ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

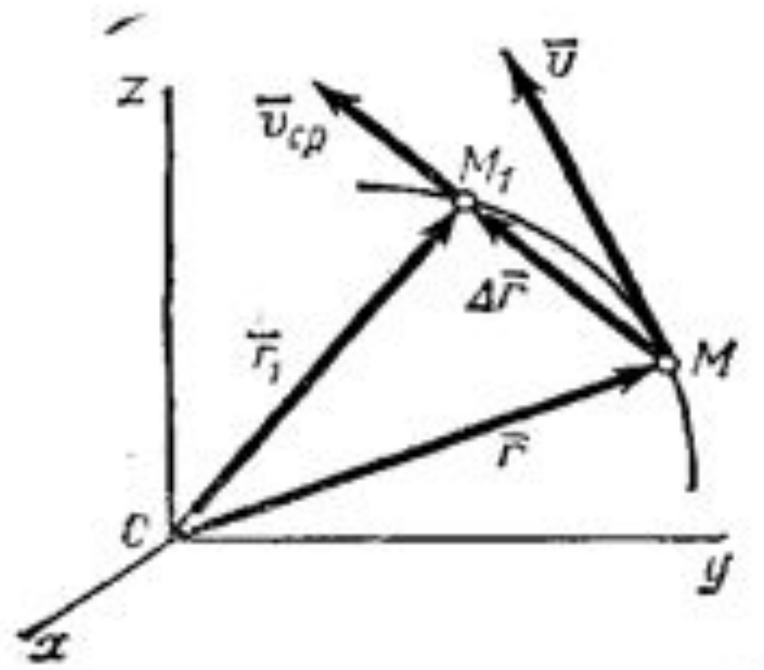
Определение скорости при разных способах задания движения точки.

Векторный способ задания движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

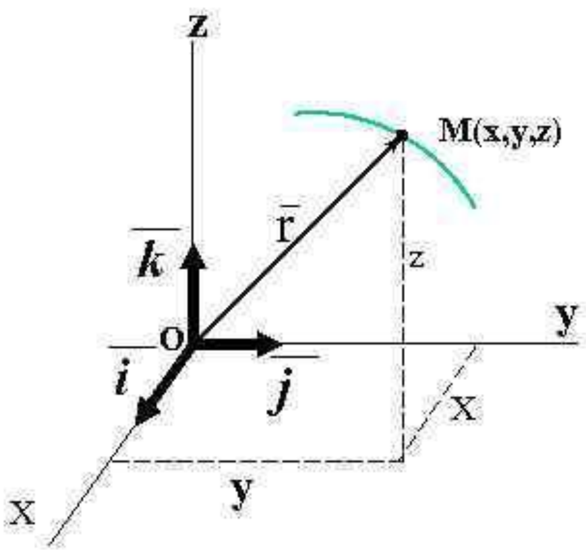
$$\vec{v}_{\text{ср}} = \overline{M\vec{M}_1}/\Delta t = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}(\vec{v}_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$



Координатный способ задания движения точки.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(\mathrm{t}).$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

Естественный способ задания движения точки

$$S = f(t).$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = 1; \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Следовательно:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Определение ускорения. Касательное и нормальное ускорение точки

Векторный способ задания движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} \quad \lim_{\Delta t \to 0}\left(\vec{a}_{\text{ср}}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Координатный способ задания движения точки

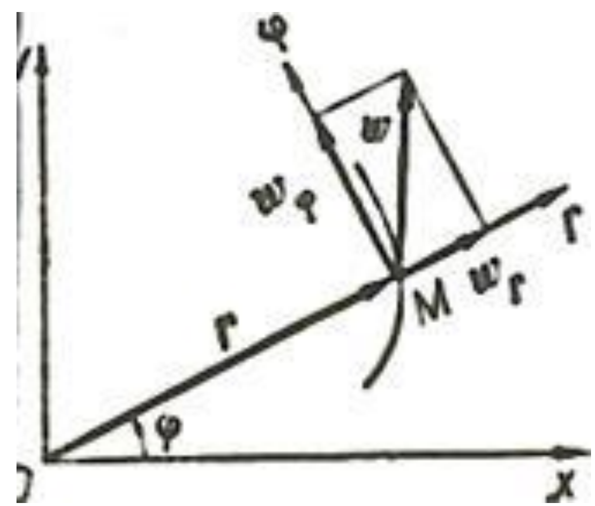
В декартовых координатах

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

В полярных координатах



$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

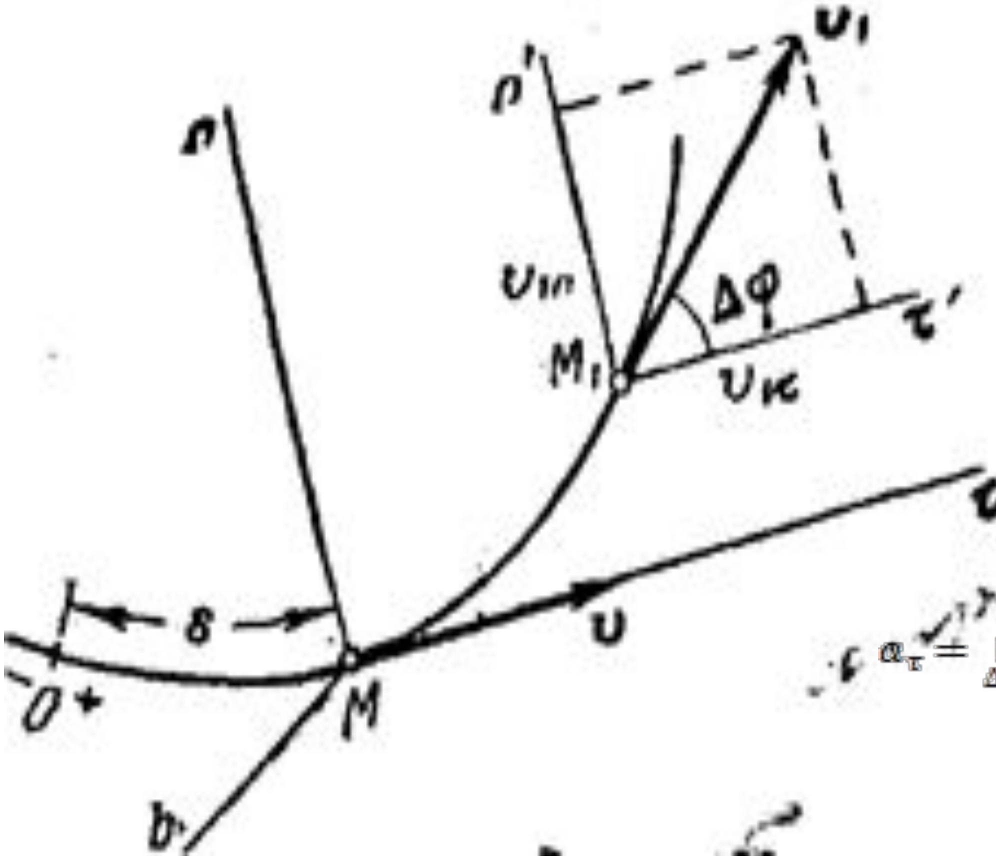
$$a_x = x = r\cos\varphi - 2r\varphi\sin\varphi - r\cos\varphi \cdot \varphi^2 - r\sin\varphi \cdot \varphi,$$

$$a_y = y = r\sin\varphi + 2r\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \varphi^2 + r\cos\varphi \cdot \varphi.$$

$$a_r = r - r\varphi^2, \quad a_\varphi = 2r\varphi + r\varphi.$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(r - r\varphi^2)^2 + (2r\varphi + r\varphi)^2}.$$

Естественный способ задания движения точки



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}.$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

$$\begin{cases} v_\tau = v, \quad v_n = 0 \\ v_{1\tau} = v_1 cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 sin\Delta\varphi, \end{cases}$$

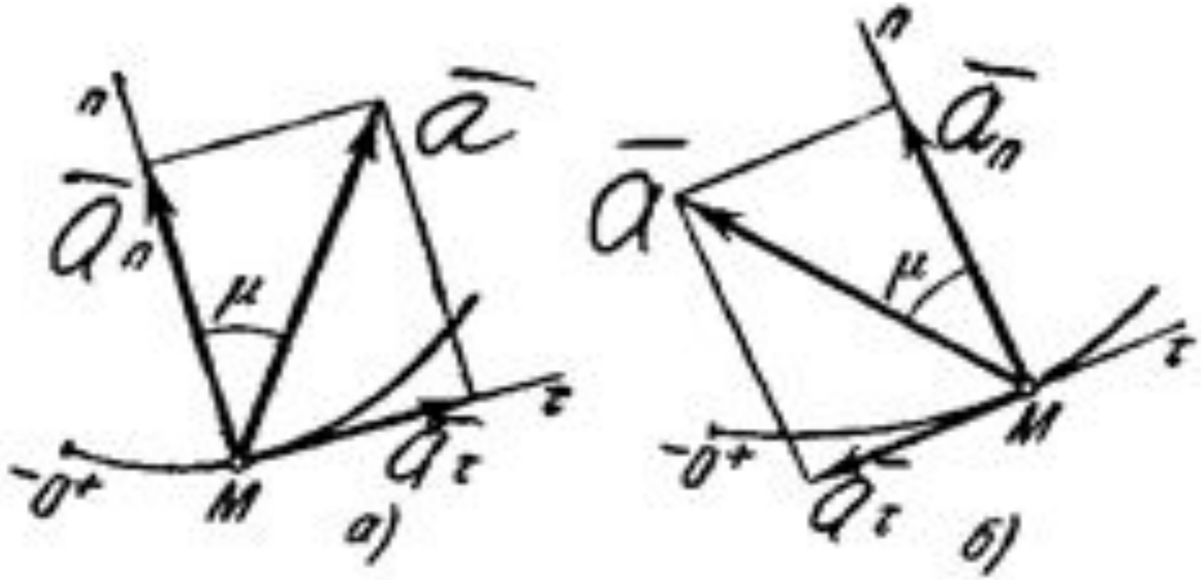
$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{sin\Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{p},$$

$$lim v_1 = v, \quad lim \frac{sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \quad lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{p}, \quad lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \qquad a_n = \frac{v^2}{p}.$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)}.$$

Касательное ускорение точки характеризует изменение вектора её скорости по величине. Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движущейся точки в ту же сторону, что и вектор скорости точки, когда движение точки ускоренное, и в обратную сторону, когда – замедленное.

Нормальное ускорение точки характеризует изменение вектора её скорости по направлению. Вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к траектории движущейся точки в сторону вогнутости траектории.