

Лекция 2-2020. Работа и потенциал электростатического поля

0. Описание векторных полей.

1. Работа электростатического поля при перемещении заряда.
2. Циркуляция вектора напряженности.
3. Связь напряженности и потенциала.
4. Уравнение Пуассона.

Мир каждый видит в облике ином, и
каждый прав – так много смысла в нем.

Иоганн Вольфганг Гёте

Математическое описание полей подробно изучить самостоятельно

Характеристики векторных полей

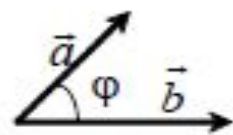
1. Поток (Π).
2. Циркуляция (Ω).
3. Дивергенция ($\operatorname{div} \vec{A}$).
4. Ротор или вихрь ($\overline{\operatorname{rot} A}$).
5. Линии тока.

При этом поток и циркуляция являются суммарными (интегральными) характеристиками, а дивергенция и ротор – дифференциальными (точечными) характеристиками поля.

Вектор.

Геометрический вектор \vec{a} – это направленный отрезок в пространстве. Длина вектора \vec{a} называется его **модулем** и обозначается $a = |\vec{a}|$. В **прямоугольной декартовой системе** координат каждый вектор \vec{a} можно однозначно представить в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (**орты**) по осям координат x, y, z . Числа a_x, a_y, a_z называются **прямоугольными декартовыми координатами** вектора \vec{a} .

Скалярное произведение векторов.

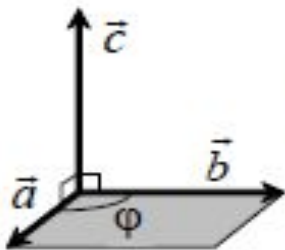


Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} есть **число**

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Векторное произведение векторов.



Под векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} понимают **вектор** \vec{c} , имеющий длину $c = ab \sin \varphi$ (площадь параллелограмма, построенного на \vec{a} и \vec{b} как на сторонах) и направленный перпендикулярно к \vec{a} и \vec{b} , причем так, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют **правую тройку векторов**.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{a} \times \vec{b}$.

Скалярное и векторное поле

Скалярное поле.

Если каждой точке M пространства ставится в соответствие скалярная величина U , то возникает **скалярное поле** $U(M)$ (например, поле температуры неравномерно нагретого тела, поле плотности в неоднородной среде, поле электростатического потенциала). Если M имеет декартовы координаты (x, y, z) , то пишут $U = U(x, y, z)$ или $U = U(\vec{r})$ с векторным аргументом (радиусом вектором) $\vec{r} = \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Векторное поле.

Если каждой точке M ставится в соответствие вектор \vec{A} , то говорят о **векторном поле** $\vec{A}(M)$ (например, поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле Солнца, поле электрической напряженности, поле магнитной напряженности). В декартовых координатах

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k},$$

где \vec{r} – радиус-вектор. Компоненты A_x, A_y, A_z образуют **три скалярных поля** и однозначно определяют $\vec{A}(\vec{r})$ – векторную функцию векторного аргумента.

Описание свойств векторных полей

Градиент.

Градиентом поля $U(\vec{r})$ называется вектор, определяемый в каждой точке

поля соотношением

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial s} = \vec{n} \text{grad}U$, где \vec{n} – единичный вектор в направлении \vec{s} .

Часто вектор $\text{grad}U$ обозначают также $\frac{\partial U}{\partial \vec{s}}$ или ∇U , где ∇ ("набла")

обозначает символический вектор, называемый **оператором Гамильтона**

или **набла-оператором**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

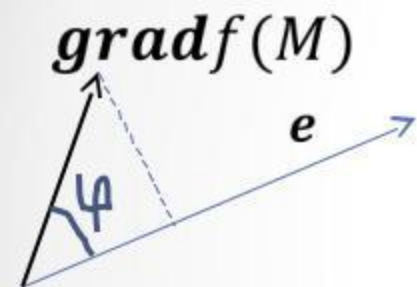
Понятие производной по направлению

Определение. *Производной z'_l по направлению l* функции $f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta l}$$

Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ называется **вектор**, координаты которого равны частным производным, взятым в точке. Обозначают $gradf(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \mathbf{k}$

Взаимосвязь градиента и производной по направлению:



Выражение для производной по направлению можно представить как скалярное произведение вектора градиента и единичного вектора направления e или как проекцию градиента на это направление:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial e} = (gradf(M), e) = |gradf(M)| \cos \varphi = \text{Pr}_e gradf(M)$$

Скорость изменения функции максимальна в направлении градиента: $\varphi = 0$

$$\cos \varphi = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f(M)}{\partial gradf(M)} = |gradf(M)|$$

Пример: градиент $z = x^2y + xy^3$ в точке $M(1,1)$ равен $gradf(M) = (3, 4)$.

Скорость изменения функции в направлении градиента $|gradf(M)| = 5$

Теорема Остроградского – Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{4\pi r^2 Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_i q_i$$

Устремив объем замкнутой поверхности к нулю ($V \rightarrow 0$), и поделив поток вектора напряженности на этот объем, получим дивергенцию электростатического поля:

$$\operatorname{div} E = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_E}{V} = \frac{Q}{\epsilon_0 V} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

где ρ — плотность электрического заряда.

Определения дивергенции.

Второе считается эквивалентным первому

1)

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{V}$$

2)

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

Чуев: Дивергенция – это изменение вектора в своем собственном направлении (по модулю)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{d|\vec{F}|}{d\tau_{\vec{F}}}$$

Ротор – это изменение вектора по направлению

Дифференциальные операции удобно записывать через векторный оператор « набла» (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial \dots}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \dots}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \dots}{\partial z} \mathbf{k} = \left(\frac{\partial \dots}{\partial x}; \frac{\partial \dots}{\partial y}; \frac{\partial \dots}{\partial z} \right)$$

1. Действие оператора на скалярную функцию $U(x, y, z)$ определяет операцию градиента $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$

2. Скалярное произведение оператора и векторного поля определяет **дивергенцию (расходимость) векторного поля**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Векторное произведение оператора и векторного поля определяют

ротор векторного поля $\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \dots}{\partial x} & \frac{\partial \dots}{\partial y} & \frac{\partial \dots}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

Для удобства можно формально представлять ротор как **векторное произведение** оператора **набла** (слева) и векторного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

(Последнее равенство формально представляет векторное произведение как **определитель**).

Формула Гаусса-Остроградского.

Для пространственной области G , ограниченной замкнутой поверхностью S :

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} \vec{n} dS$$

Оператор Лапласа.

Пусть $U(M)$ – скалярное поле, тогда оператор Лапласа ΔU определяется следующим образом:
или в декартовых координатах:

$$\Delta U(M) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U(M)$$
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Оператор Лапласа векторного поля: $\Delta \vec{A}(M) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(M) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(M)$

$$\Delta = \nabla^2$$

РОТОР И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Ротор $\text{rot } \mathbf{a}$ векторного поля \mathbf{a} — есть вектор, проекция которого $\text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}$ на каждое направление \mathbf{n} есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру L , являющемуся краем плоской площадки ΔS , перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки (площади), когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку :

$$\text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}.$$

Направление обхода контура выбирается так, чтобы, если смотреть в направлении \mathbf{n} , контур L обходился по часовой стрелке

Циркуляцией **векторного поля** по данному замкнутому контуру Γ называется **криволинейный интеграл** второго рода, взятый по Γ . По определению

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

где $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ — **векторное поле** (или вектор-функция), определенное в некоторой **области** D , содержащей в себе контур Γ , $d\mathbf{l} = \{dx, dy, dz\}$ — бесконечно малое приращение **радиус-вектора** \mathbf{l} вдоль контура. Окружность на символе интеграла подчёркивает тот факт, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Приведенное выше определение справедливо для трёхмерного случая, но оно, как и основные свойства, перечисленные ниже, прямо обобщается на произвольную размерность пространства.

РОТОР И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Ротор векторного поля.

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}(M)$ называют следующую производную по объему поля в точке M :

Обозначается:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{A}(M) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S [\vec{A}, d\vec{S}]}{V} \\ \text{rot } \vec{A} &\equiv \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \vec{A} \right] \equiv [\nabla, \vec{A}] \end{aligned} \right\}$$

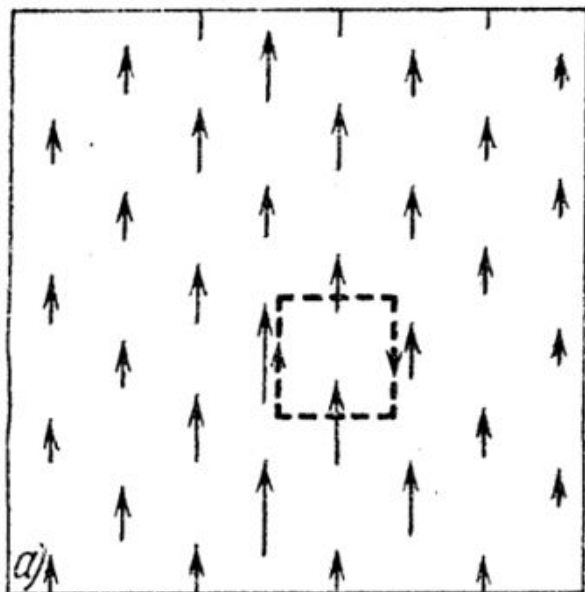
Теорема Стокса.

Циркуляция векторного поля $\vec{A}(M)$ по замкнутой кривой L равна потоку ротора этого поля через поверхность S , опирающуюся на кривую L :

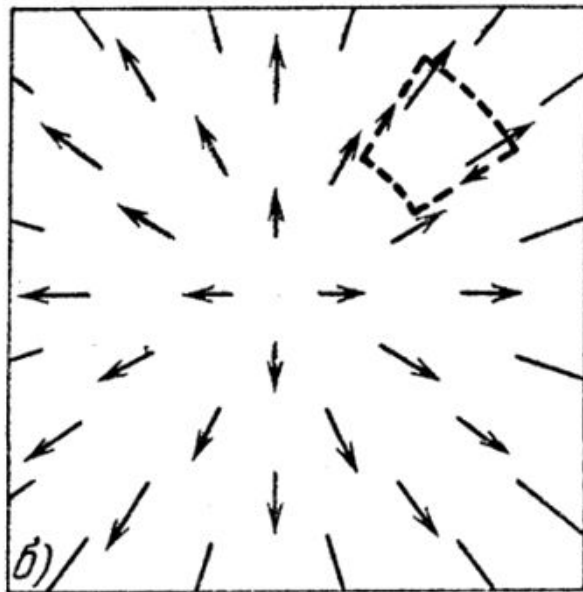
$$\left\{ \oint_L \vec{A} d\vec{r} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} \right.$$

Какой вектор первичен \mathbf{A} или $\text{rot}\mathbf{A}$?

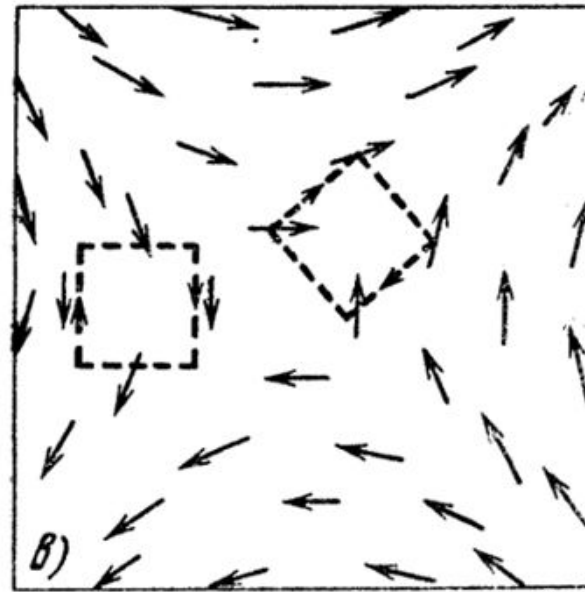
Значения дивергенции и ротора в выделенной области векторного поля



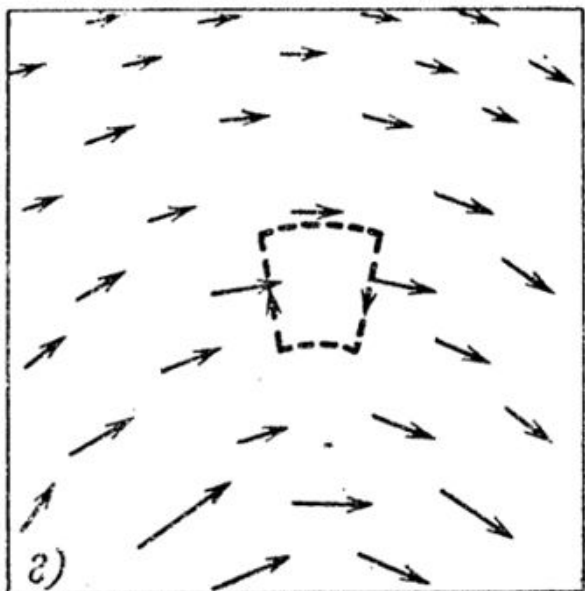
div F=0 rot F≠0



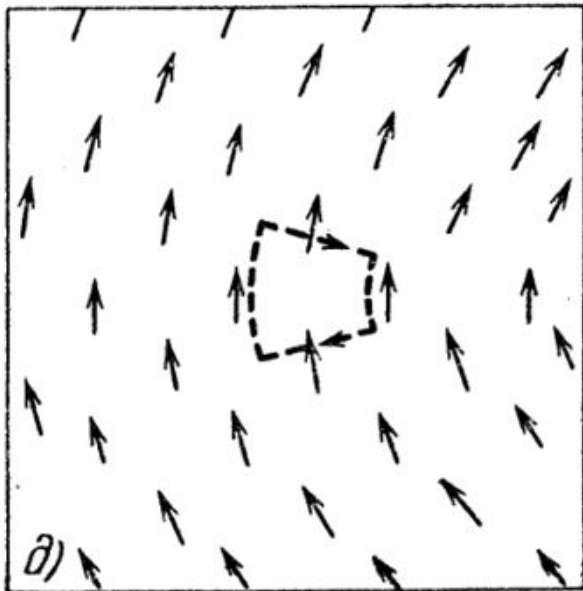
div F≠0 rot F=0



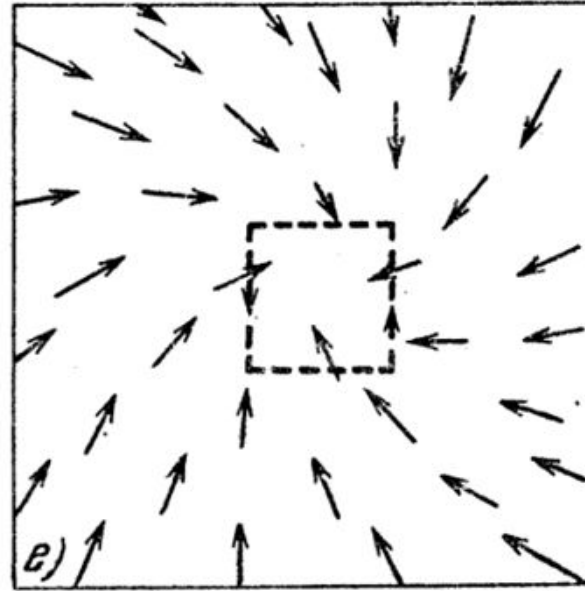
div F=0 rot F=0



div F=0 rot F=0

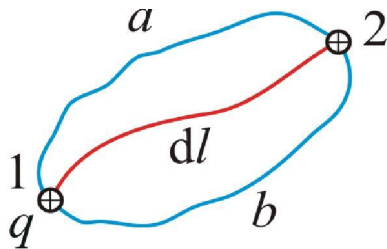
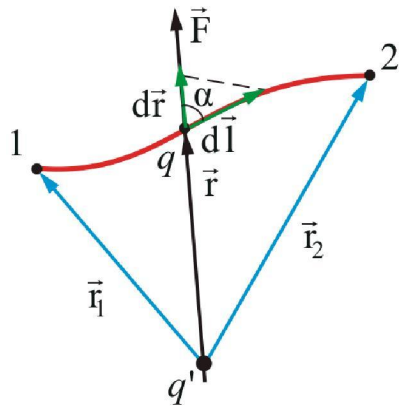


div F=0 rot F≠0



div F≠0 rot F≠0

Работа в потенциальном поле по перемещению электрического заряда



*Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля **консервативны**, а само поле – **потенциально**.*

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

$$dA = q\vec{E} d\vec{r}$$

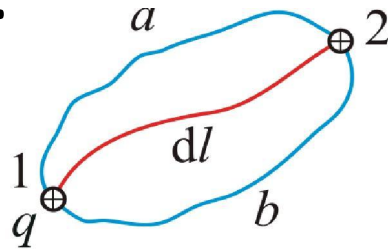
Потенциал можно определить

соотношением:

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Циркуляция вектора \vec{E}

Интеграл от вектора по замкнутому контуру называется **циркуляцией** этого вектора.



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Работа по замкнутому контуру **в потенциальном поле** равна нулю

$$A = q \oint \vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} - q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Напряженность в векторной форме:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Величина, стоящая в скобках, есть не что иное, как **градиент потенциала φ** (grad φ или $\nabla\varphi$).

В компактной форме записи

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

∇ - оператор «набла» (оператор Гамильтона)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это вектор!

Соотношение потенциала и напряженности

$$-d\varphi = E dl.$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

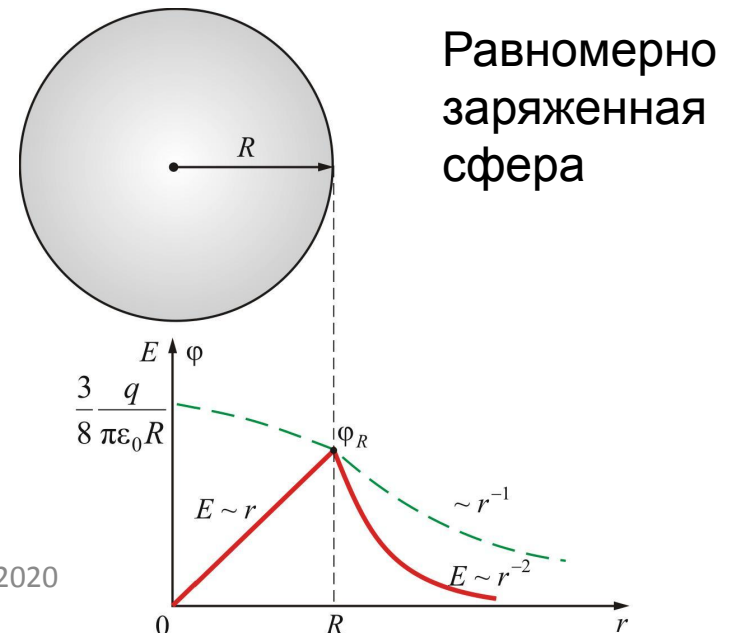
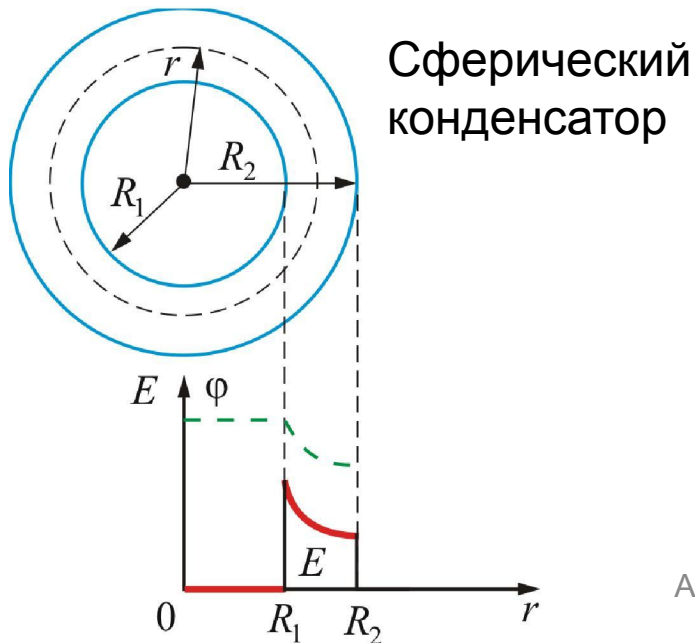
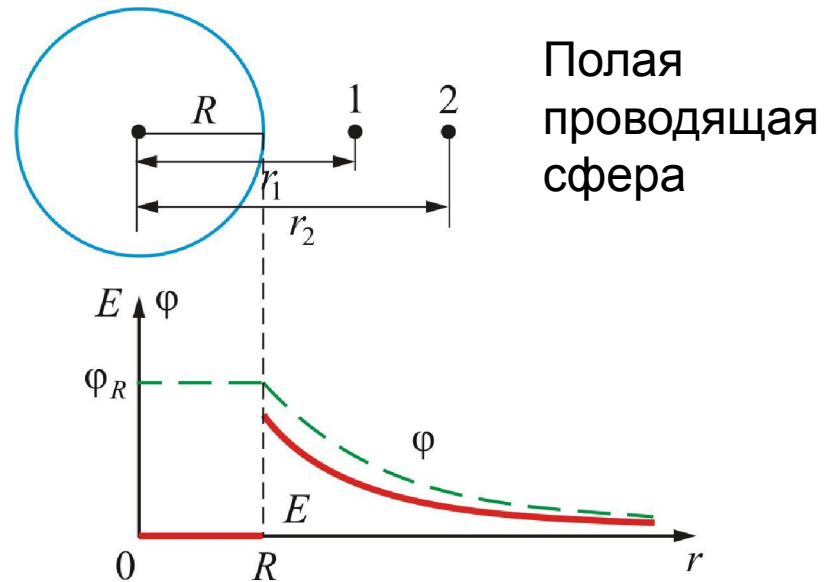
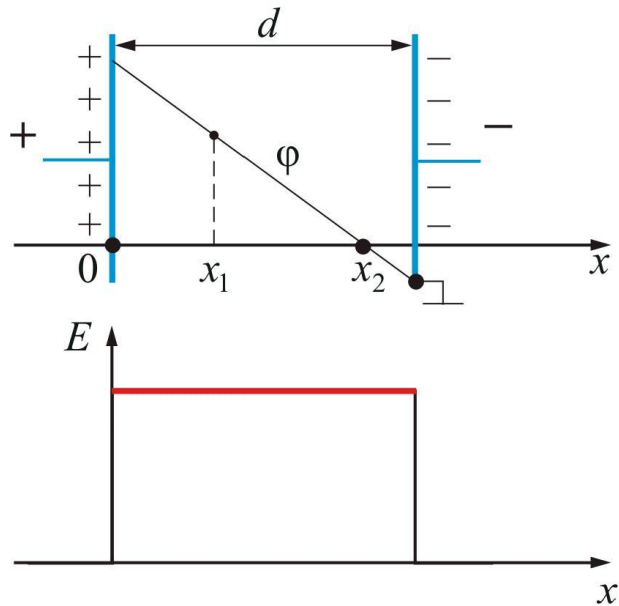
Потенциал поля системы зарядов.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r},$$

Визуальные соотношения напряженности и потенциала



Из учебника Савельева

Отношение потока Φ_v к объему V , из которого он вытекает:

$$\Phi_v/V, \quad (11.11)$$

дает среднюю удельную мощность источников, заключенных в объеме V . В пределе при стремлении V к нулю, т. е. при стягивании объема V к точке P , выражение (11.11) даст удельную мощность источников в точке P , которую называют дивергенцией (или расхождением) вектора \mathbf{v} (обозначается $\operatorname{div} \mathbf{v}$). Итак

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_v}{V}.$$

Аналогично определяется дивергенция любого вектора \mathbf{a} :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{a} \, d\mathbf{S}. \quad (11.12)$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности S , окружающей точку P); V — объем, ограниченный этой поверхностью.

Другое определение дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского — Гаусса. Зная дивергенцию вектора \mathbf{a} в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую замкнутую поверхность конечных размеров. Сделаем это сначала для потока вектора \mathbf{v} (потока жидкости). Произведение $\operatorname{div} \mathbf{v}$ на dV дает мощность источников жидкости, заключенных в объеме dV . Сумма таких произведений, т. е. $\int \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dV$, дает суммарную алгебраическую мощность источников, заключенных в объеме V , по которому осуществляется интегрирование. Вследствие несжимаемости жидкости суммарная мощность источников должна равняться потоку жидкости, вытекающему наружу через поверхность S , ограничивающую объем V . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dV.$$

Аналогичное соотношение выполняется для векторного поля любой природы:

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad (11.15)$$

Это соотношение носит название теоремы Остроградского — Гаусса. Интеграл в левой части соотношения вычисляется по произвольной замкнутой поверхности S , интеграл в правой части — по объему V , ограниченному этой поверхностью.

Связь напряженности и потенциала

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

Дивергенция вектора E

Общая формула
для дивергенции

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\Delta = \nabla^2$$

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

Оператор «набла»

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Оператор	Обозначение	На кого действует	Что получается	Запись	Пример	В декарт. координатах
градиент	<i>grad</i>	на скаляр (напр. φ)	вектор	<i>grad</i> φ или $\nabla\varphi$	$\vec{E} = -grad\varphi$	$\bar{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$
дивергенция	<i>div</i>	на вектор (напр. \vec{E})	скаляр	<i>div</i> \vec{E} или $\nabla \cdot \vec{E}$	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$
ротор	<i>rot</i>	на вектор (напр. \vec{E})	вектор	<i>rot</i> \vec{E} или $\nabla \times \vec{E}$	$rot\vec{E} = 0$	$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме (в вакууме). Уравнение Пуассона

$$q_{\text{внутр}} = \int \rho \, dV$$

$$\oint_S \frac{\vec{E} d\vec{S}}{V} = \frac{1}{V} \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{при } V \rightarrow 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Уравнение Пуассона

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Уравнение Пуассона в иной форме записи

$$\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}\varphi = 0$$

В потенциальном электрическом поле $rot\mathbf{E} = 0$

В однородном электрическом поле

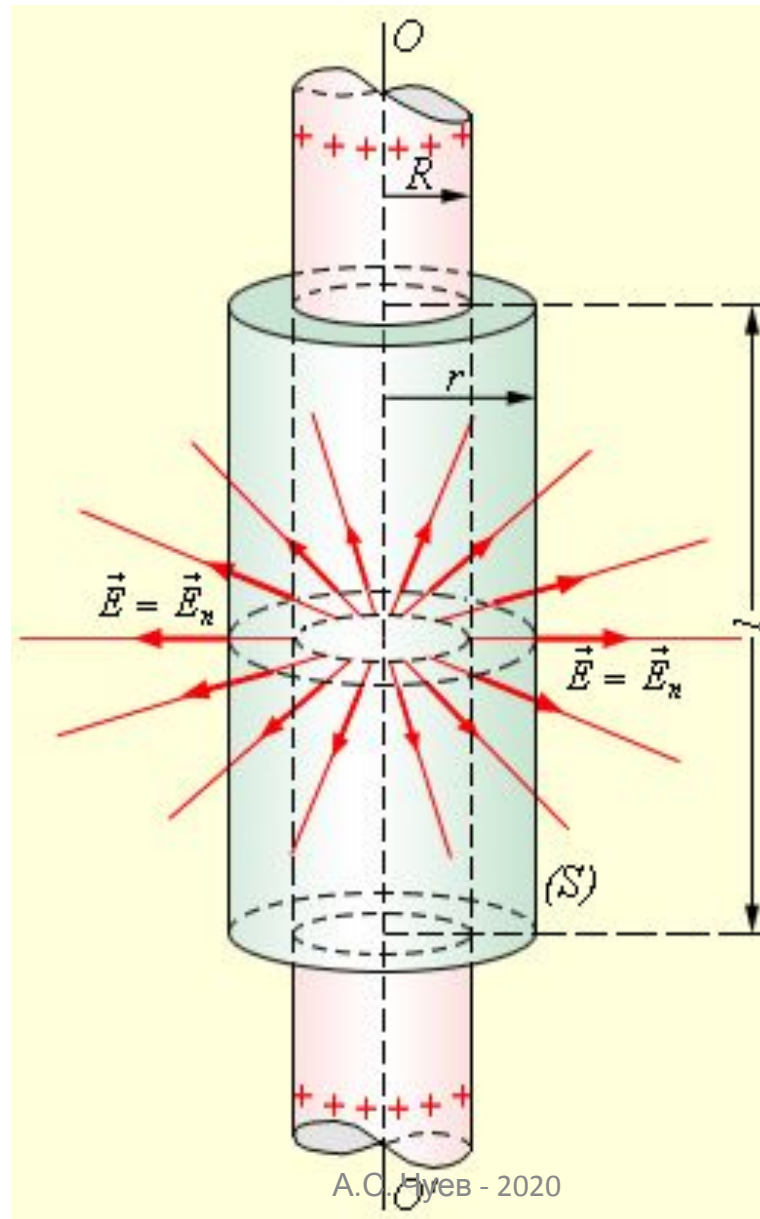
$$grad \mathbf{E} = 0$$

$$div \mathbf{E} = 0$$

$$rot \mathbf{E} = 0$$

Примеры на теорему Гаусса

Вычисление поля однородно заряженного цилиндра. OO' – ось симметрии.



$$E_r 2\pi r \cdot h = \lambda h / \varepsilon_0$$

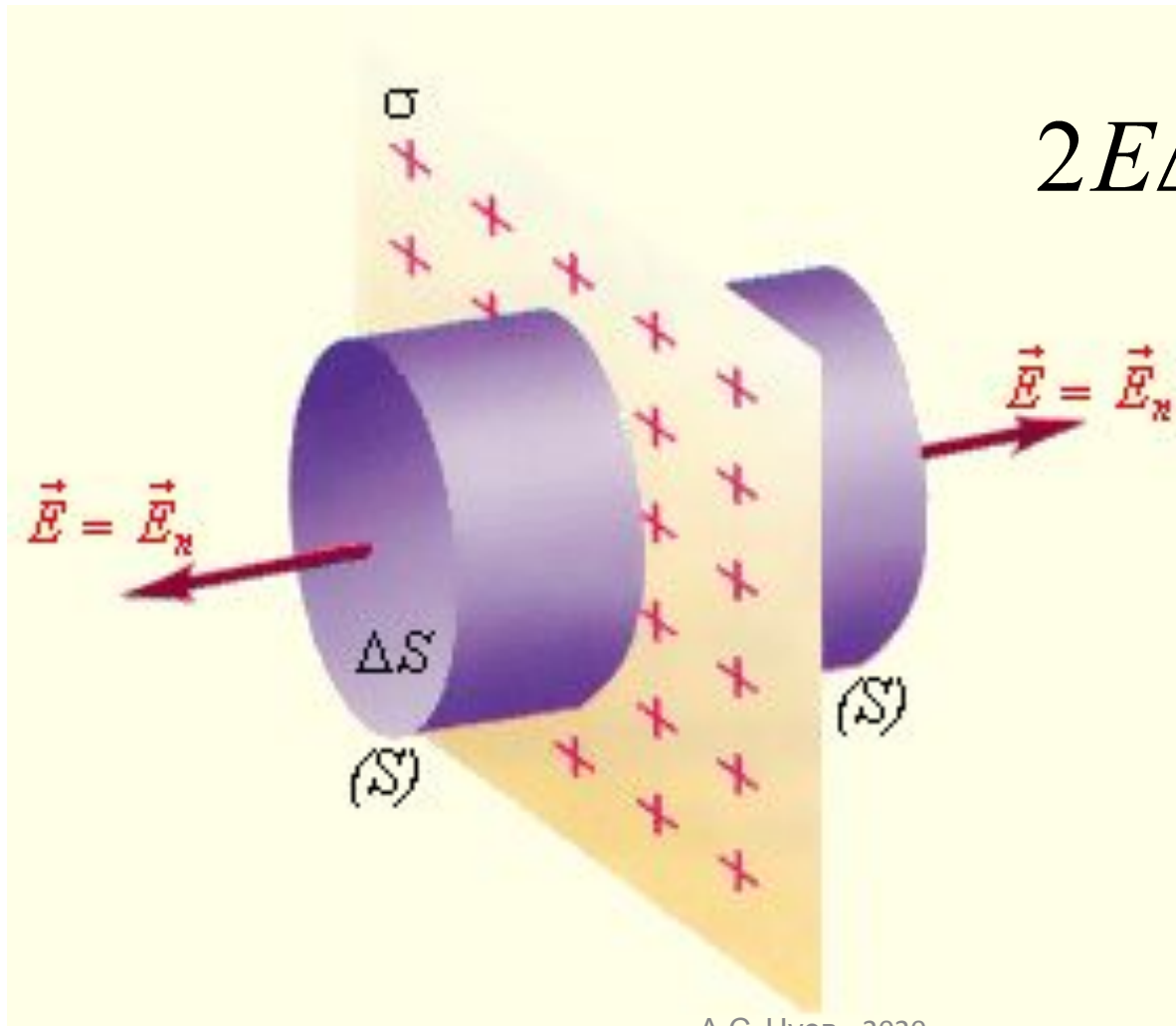
$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$$l = h$$

$$E = 0$$

при $r < R$

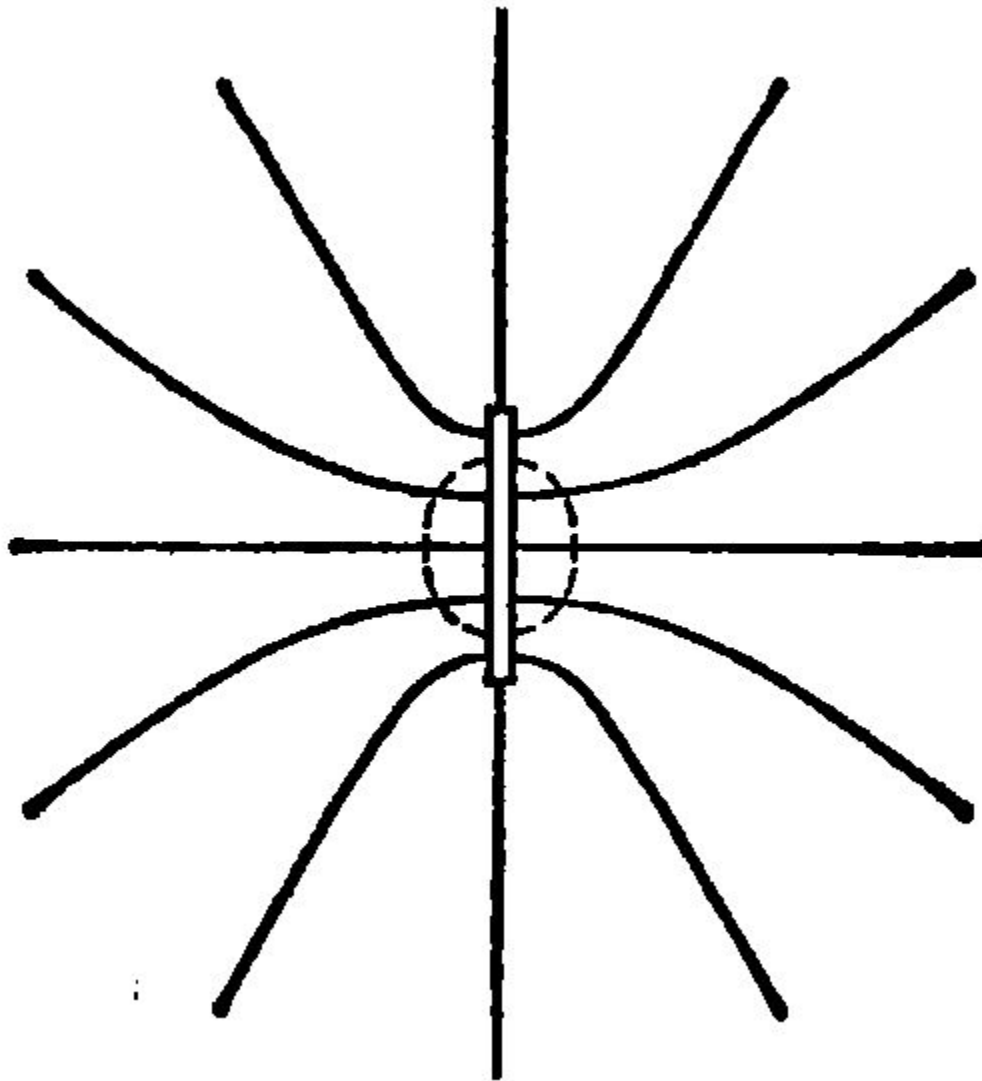
Поле равномерно заряженной плоскости. σ – поверхностная плотность заряда. S – замкнутая гауссова поверхность.



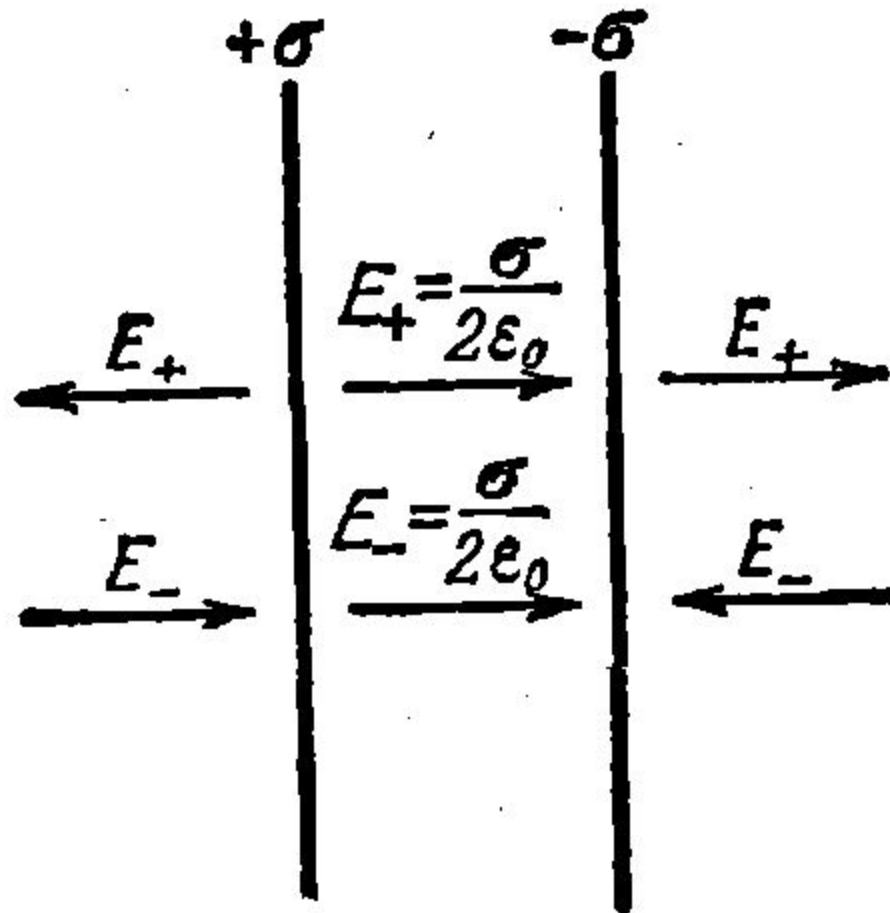
$$2E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

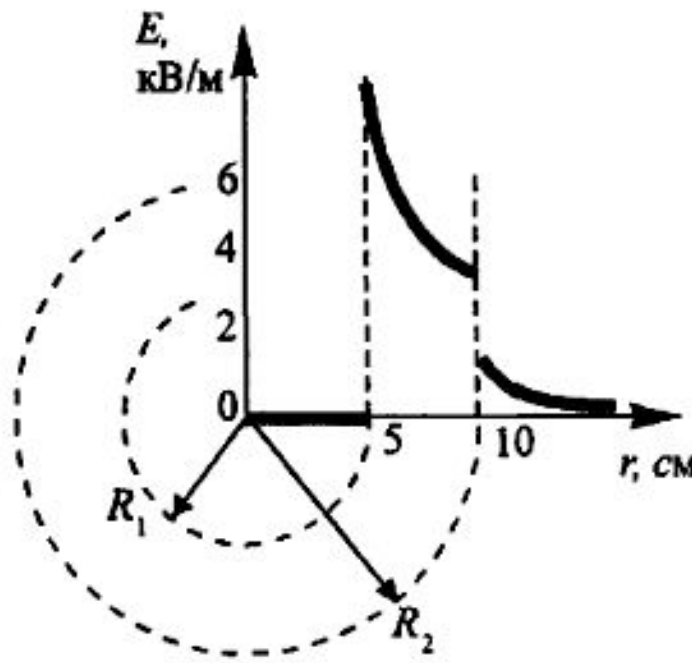
Поле ограниченной в размерах заряженной пластины



Поле двух пластин с противоположными зарядами



Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 8$ см. Заряды сфер соответственно равны $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -1$ нКл. Определите напряженность электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 10$ см. Постройте график зависимости $E(r)$.

Дано	Решение
$R_1 = 5$ см = $5 \cdot 10^{-2}$ м	$\oint_S E_n ds = \frac{Q}{\epsilon_0},$
$R_2 = 8$ см = $8 \cdot 10^{-2}$ м	$E_1 = 0,$
$Q_1 = 2$ нКл = $2 \cdot 10^{-9}$ Кл	$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2},$
$Q_2 = -1$ нКл = -10^{-9} Кл	$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$
$r_1 = 3$ см = $3 \cdot 10^{-2}$ м	
$r_2 = 6$ см = $6 \cdot 10^{-2}$ м	
$r_3 = 10$ см = 0,1 м	
E_1, E_2, E_3 — ?	
$E(r)$ — ?	

Ответ

$E_1 = 0, E_2 = 5$ кВ/м, $E_3 = 0,9$ кВ/м.

Подробнее о циркуляция вектора напряженности

Полезная информация о циркуляции вектора (из учебника Савельева)

Циркуляция. Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур Γ . Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур Γ (рис. 11.8). В зависимости от характера поля вектора скорости жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений. В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале на длину контура l . Эту величину называли **циркуляцией** вектора \mathbf{v} по контуру Γ . Итак,

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = v l$$

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости $v = \text{const}$).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости, касательная к контуру, т. е. v_t . С этой составляющей связан импульс dp_t , модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины dl , имеет величину $\rho\sigma v_t dl$ (ρ — плотность жидкости, σ — площадь поперечного сечения канала).

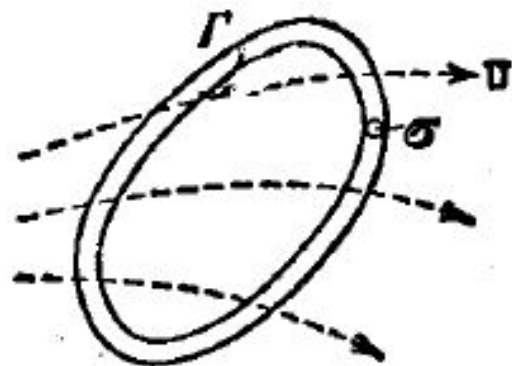


Рис. 11.8.

Так как жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление вектора dp_t , но не его величину. Взаимодействие между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выровняет скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма тангенциальных составляющих импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу,

теряемому второй частицей. Это означает, что

$$\rho\sigma v_l = \oint_{\Gamma} \rho\sigma v_t dl,$$

где v — скорость циркуляции, v_t — касательная составляющая скорости жидкости в объеме σdl в момент времени, предшествующий затвердеванию стенок канала ¹⁾). Сократив на $\rho\sigma$, получим, что

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = v l = \oint_{\Gamma} v_t dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора \mathbf{a} по произвольному замкнутому контуру Γ :

$$\text{циркуляция } \mathbf{a} \text{ по } \Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{a} dl = \oint_{\Gamma} a_t dl. \quad (11.16)$$

Может показаться, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 11.9). Линии тока (линии вектора \mathbf{v}) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора \mathbf{v} по изображенному пунктиром контуру, очевидно, отлична от нуля. Вместе с тем в поле с изогнутыми линиями циркуляция может оказаться равной нулю.

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это означает, что сумма циркуляций по контурам Γ_1 и Γ_2 , ограничивающим смежные поверхности S_1 и S_2 (рис. 11.10), равна циркуляции по контуру Γ , ограничивающему поверхность S , являющуюся суммой поверхностей S_1 и S_2 . Действительно, циркуляция C_1 по контуру,

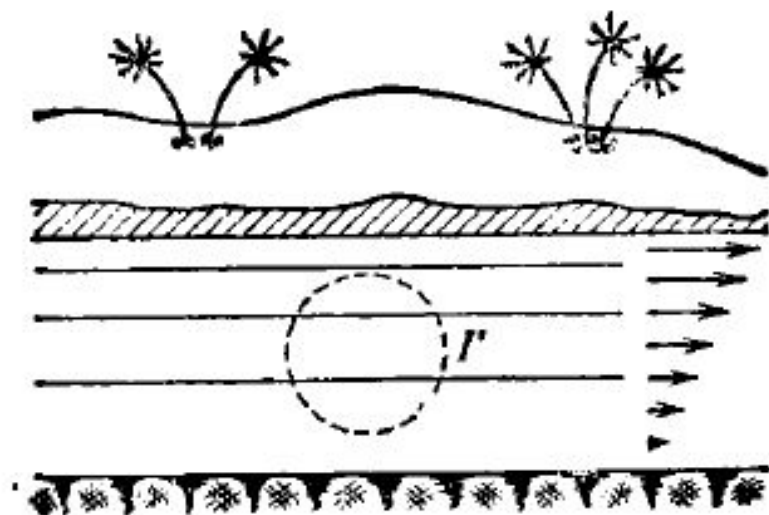


Рис. 11.9.

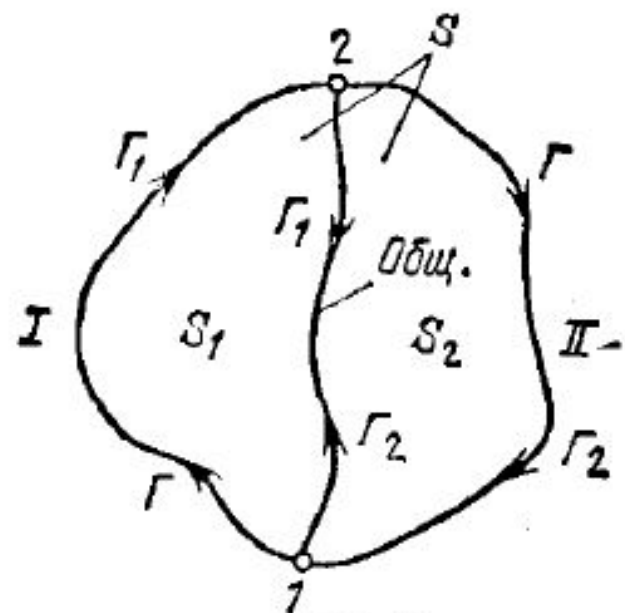


Рис. 11.10.

ограничивающему поверхность S_1 , может быть представлена как сумма интегралов:

$$C_1 = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{a} \, dl = \int_{(I)}^2 \mathbf{a} \, dl + \int_{(Общ.)}^1 \mathbf{a} \, dl. \quad (11.17)$$

$$C = \sum \Delta C_i. \quad (11.21)$$

Ротор. Аддитивность циркуляции позволяет ввести понятие удельной циркуляции, т. е. рассматривать отношение циркуляции C к величине поверхности S , «обтекаемой» циркуляцией. При конечных размерах поверхности S отношение C/S дает среднее значение удельной циркуляции. Это значение характеризует свойства поля, усредненные по поверхности S . Чтобы получить характеристику поля в точке P , нужно уменьшать размеры поверхности, стягивая ее в точку P . При этом отношение C/S стремится к некоторому пределу, который характеризует свойства поля в точке P .

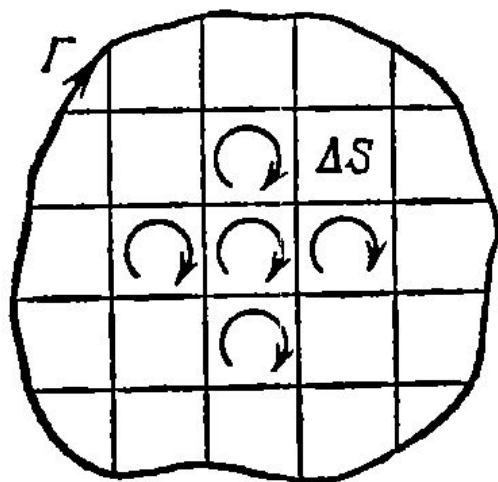


Рис. 11.11.








Примеры поиска закономерных соотношений ФВ

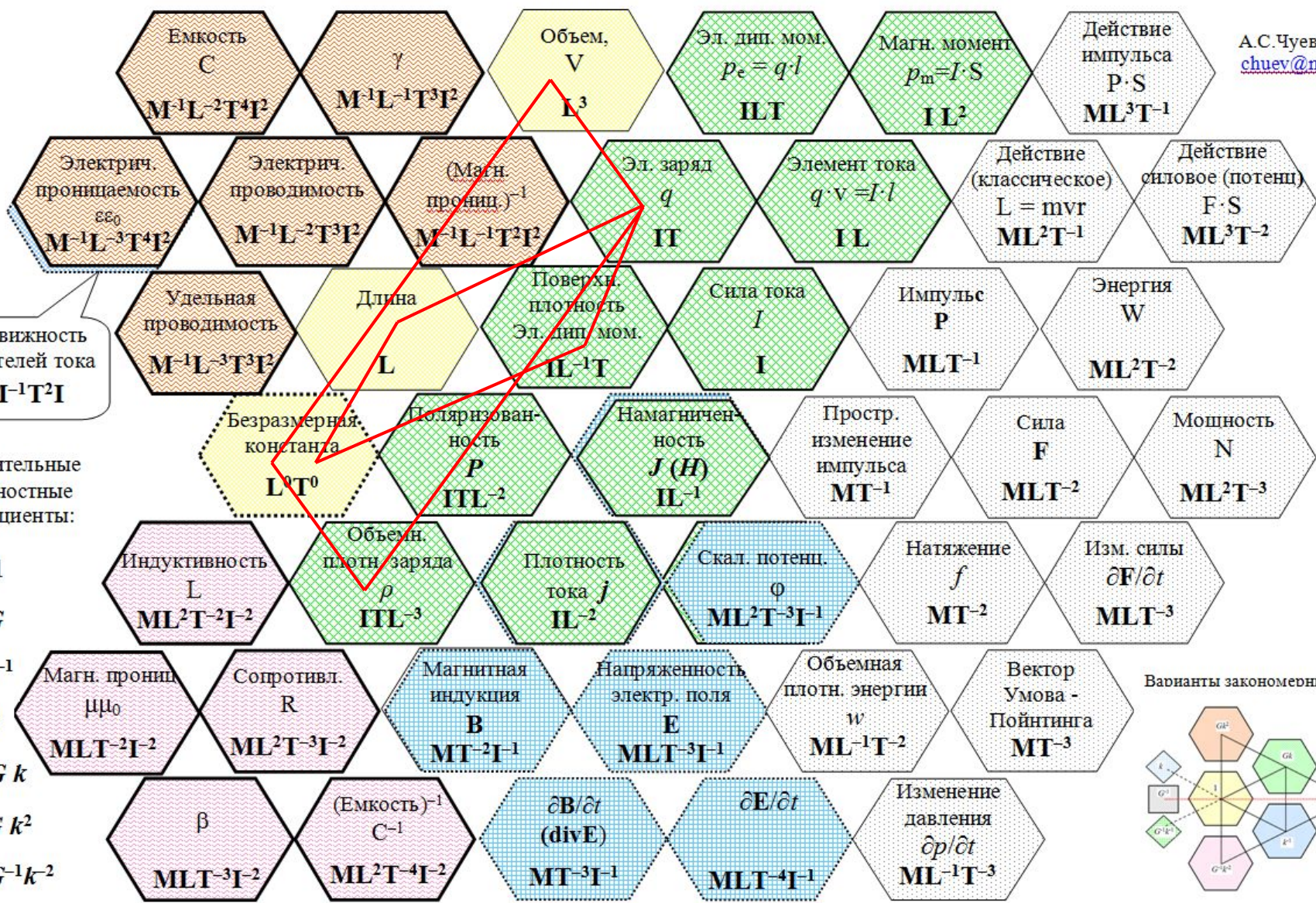
Система электромагнитных величин и их взаимосвязей

А.С. Чуев. 2013
chuev@mail.ru

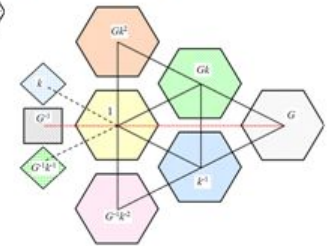
Подвижность носителей тока
 $M^{-1}T^2I$

Дополнительные размерностные коэффициенты:

-  1
-  G
-  k⁻¹
-  k
-  Gk
-  Gk²
-  G⁻¹k⁻²



Варианты закономерных связей










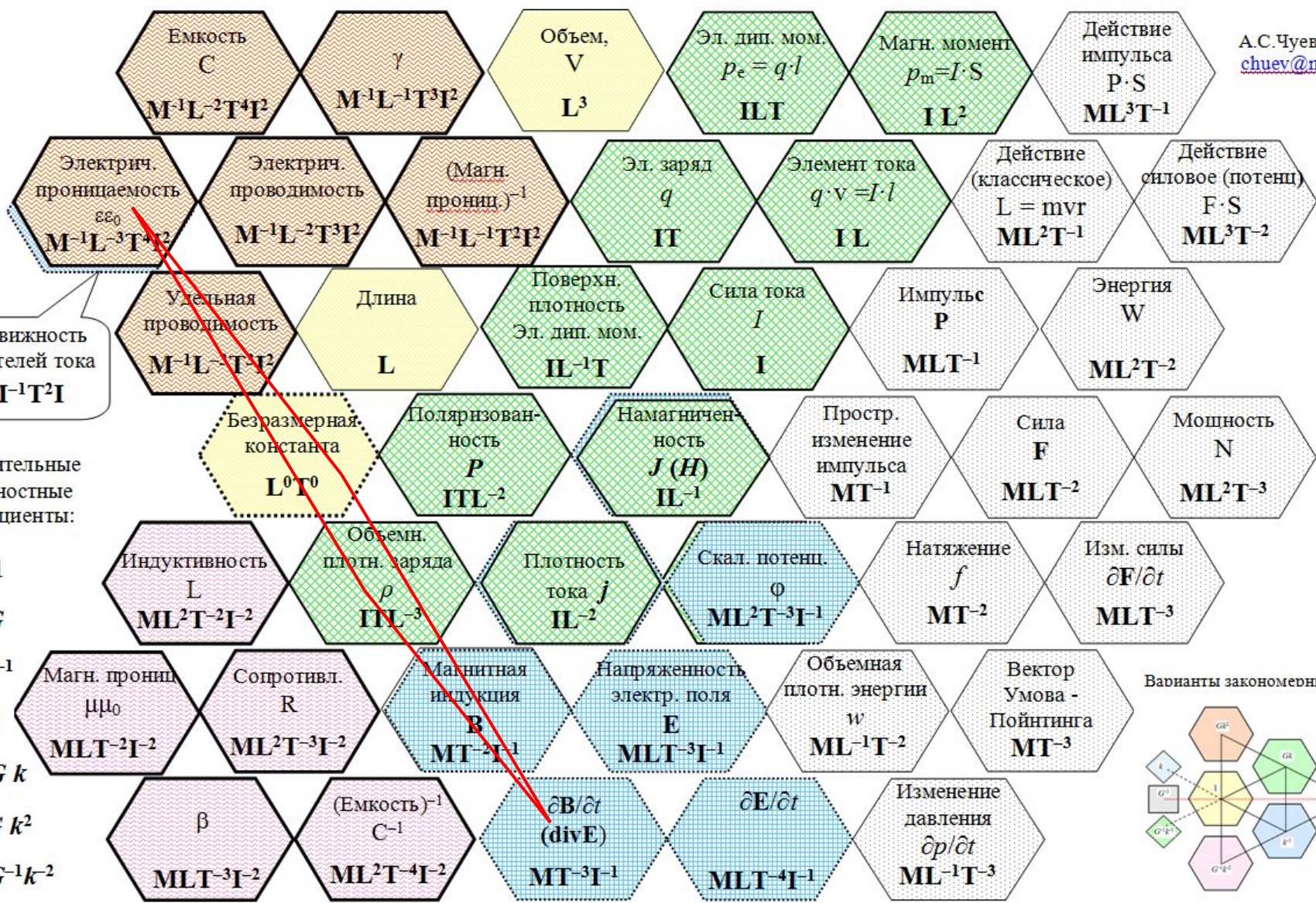
Система электромагнитных величин и их взаимосвязей

А.С. Чуев. 2013
chuev@mail.ru

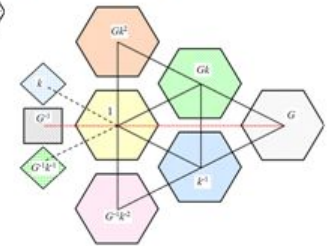
Подвижность носителей тока
 $M^{-1}T^2I$

Дополнительные размерные коэффициенты:

-  1
-  G
-  k⁻¹
-  k
-  Gk
-  Gk²
-  G⁻¹k⁻²

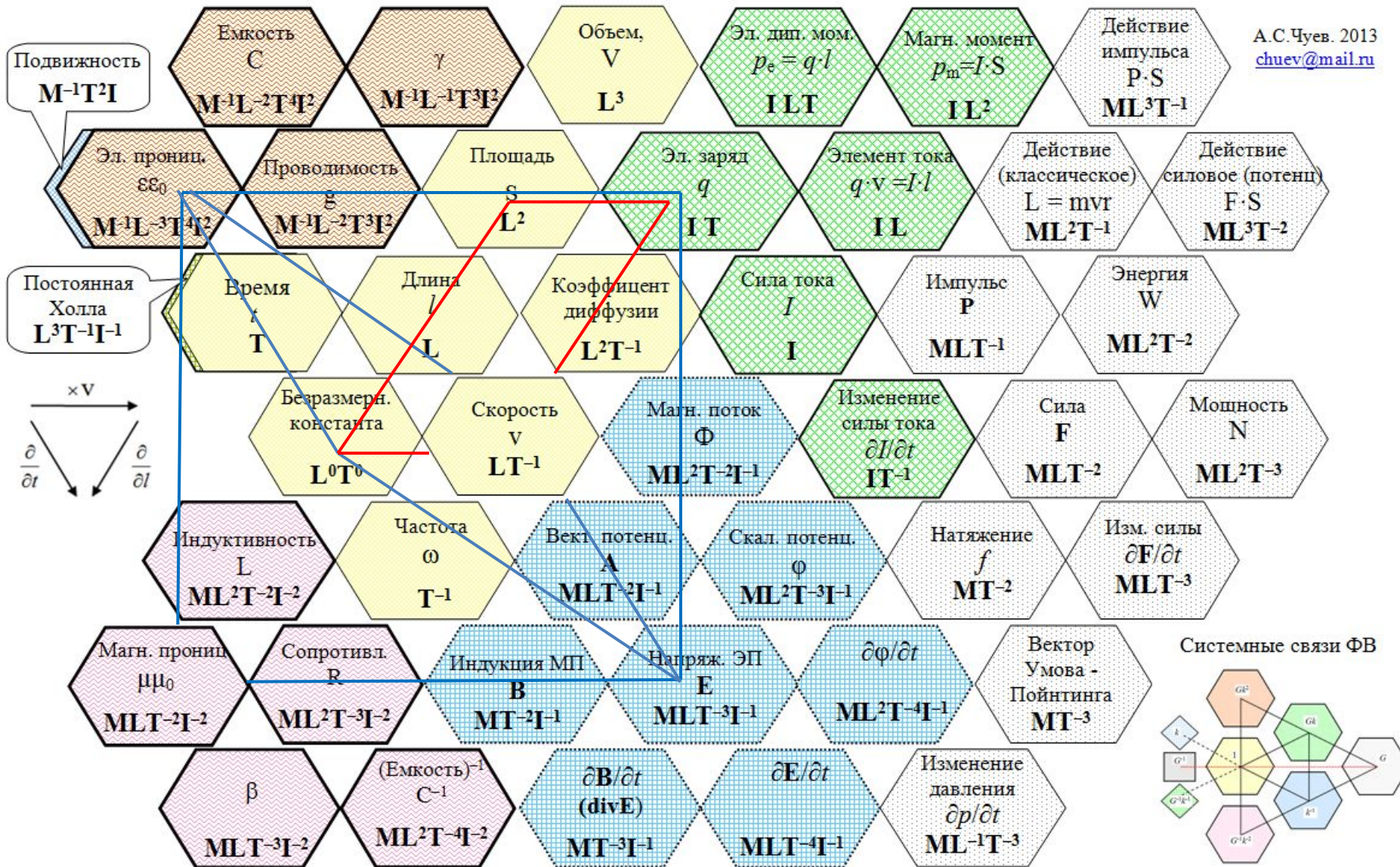


Варианты закономерных связей



СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

А.С.Чуев. 2013
chuev@mail.ru

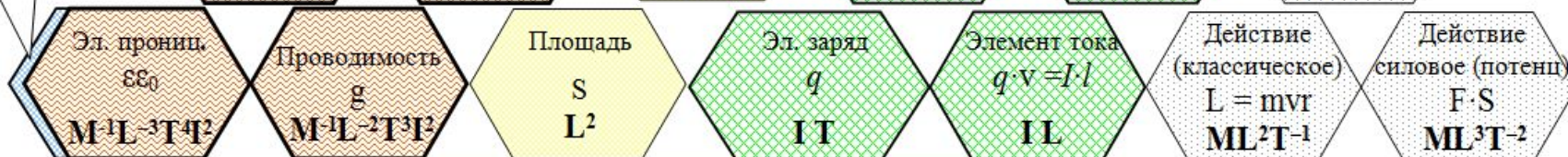
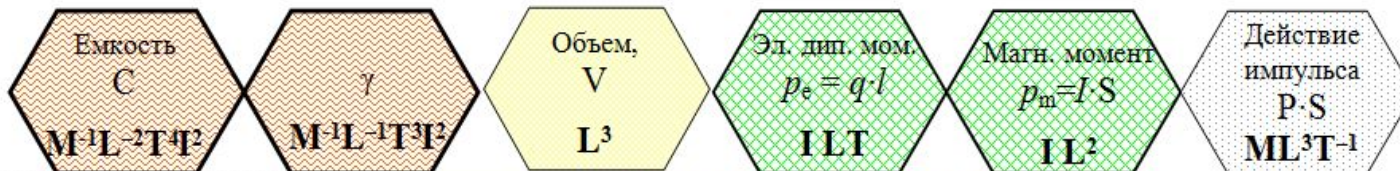


$$\epsilon_0 E = q / S = \sigma$$

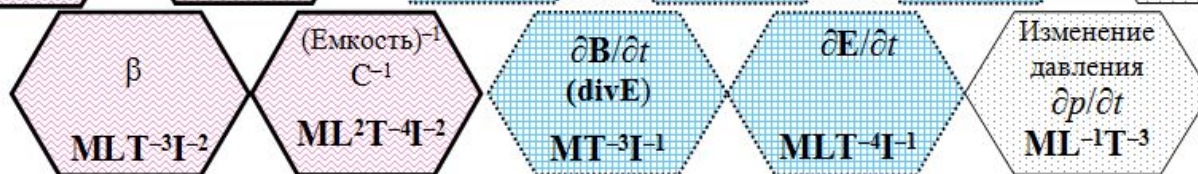
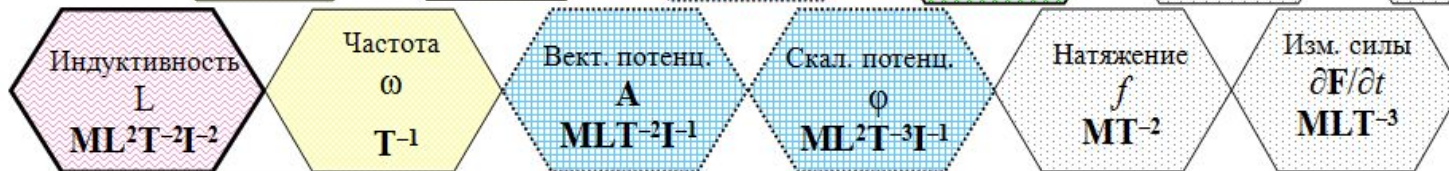
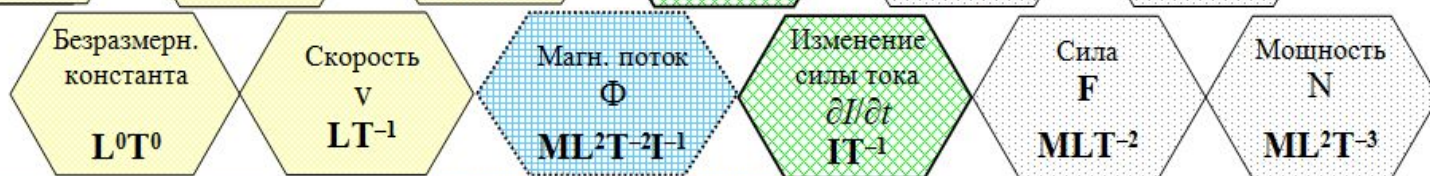
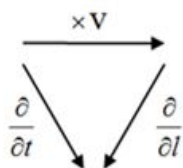
СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

А.С.Чуев. 2013
chuev@mail.ru

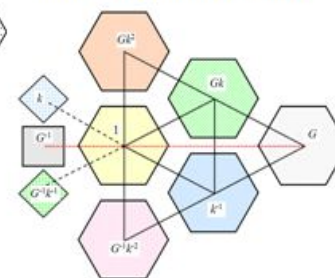
Подвижность
 $M^{-1}T^2I$



Постоянная Холла
 $L^3T^{-1}I^{-1}$



Системные связи ФВ



Конец лекции 2