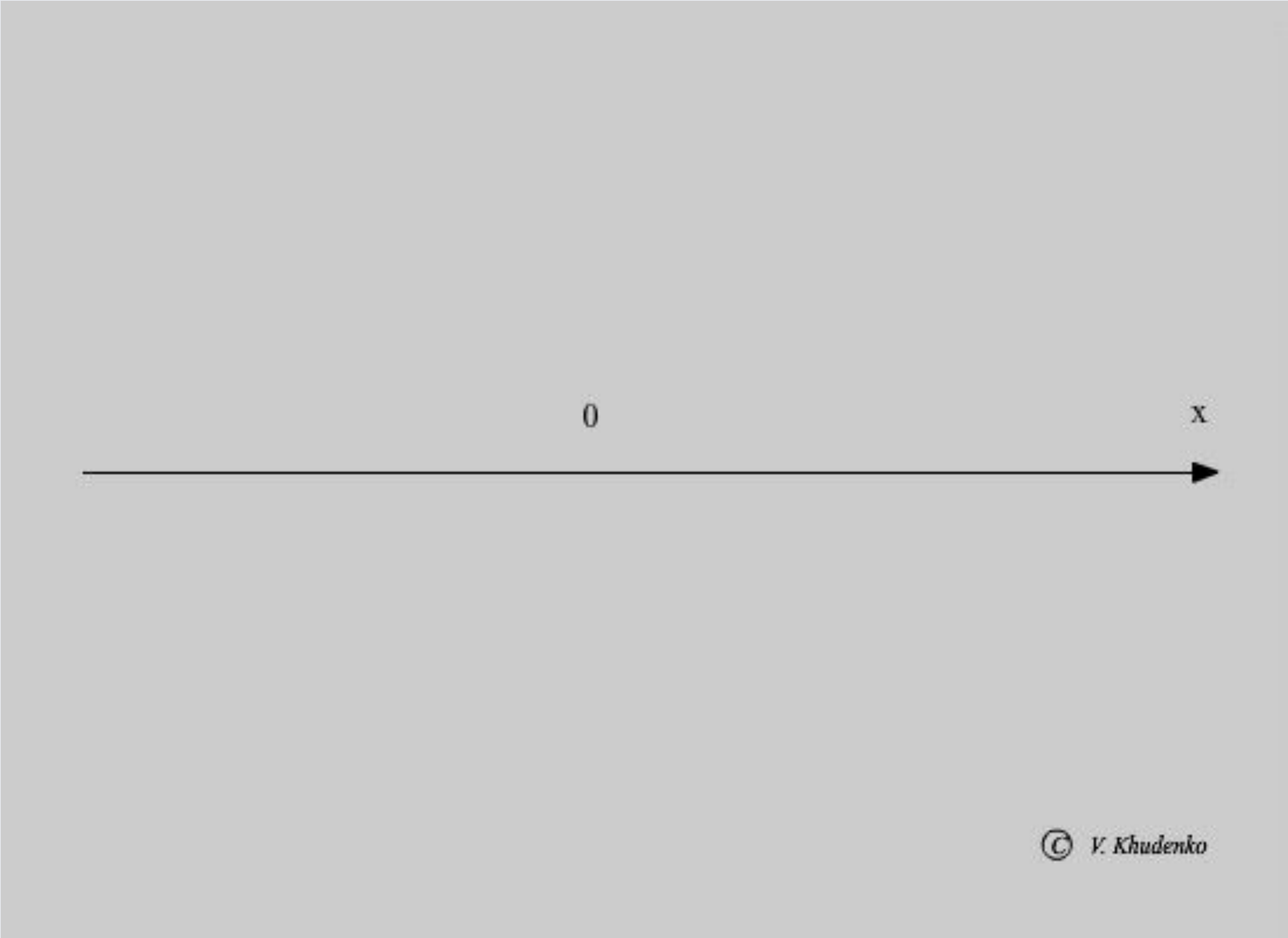
Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента.

Обозначение: $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$

Число *x(n)* называется *общим членом последовательности,* а формула $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена последовательности* .

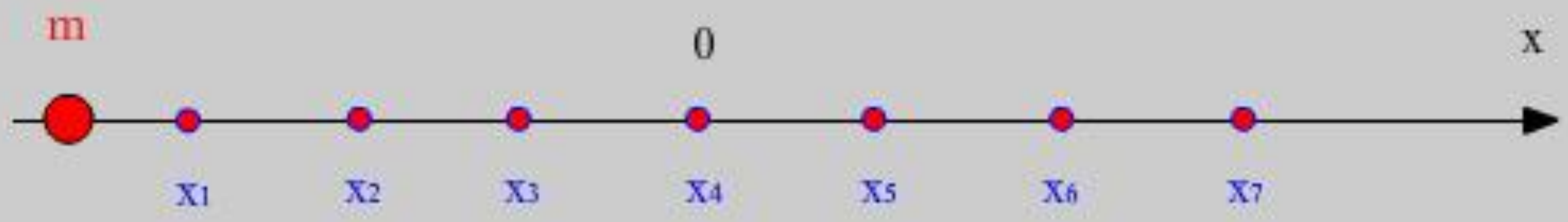
Ограниченные и монотонные последовательности

ограничена снизу на N $\exists m \in R:\ x_n \geq m,\ \forall n \in N$

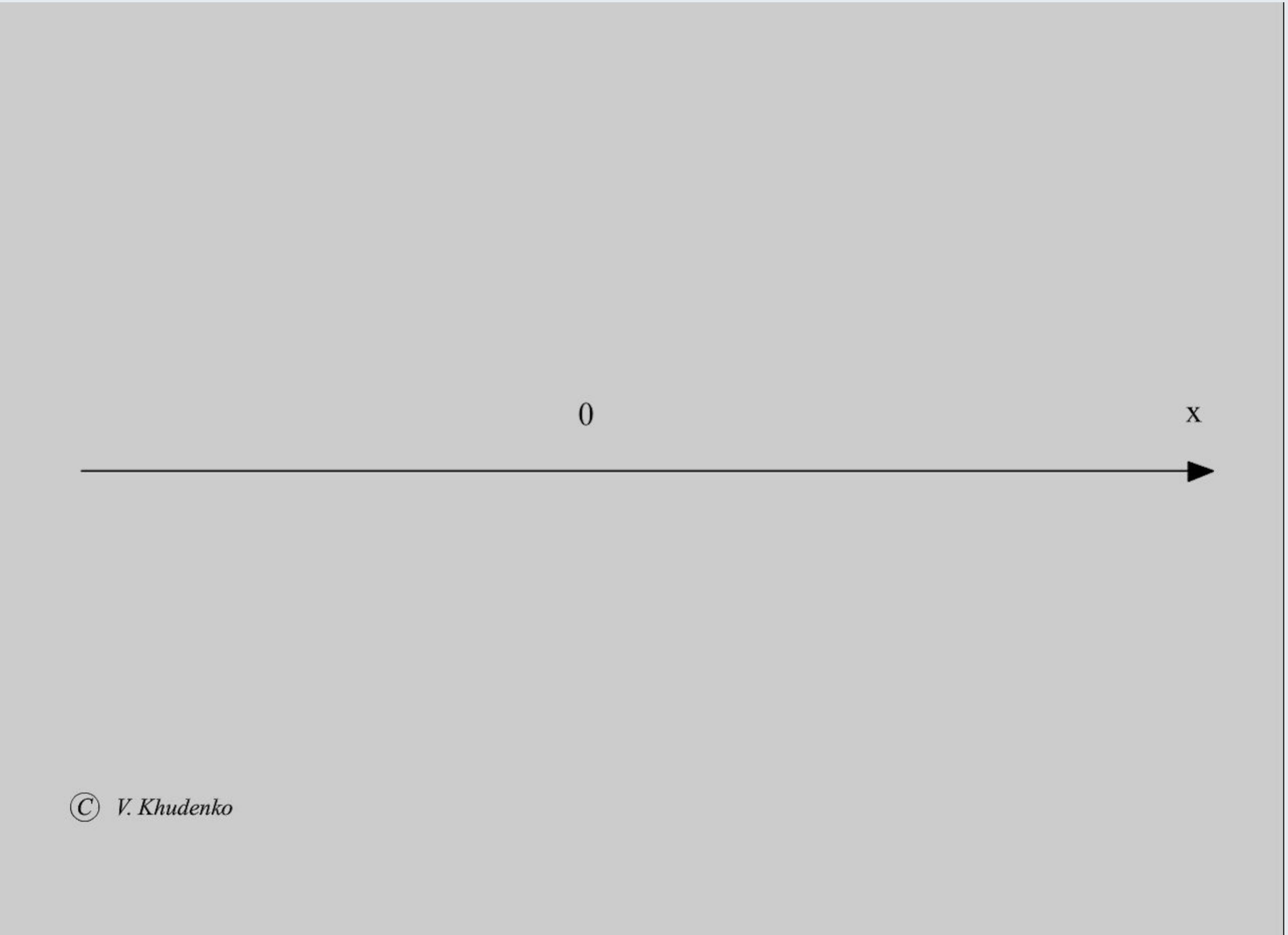


Ограниченная снизу последовательность

$$\exists\ m \in R: x_n \geqslant m,\ \forall n \in N$$

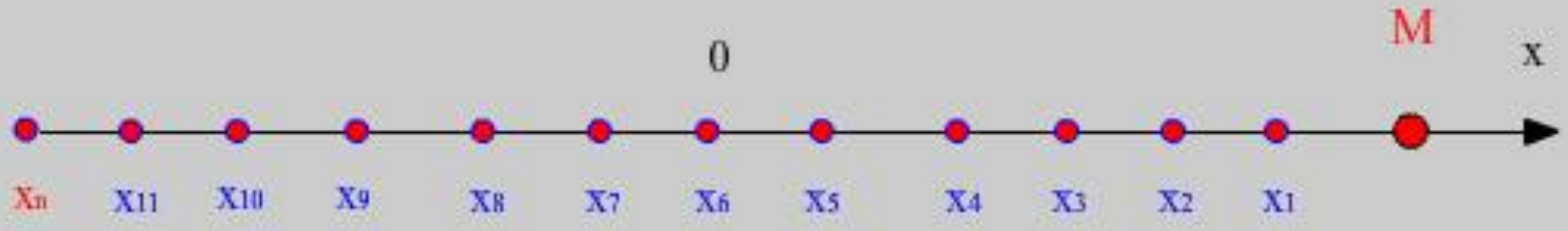


ограничена сверху на **N** $\exists M \in R:\ x_n \le M,\ \forall n \in N$

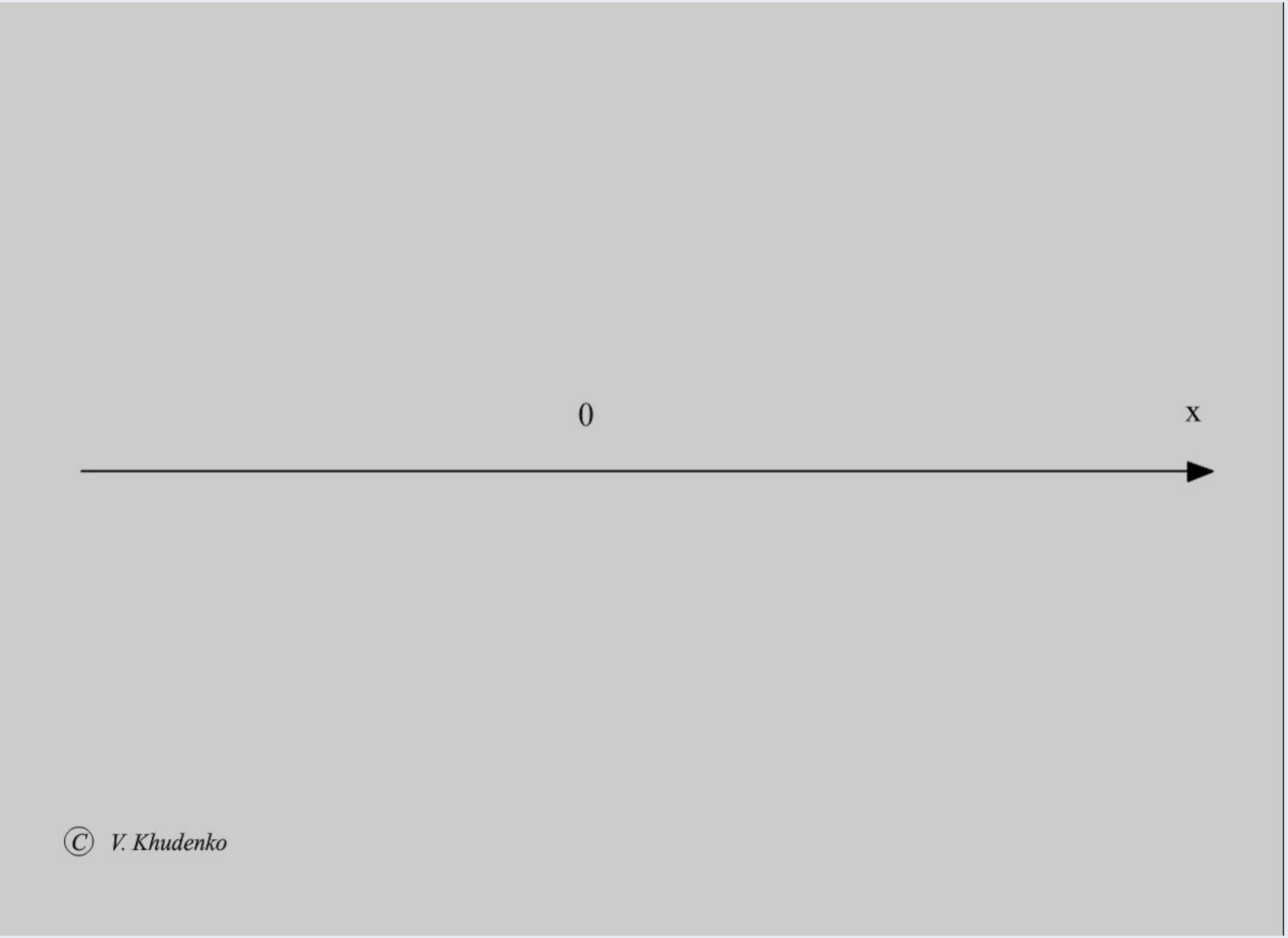


Ограниченная сверху последовательность

$$\exists\, M \in R: x_n \leqslant M,\ \forall n \in N$$

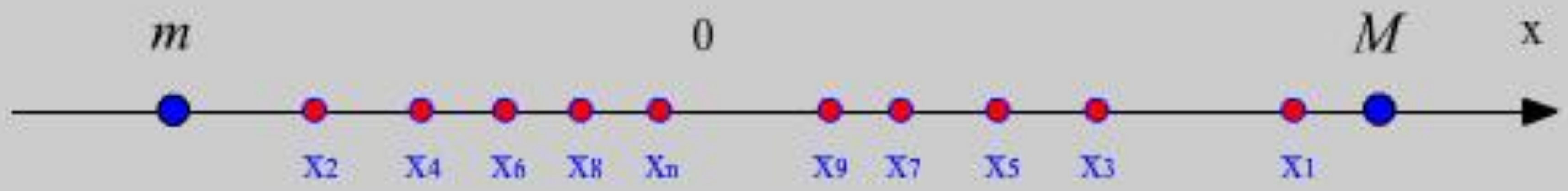


ограничена на N $\exists M, m \in R: \ \mathrm{m} \le x_n \le M, \ \forall n \in N$

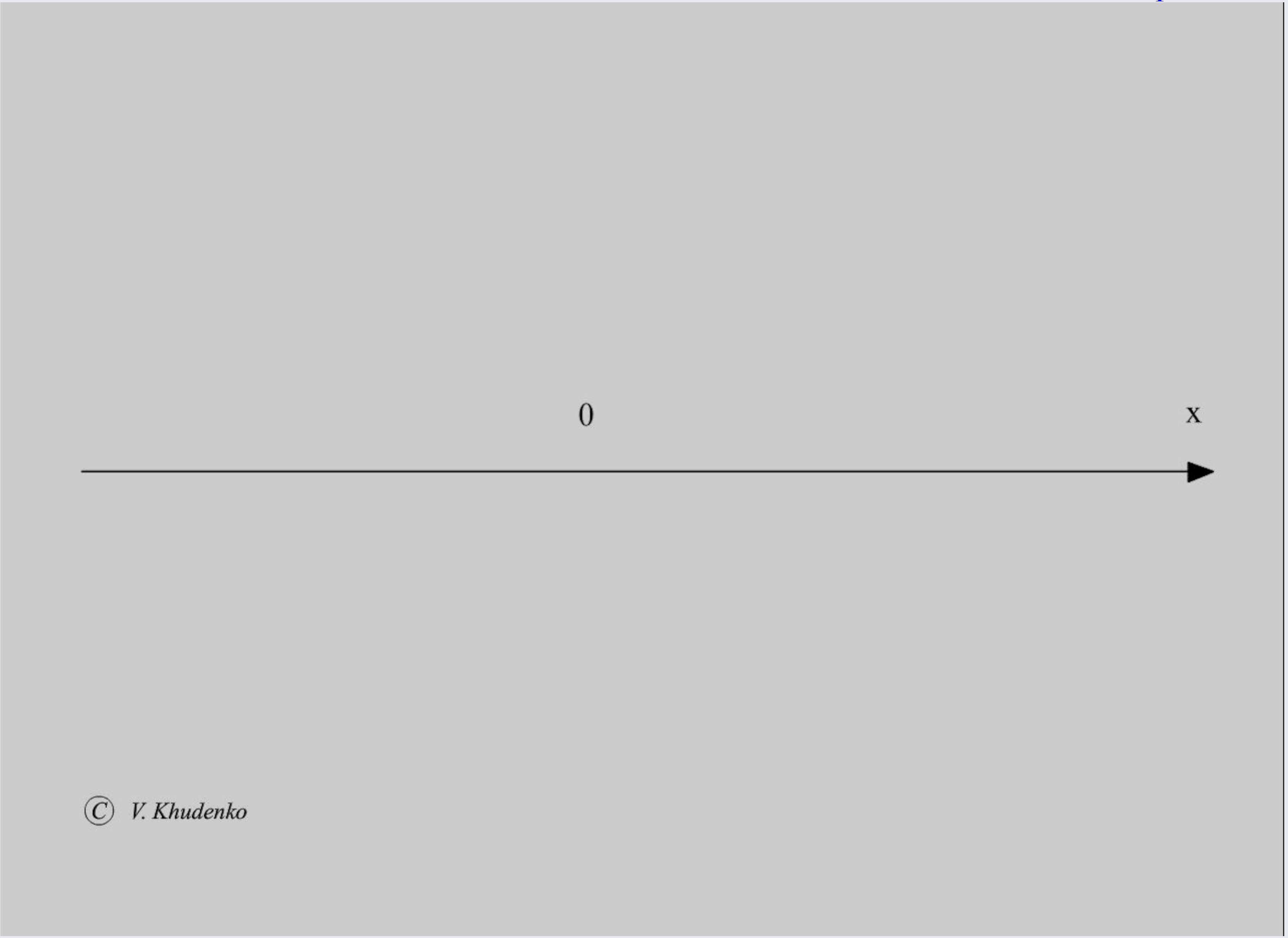


Ограниченная последовательность

$$\exists\, m, M \in R:\ m \leqslant x_n \leqslant M,\ \forall\, n \in N$$

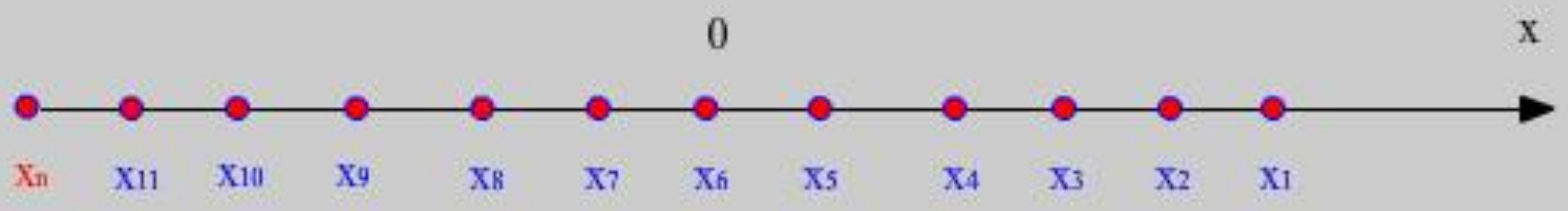


убывает на N $\forall n_1, n_2 \in N:\ n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}$

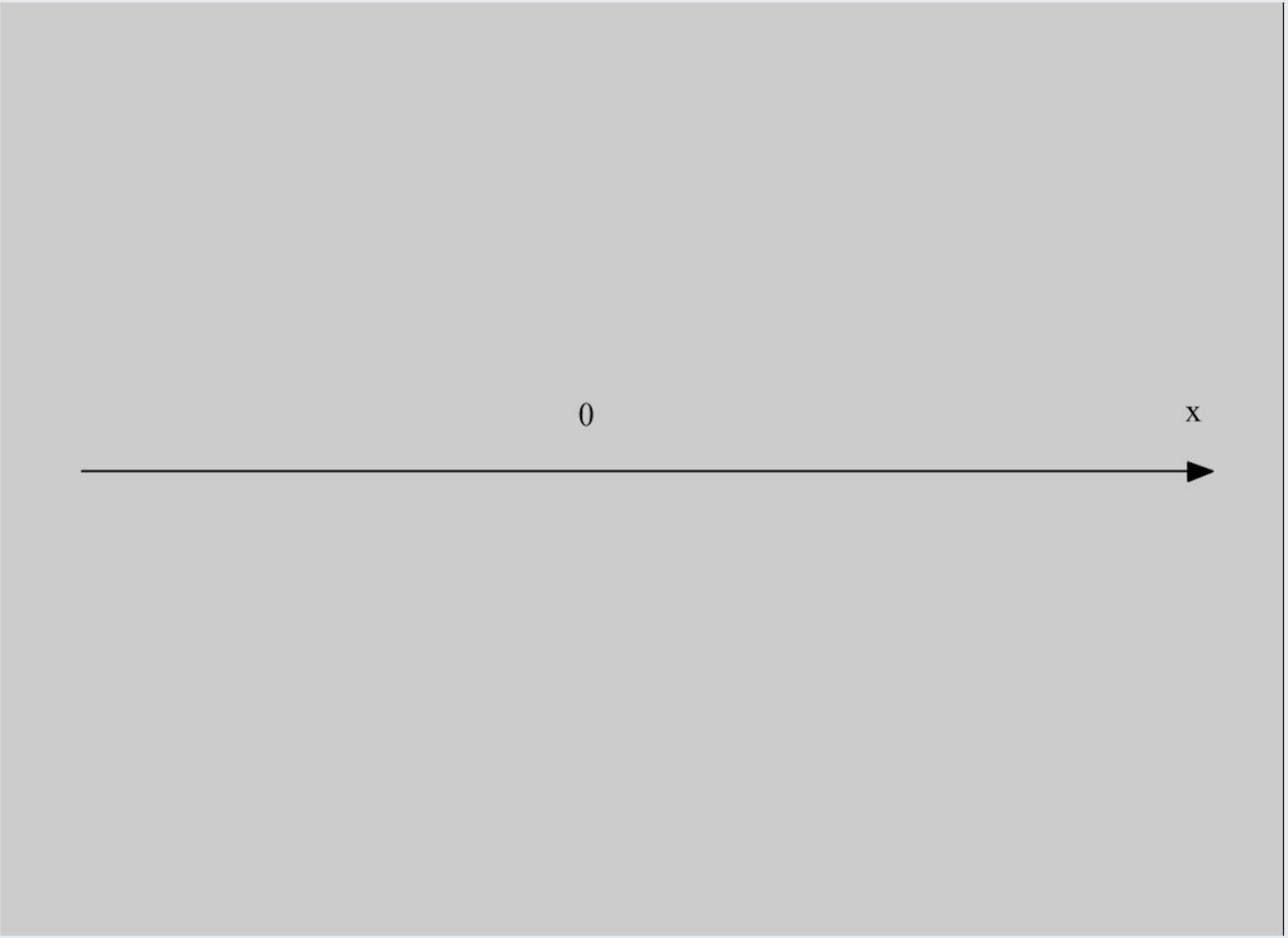


Убывающая последовательность

$$\forall\ n_1, n_2 \in N:\ n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}$$

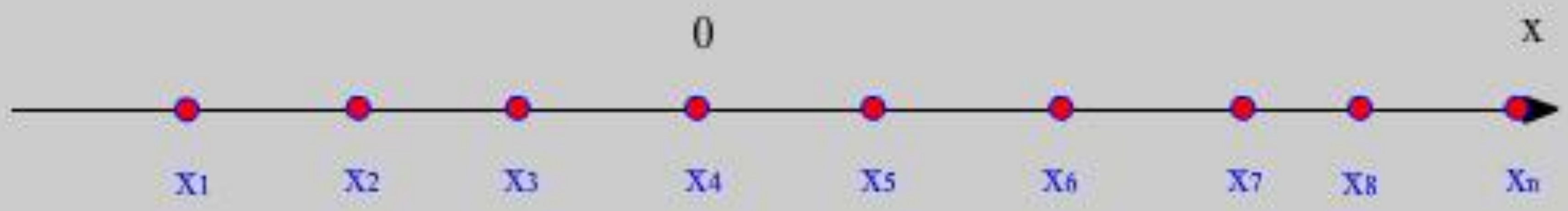


- (x_n) - *возрастает на* $\boldsymbol{N}$



Возрастающая последовательность

$$\forall\ n_1, n_2 \in N:\ n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}$$



Предел числовой последовательности

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными*

Предел числовой последовательности

Понятие предела является одним из фундаментальных в математике. На этом понятии, как на фундаменте строится здание математического анализа.

*Число a называется **пределом числовой последовательности**, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $n > n_0$ члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$*

В этом случае говорят, что последовательность имеет предел и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

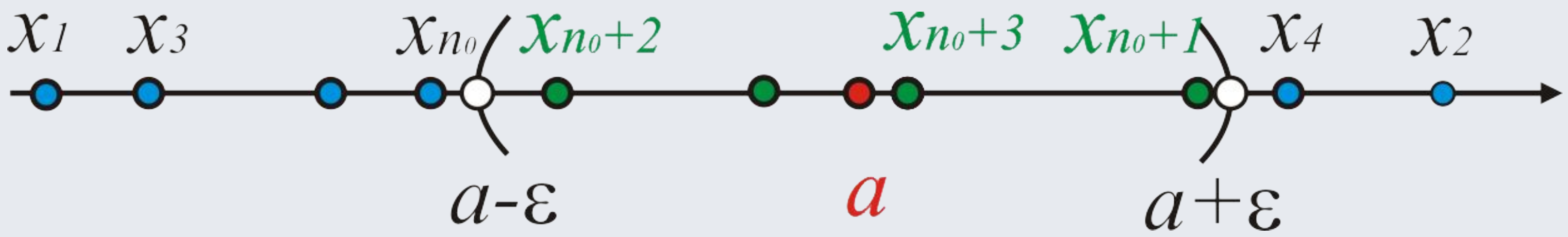
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Последовательность, имеющую предел называют сходящейся.

Эквивалентное определение

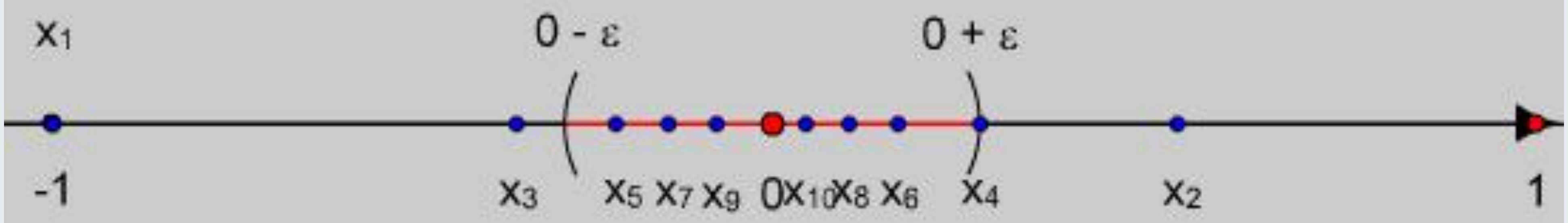
*Число a называется **пределом числовой последовательности** , если в любой сколь угодно малой ε - окрестности числа a*

содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого числа n_0



Пример $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$

$n = 10$



Выбираем $\varepsilon = 0{,}25$

Свойства пределов последовательностей

Теорема 1. Если последовательность (x_n) *сходится, то она ограничена*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \exists M \in R: |x_n| \le M$$

Пусть (x_n) - сходящаяся последовательность.

По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$ существует натуральное число n_0, что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ имеет место неравенство: $|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$

т.е. $|x_n| < |a| + \varepsilon$

Пусть $M = \max\{|a| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|\}$

Тогда $|x_n| \le M$ $\forall n \in N$, что и означает ограниченность числовой последовательности

Это только необходимый признак, например последовательность

$\{(-1)^n\} = (-1, 1, -1, 1, ...)$

ограниченная, но не сходящаяся.

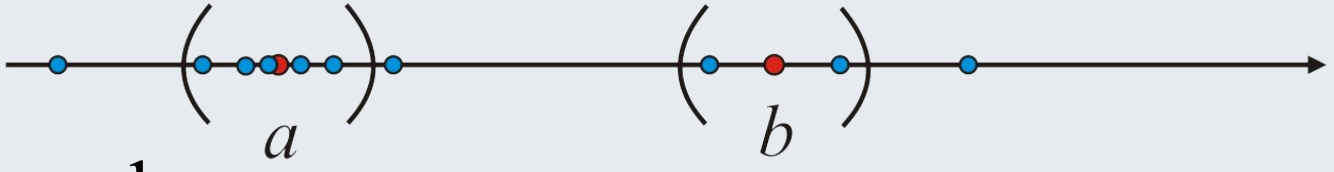
Теорема 1.2. *Если последовательность имеет предел, то только один.*

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b, \quad a \neq b$$

Пусть для определенности $a<b$. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$

Рассмотрим ε окрестности точек a и b . По выбору произвольного числа ε эти окрестности не пересекаются



Из того факта, что точка a является пределом последовательности следует, что все члены последовательности (за исключением конечного их числа) содержатся в ε окрестности этой точки.

Так как окрестности не пересекаются, то в ε окрестности точки b содержатся только конечное число членов последовательности.

Получаем противоречие с предположением, что $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

Данное противоречие доказывает теорему.

Если встречается такая неограниченная последовательность, что с возрастанием ***n*** члены последовательности неограниченно возрастают, то такие последовательности называются *бесконечно большими*


0
x

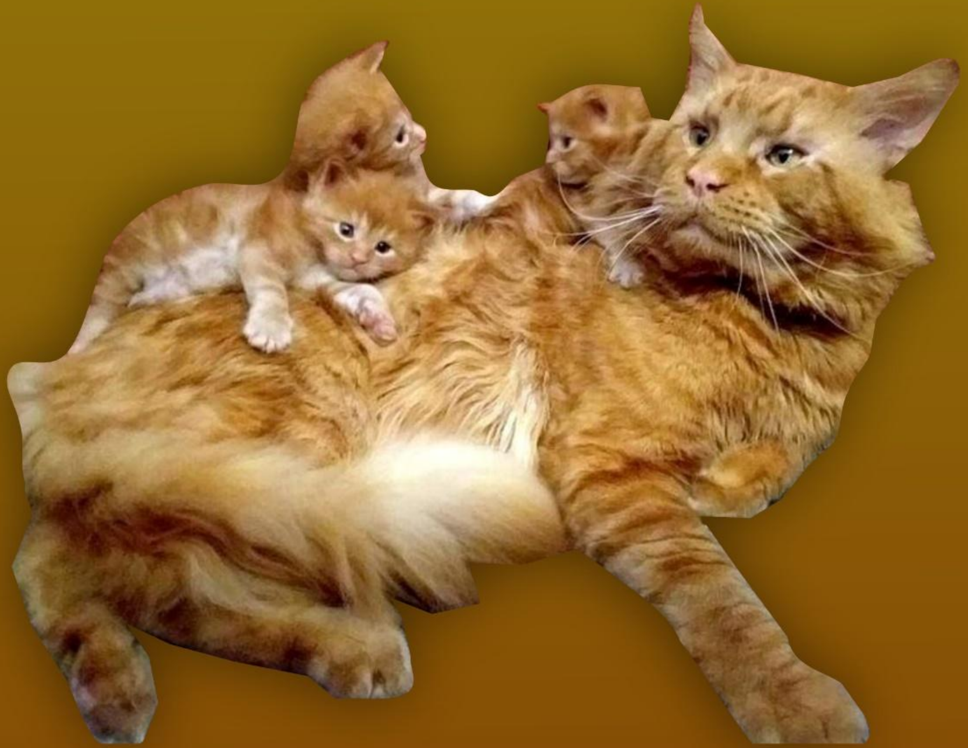

0
x

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty <=> \forall M \in R_+ \ \exists n_0 \in N: \forall n > n_0 => |x_n| > M$$

Числовую последовательность называют *бесконечно малой* если ее предел равен нулю.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N: \ \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$$

Бесконечно малые и бесконечно большие



Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Терема 1.3. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad (1.1)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \qquad (1.2)$$

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n > n_0$ выполняется $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_1 \in N \ \forall n > n_1$ $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (**)

Обозначим $n^* = \max\{n_0, n_1\}$ возьмем $n > n^*$

тогда неравенства (*) и (**) будут выполняться *одновременно*.

$$\left|x_n + y_n\right| \le \left|x_n\right| + \left|y_n\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Мы получили, что для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует натуральное число n^*, что для всех $n > n^*$

Выполняется неравенство $\left|x_n + y_n\right| < \varepsilon$,

следовательно, последовательность $\left\{x_n + y_n\right\}$

является бесконечно малой.

Теорема 1.4. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой.

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (1.3)

и $\forall n \in N \ M > 0 \ |y_n| < M,$

По определению предела последовательности

$$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0, \quad \exists n_0 \in N: \quad \forall n > n_0 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

для $n > n_0$

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Следствие. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 1.5. Равносильны следующие два утверждения:

1)Обратная к бесконечно малой последовательности является бесконечно большой последовательностью;

2) Обратная к бесконечно большой последовательности является бесконечно малой последовательностью

1).Пусть , тогда $\forall \frac{1}{M} > 0 \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 \quad |x_n| < \frac{1}{M}$

По свойствам числовых неравенств получаем, что для $\forall n > n_0$

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} > M$$

т.е последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, следовательно,

$\forall M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \quad n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \frac{1}{\varepsilon}$

по свойствам числовых неравенств

$\forall n > n_0 \quad \left|\frac{1}{y_n}\right| = \frac{1}{|y_n|} < \varepsilon$ $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - бесконечно малая

Предел и неравенства

Теорема 1.5. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *две сходящиеся последовательности*

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *причем* $a < b$

тогда

$$\exists\, n_0 \in N,\quad \forall n > n_0 :\ x_n < y_n$$

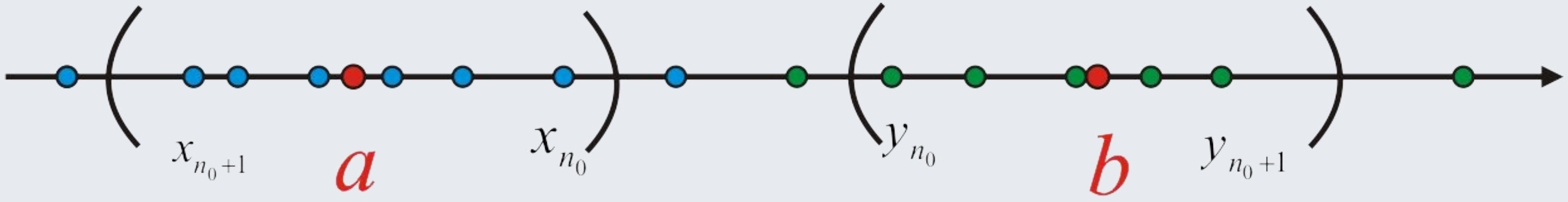
Выберем $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$ тогда ε окрестности точек a и b не будут пересекаться.

$$\exists n_1 \in N \quad \forall n > n_1 :\ \left|x_n - a\right| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in N \quad \forall n > n_2 :\ \left|y_n - b\right| < \varepsilon,$$

Обозначим , $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ тогда начиная с номера n_0 будут выполняться неравенства

$$x_{n_0} < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_{n_0}$$



Замечание: *Строгое неравенство в пределе может в пределе перейти в нестрогое неравенство.*

для последовательности $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ $\frac{1}{n^2} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$