

Дробные рациональные уравнения

Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причём хотя бы одно из них — дробным выражением.

Алгоритм решения:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в состав уравнения;
- умножают обе части уравнения на общий знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Решить уравнение $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x^2-5x}$.

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x^2-5x}$$

Общий знаменатель: $x^2 - 5x = x(x - 5)$.

$$\frac{x-3}{x-5} \cdot x(x-5) + \frac{1}{x} \cdot x(x-5) = \frac{x+5}{x^2-5x} \cdot x(x-5)$$

$$x \cdot (x-3) + (x-5) = x+5$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -2$$

не подходит

Ответ: -2 .

$$\begin{aligned} 5(3-5)(x-5) &\neq 0 \\ -2(-2 \neq 0) &= x \neq 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Решить уравнение $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+21}$.

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+21}$$

ОДЗ:

$$x \neq -3 \quad x \neq -9 \quad x \neq -5 \quad x \neq -21$$

$$\frac{x+9-x-3}{(x+3)(x+9)} = \frac{x+21-x-5}{(x+5)(x+21)}$$

$$\frac{8}{x^2 + 12x + 27} = \frac{16}{x^2 + 26x + 105}$$

$$5x^2 + 18x - 99 = 0$$

$$D = 2304 > 0$$

$$3(x^2 + 26x + 105) = 8(x^2 + 12x + 27) \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -6,6$$

Ответ: 3; -6,6.

Решить уравнение $\frac{15}{x^2-4x-2} = x^2 - 4x$.

$$\frac{15}{x^2 - 4x - 2} = x^2 - 4x - 2 + 2$$

$$t = x^2 - 4x - 2$$

$$\frac{15}{t} = t + 2$$

$$15 = t^2 + 2t = 0$$

$$t_1 = -5 \quad t_2 = 3$$

$$x^2 - 4x - 2 = 3$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

$$x^2 - 4x - 2:$$

Если $x = 5$, то $5^2 - 4 \cdot 5 - 2 = 3 \neq 0$.

Если $x = -1$, то $(-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 2 = 3 \neq 0$.

Если $x = 3$, то $3^2 - 4 \cdot 3 - 2 = -5 \neq 0$.

Если $x = 1$, то $1^2 - 4 \cdot 1 - 2 = -9 \neq 0$.

$$x^2 - 4x - 2 = -5$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_3 = 3 \quad x_4 = 1$$

Ответ: 5; -1; 3; 1.

От автобусной остановки отъехал автобус до аэропорта, находящегося на расстоянии 120 км. Один из пассажиров автобуса опоздал к отправлению на 10 минут, и решил поехать на такси.

Автобус и такси приехали в аэропорт одновременно. Найти скорость автобуса, если скорость такси на 10 км/ч больше скорости автобуса.

Пусть x км/ч – v автобуса,
тогда $(x + 10)$ км/ч – v такси.

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 10} = \frac{1}{6} \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0 \text{ и } x \neq -10$$

Общий знаменатель: $6x(x + 10)$.

$$6 \cdot 120(x + 10) - 6 \cdot 120x = x(x + 10)$$

$$720x + 7200 - 720x = x^2 + 10x$$

$$x^2 + 10x - 7200 = 0$$

$$D > 0$$

$$\text{По т. Виета } \begin{cases} x_1 + x_2 = -10 \\ x_1 \cdot x_2 = -7200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -90 \\ x_2 = 80 \end{cases}$$

80 км/ч – скорость автобуса.

Ответ: 80 км/ч.

...опоздал на 10 минут...

Дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причём хотя бы одно из них — дробным выражением.

Алгоритм решения:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в состав уравнения;
- умножают обе части уравнения на общий знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.