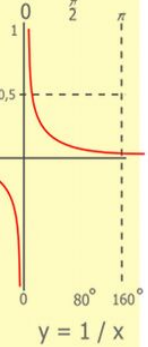
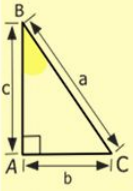
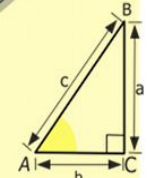
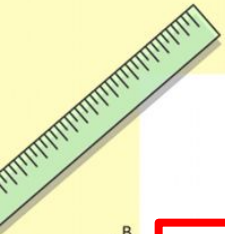


ГПОУ « Новоазовский индустриальный

ТЕМА Дифференциальные уравнения

Подготовлен преподавателем математики ГПОУ «НИТ» ФЕСЕНКО О.В.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

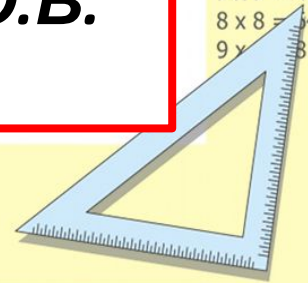
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



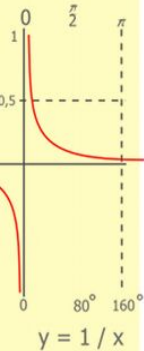
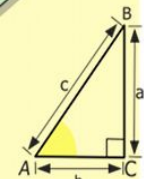
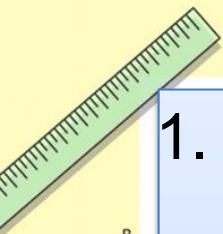
$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

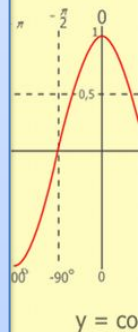
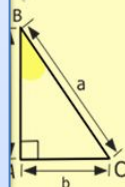
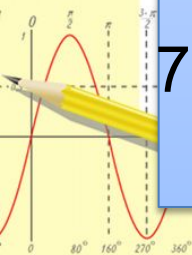


КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие данные называются начальными?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
7. По какому алгоритму находятся решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Рассмотрим задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

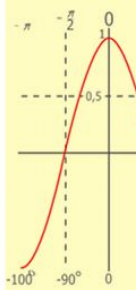
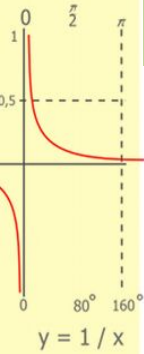
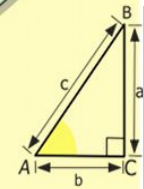
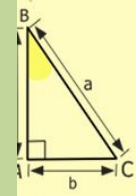
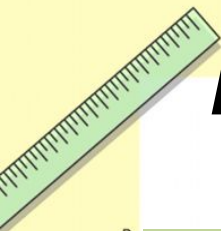
Задача №1

Найти закон движения точки, если её скорость задается $v = 4t^3 + 1$

Решение:

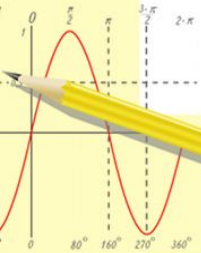
$$S = \int (4t^3 + 1) dt = \frac{4t^4}{4} + t + C = t^4 + t + C$$

$$S = t^4 + t + C$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

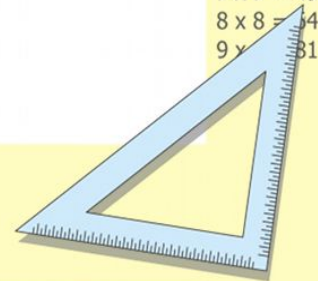
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Задача №2

Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(2;5)$, если угловой коэффициент касательной равен $2x$

Решение:

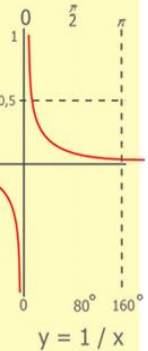
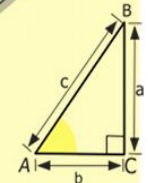
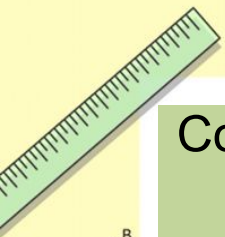
$$y = \int 2x dx = x^2 + C$$

$$y = x^2 + C$$

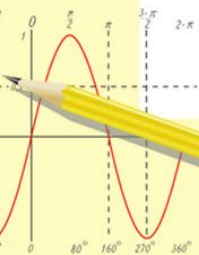
$$5 = 4 + C$$

$$C = 1$$

$$y = x^2 + 1$$



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 5 \ 00 \\ \times 42 \\ \hline 21 \ 0 \\ + 84 \\ \hline 105 \ 0 \ 00 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

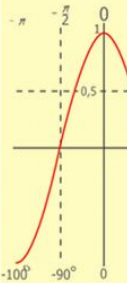
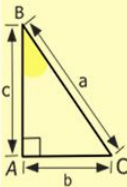
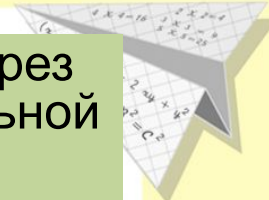


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

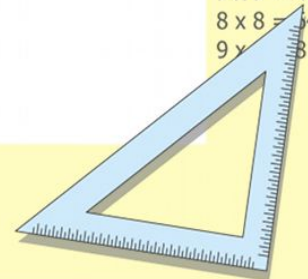
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



В предыдущих задачах решались уравнения, содержащие производные.

Это и есть дифференциальные уравнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ .

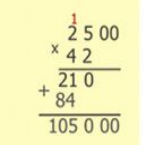
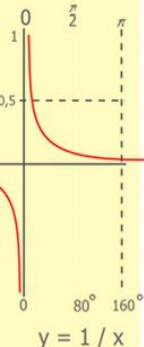
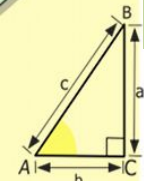
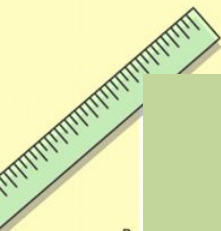
Дифференциальным уравнением

называется такое уравнение, которое связывает между собой переменную

, искомую функцию и её

производные или дифференциалы

$$F\left(x, y, dy, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{(n)} y}{dx^n}\right) = 0$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

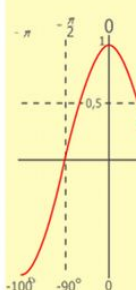
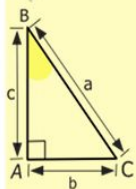
$$\sin 90^\circ = 1$$



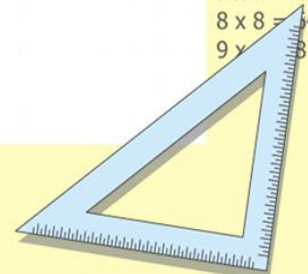
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

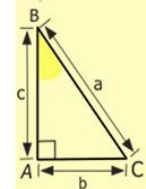
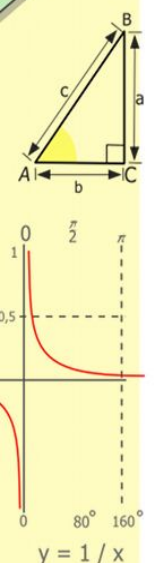
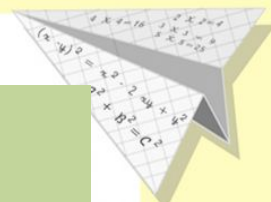
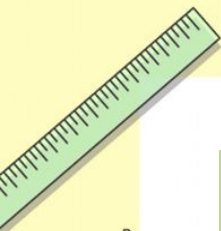


- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



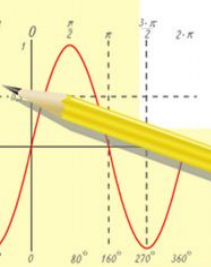
Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала) входящего в данное уравнение

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

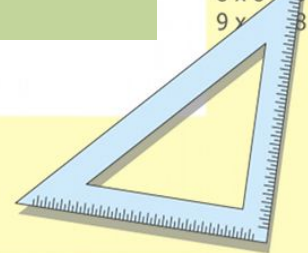
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

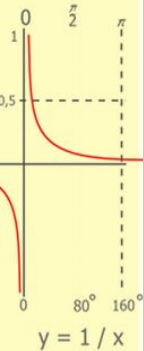
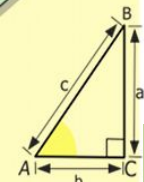
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



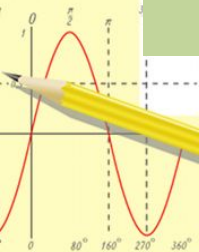
Различают общее и частное решения дифференциальных уравнений

Общее решение – содержит произвольные постоянные (по числу порядка)

Если из множества общих решений вычисляется значение C , то получим **частное решение** (говорят, что решает **задача Коши**)



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

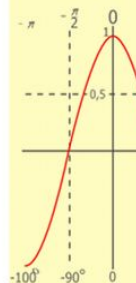
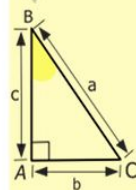


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

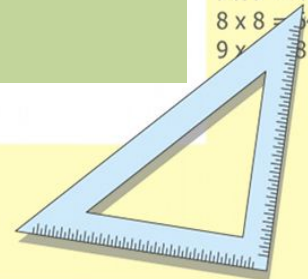
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Условия, задающие значения функции в фиксированной точке называются **начальными условиями (условиями Коши)**:

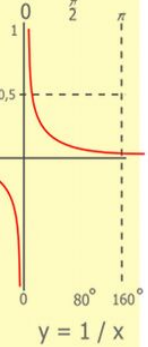
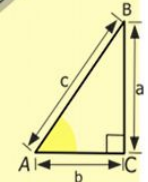
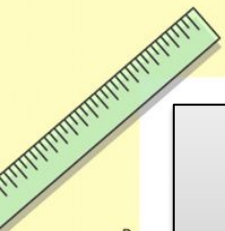
$$y|_{x=x_0} = y_0$$

$$y' = f(x, y)$$

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

Задача решения уравнения удовлетворяющего условию

называется **задачей Коши**



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 5 00 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105 0 00 \end{array}$$

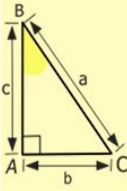
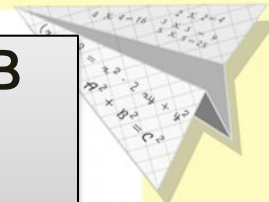


$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

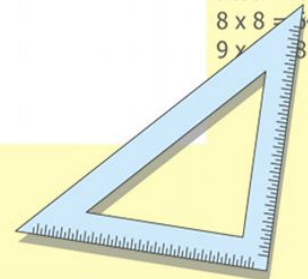


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



Отличия алгебраического

уравнения от

дифференциального:

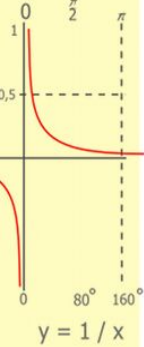
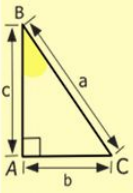
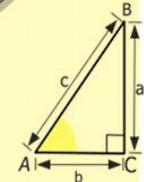
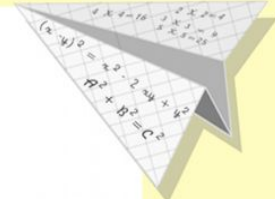
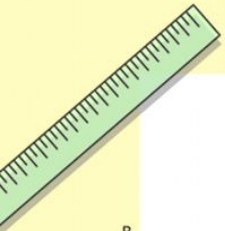
1) Алгебраическое уравнение – это зависимость между x, y

Дифференциальное – выражает соотношение между x, y, y'

2) Решением алгебраического уравнения является число

Решением дифференциального уравнения является функция

3) Дифференциальное уравнение решается интегрированием



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

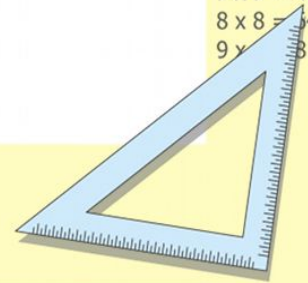


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Общий вид первого порядка:

1) Если дифференциальное уравнение $f(x; y)dy + \varphi(x; y)dx = 0$

можно привести к виду $f_1(y)dy + \varphi_1(x)dx = 0$

уравнение с разделенными переменными

Пример: $x + yy' = 0 \Rightarrow x + y \frac{dy}{dx} = 0 \mid * dx$

$$x dx + y dy = 0$$

$$\int x dx + \int y dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$x^2 + y^2 = C_1$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

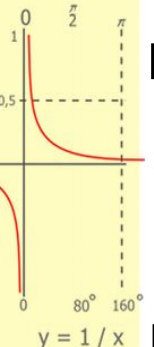
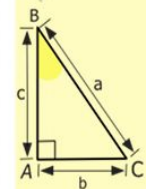
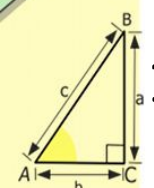
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

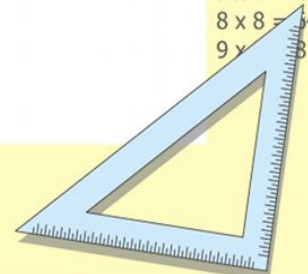
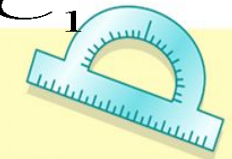
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



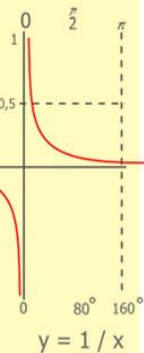
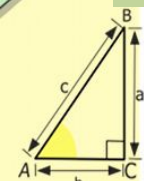
1	2 5 00
x	4 2
	21 0
+	8 4
	105 0 00

2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81

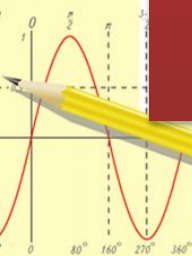


Алгоритм решения дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными

- 1) Производную записать через дифференциальные уравнения
- 2) Члены уравнения с одинаковыми дифференциальными уравнениями перенести
- 3) Разделить переменные
- 4) Проинтегрировать обе части, найти общее решение
- 5) Если задана задача Коши, найти частное решение



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

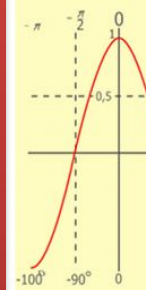
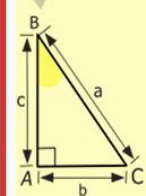


$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

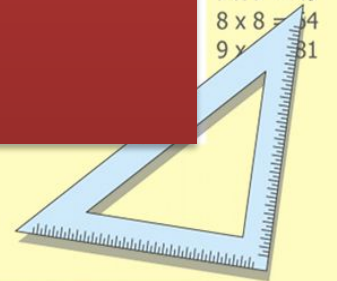
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81



Решить уравнение

$$xy' = y$$

$$x \frac{dy}{dx} = y \mid dx$$

$$x dy = y dx \mid : xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

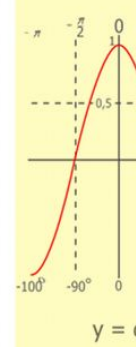
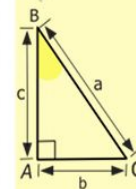
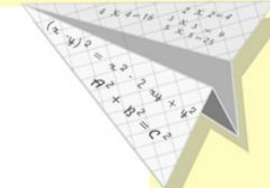
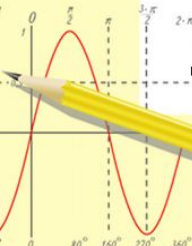
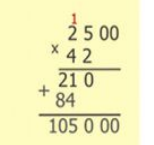
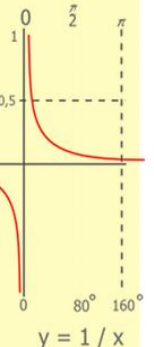
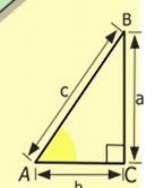
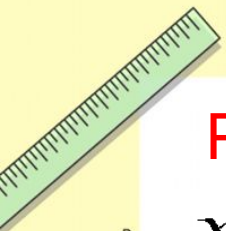
$$\ln y = \ln x + \ln |C_1|$$

$$\ln y = \ln(x * C_1)$$

$$y = xC_1 - \text{íáùãã ðãøãíèã}$$

$$y = 2 \text{ ìðè } x = 1$$

$$C_1 = 2 \Rightarrow y = 2x - \text{ãñòíã ðãøãíèã}$$



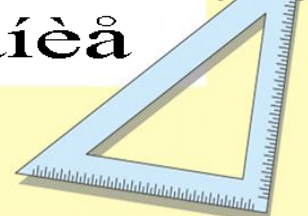
- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 30^\circ \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- Задача** Найти закон движения тела по оси ox , если оно начало двигаться из точки $M(4; 0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$ т.е. $v =$

$$x'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$$

$$dx = (2t + 3t^2) dt$$

$$\int dx = \int (2t + 3t^2) dt$$

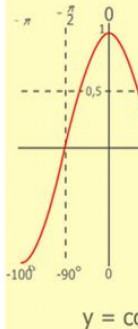
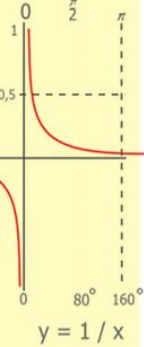
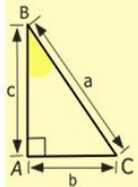
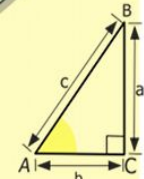
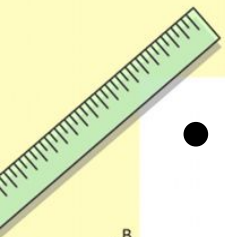
$$x = t^2 + t^3 + C$$

идёт

$$x = 4 \quad \text{è} \quad t = 0$$

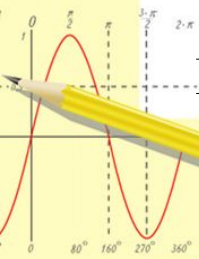
$$C = 4 \Rightarrow x = t^2 + t^3 + 4$$

Итак, закон движения тела имеет вид $x = t^3 + t^2 + 4$



$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

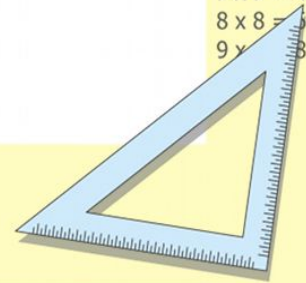
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



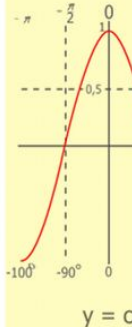
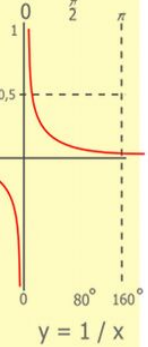
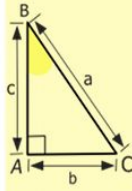
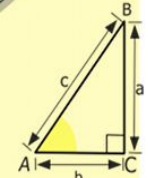
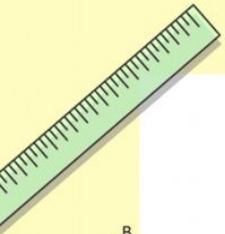
$$\begin{cases} \sin 90^\circ \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



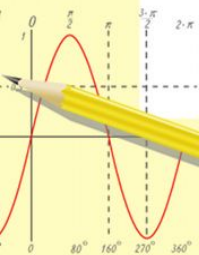
ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Из предложенных дифференциальных уравнений выбрать любые три и найти их общее и частное решение



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

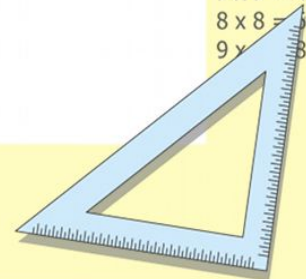
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Решить дифференциальные уравнения, найти частные решения:

1. $dS = (4t - 3)$ при $t = 0; S = 0$

2. $dx = (2t^2 - 5)$ при $t = 1; x = -4$

3. $x dx = dy$ при $x = 1; y = 0$

4. $x^2 dx + y dy = 0$ при $x = 1; y = 0$

5. $\frac{2dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ при $x = 1; y = \sqrt{2}$

6. $\frac{dy}{2x} = -\frac{dx}{y}$ при $x = 0; y = 2$

7. $\frac{2dy}{dx} = 1 + x^2$ при $x = 0; y = 0$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

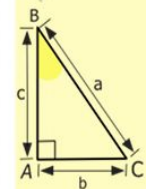
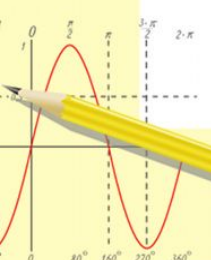
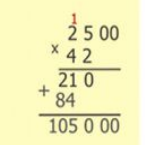
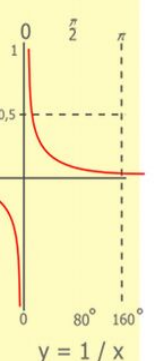
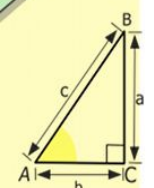
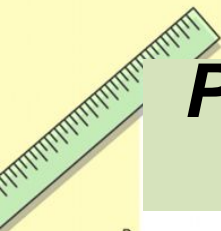
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81

