

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
СКОРОСТИ И
УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Определение скорости при разных способах задания движения точки.

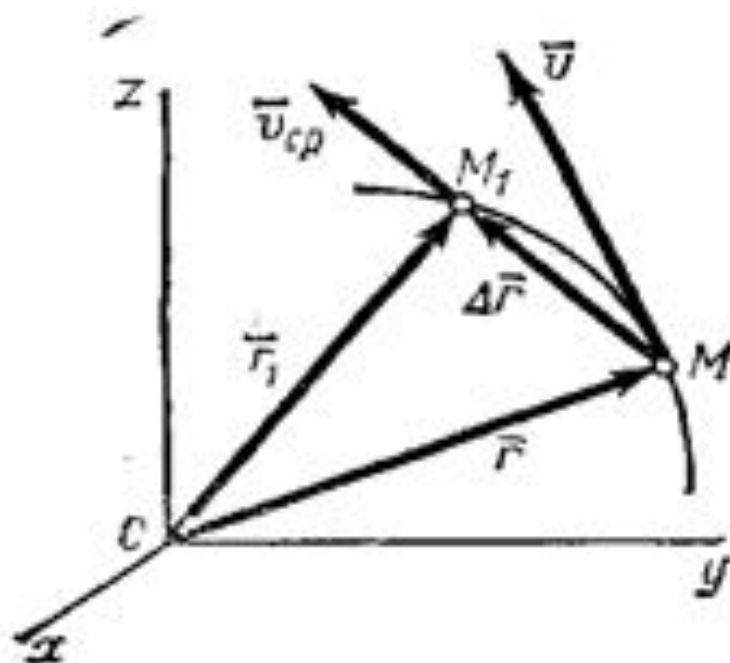
векторный способ задания движения точки.

Векторный способ задания движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

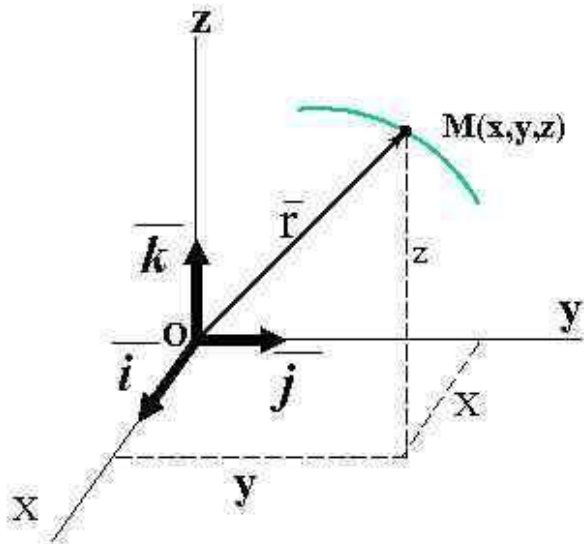
$$\vec{v}_{\text{ср}} = \overline{MM_1} / \Delta t = \Delta \vec{r} / \Delta t.$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Координатный способ задания движения точки.

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

Естественный способ задания движения точки

$$S = f(t).$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = 1; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Следовательно:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Определение ускорения. Касательное и нормальное ускорение точки

Векторный способ задания движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

$$\vec{a}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{a}_{\text{cp}}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Координатный способ задания движения точки

В декартовых координатах

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

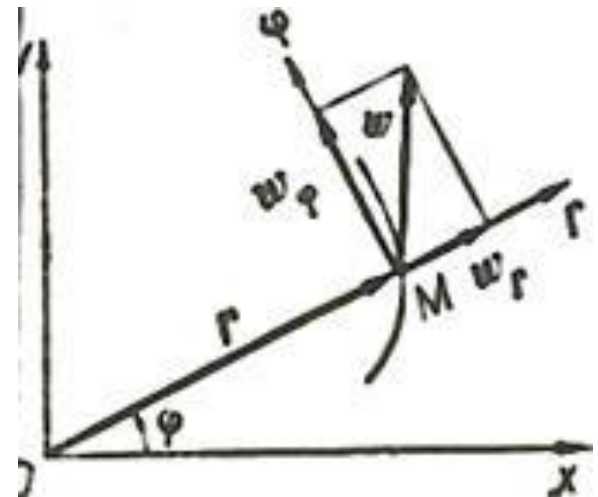
В полярных координатах

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

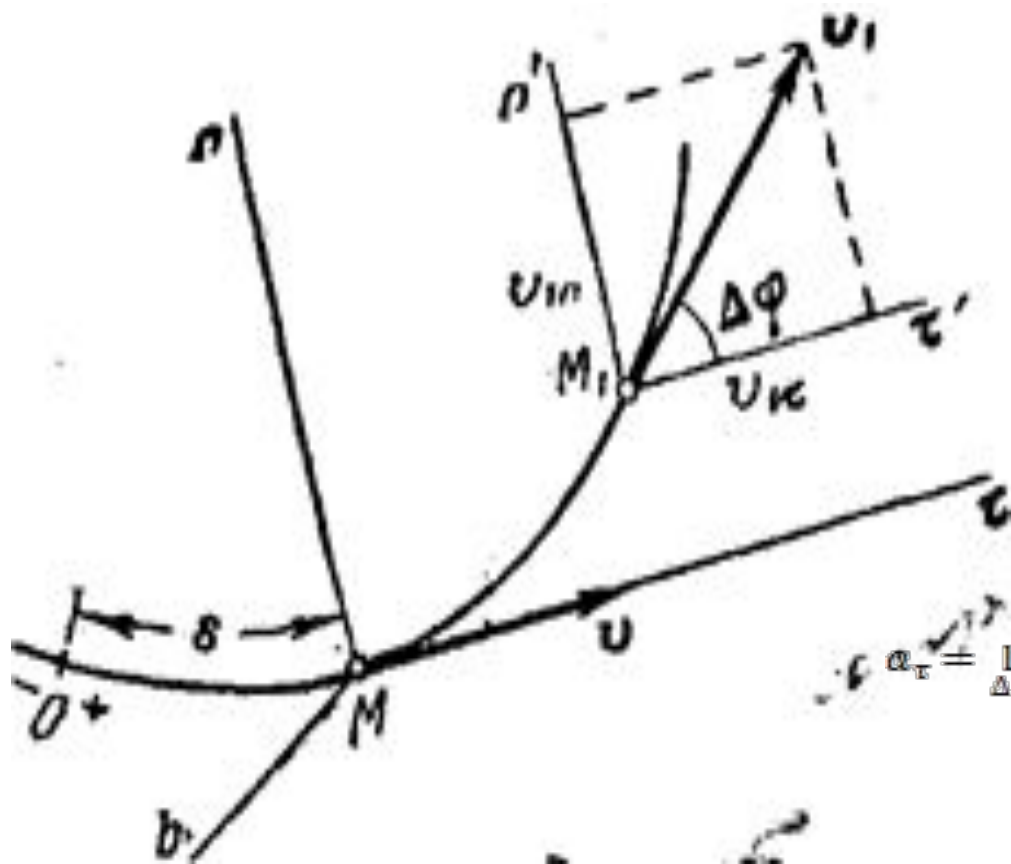
$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r} \cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\varphi - r\ddot{\varphi} \cos\varphi + r\dot{\varphi}^2 \sin\varphi,$$
$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r} \sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos\varphi - r\ddot{\varphi} \sin\varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos\varphi.$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2}.$$



Естественный способ задания движения точки



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}.$$

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1r} - v_r}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

$$\begin{cases} v_r = v, & v_n = 0 \\ v_{1r} = v_1 \cos \Delta \varphi, & v_{1n} = v_1 \sin \Delta \varphi, \end{cases}$$

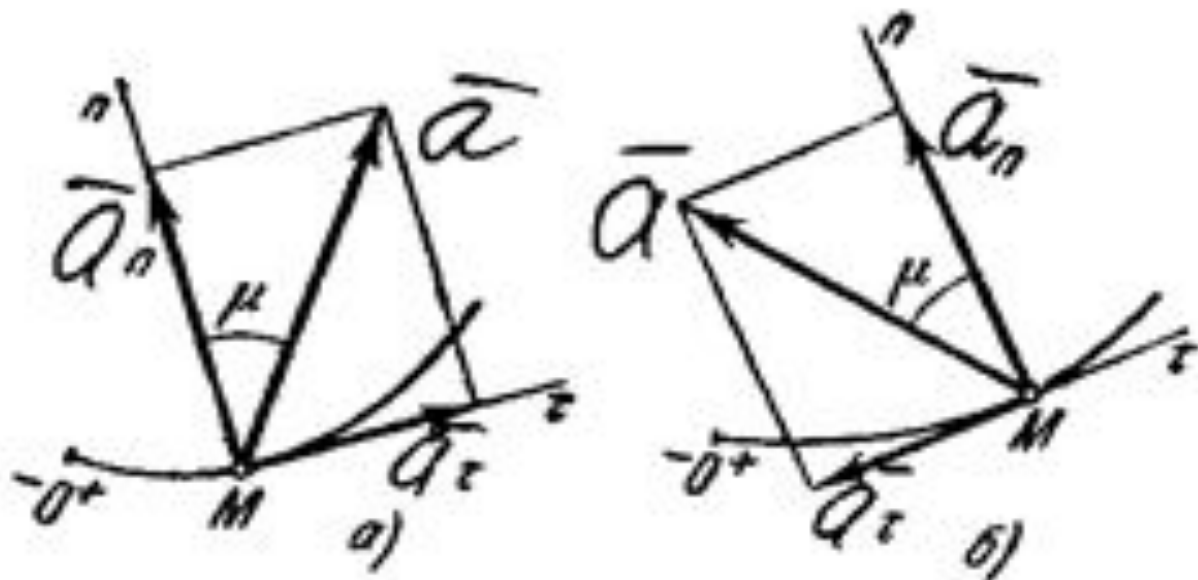
$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta \varphi - v}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta t} \right).$$

$$a_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta \varphi \Delta \varphi \Delta s}{\Delta \varphi \Delta s \Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

$$\lim v_1 = v, \quad \lim \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1, \quad \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

Касательное ускорение точки характеризует изменение вектора её скорости по величине. Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движущейся точки в ту же сторону, что и вектор скорости точки, когда движение точки ускоренное, и в обратную сторону, когда – замедленное.

Нормальное ускорение точки характеризует изменение вектора её скорости по направлению. Вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к траектории движущейся точки в сторону вогнутости траектории.