

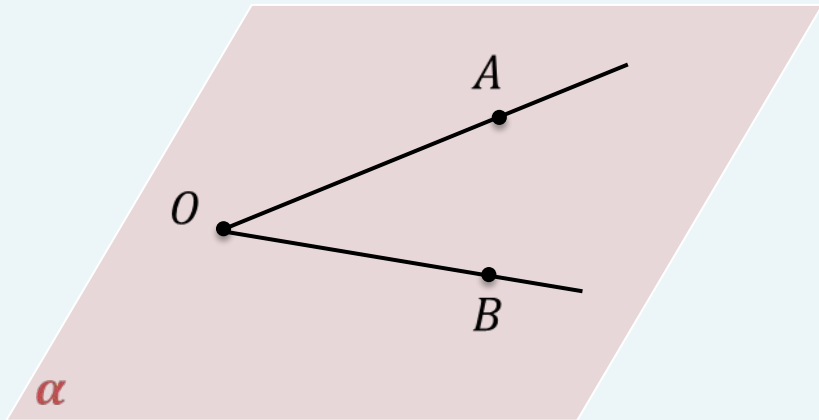
A diagram illustrating a dihedral angle. It shows two overlapping, semi-transparent light pink planes that meet at a common edge. A thin red line is drawn along this edge, extending from the vertex of the angle towards the right. The text "Двугранный угол" is centered over the diagram in a bold, dark blue font.

# Двугранный угол

## Планиметрия

*Угол* – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

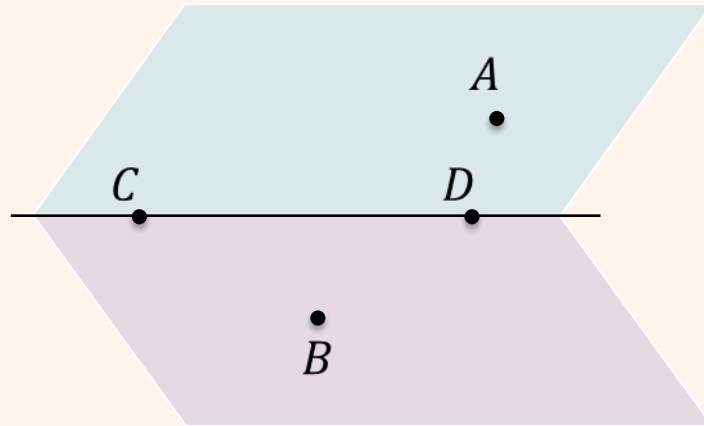
$\angle AOB$



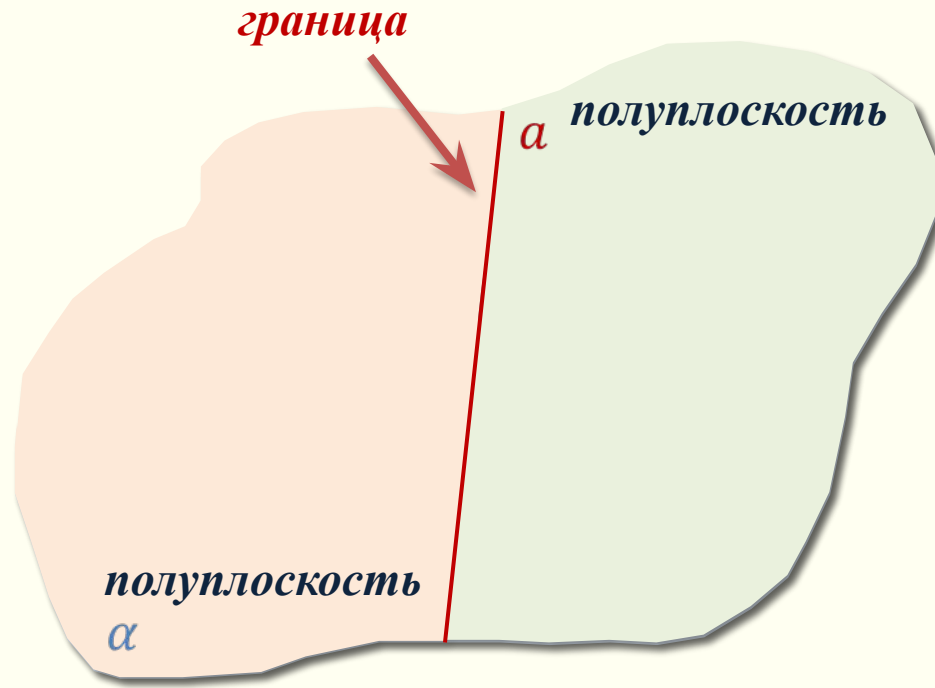
## Стереометрия

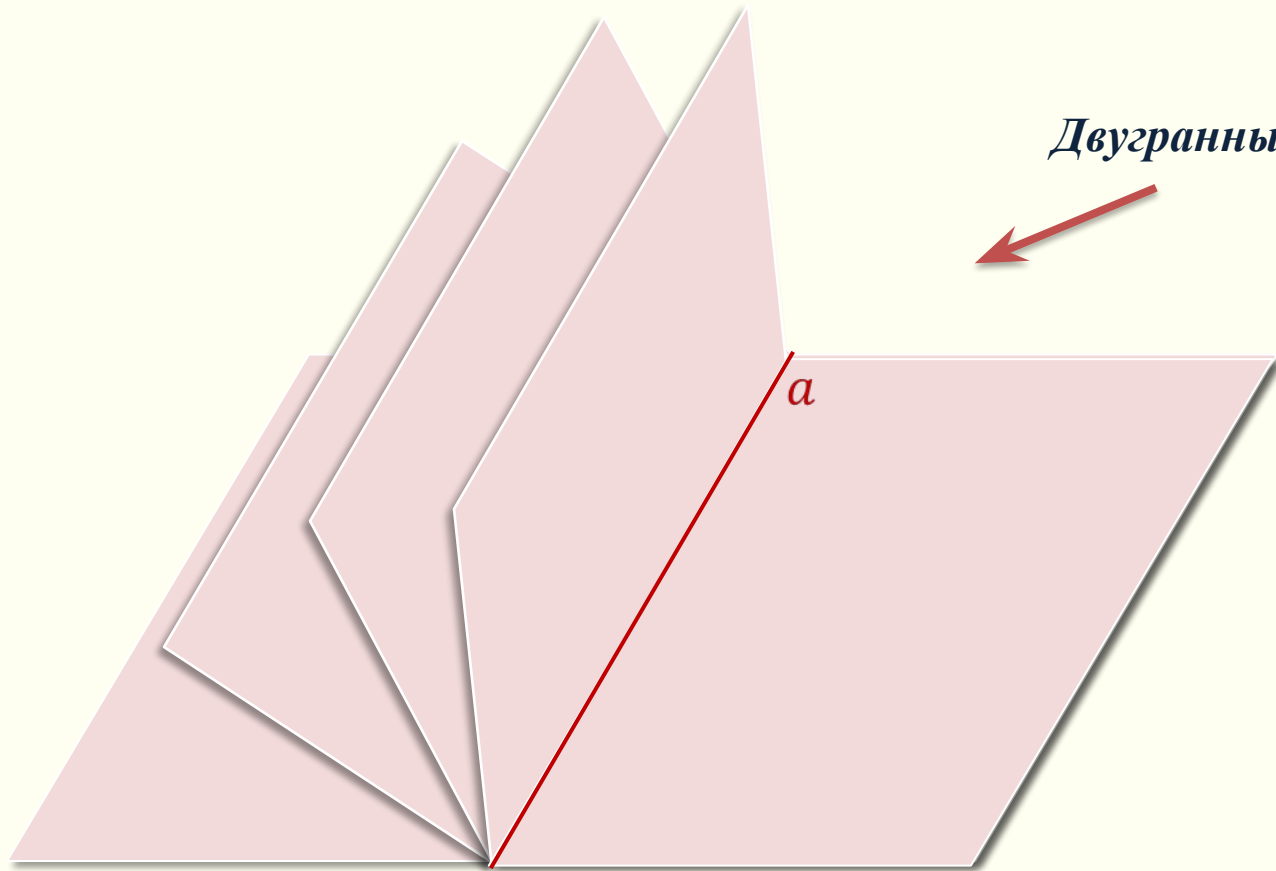
*Двугранные углы*

$ACDB$



**Аксиома планиметрии:** *любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости.*





*Двугранный угол*

**Определение.** *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой  $a$  и двумя полуплоскостями с общей границей  $a$ , не принадлежащими одной плоскости.

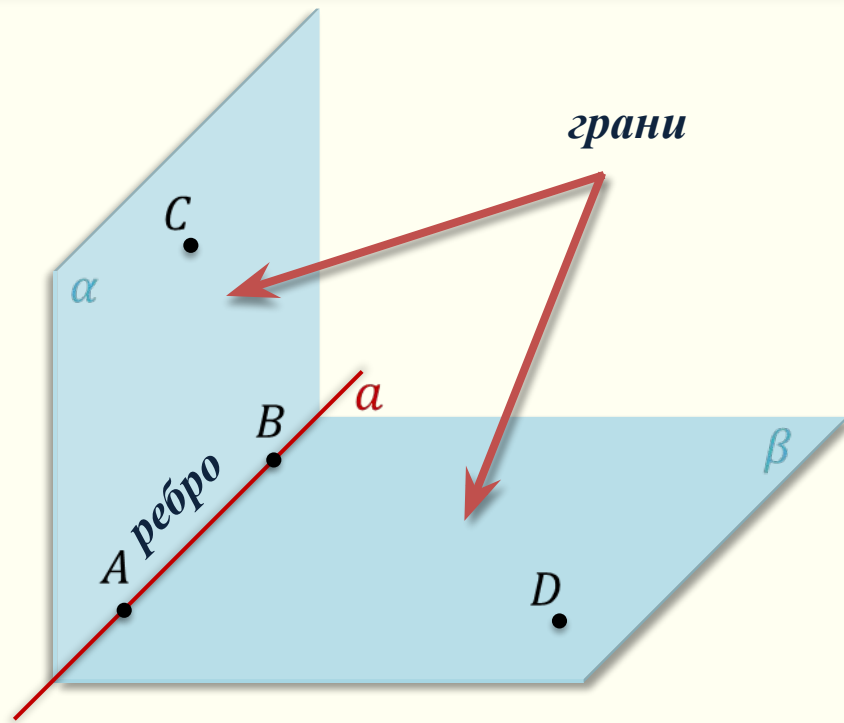
Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая  $a$  называется *ребром* двугранного угла.

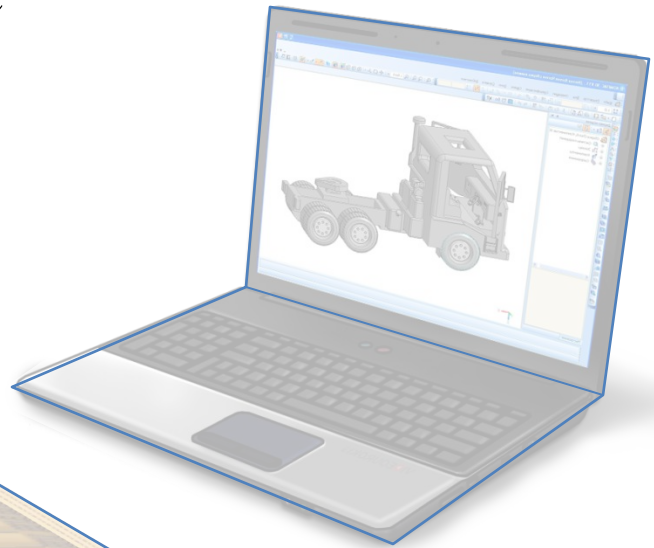
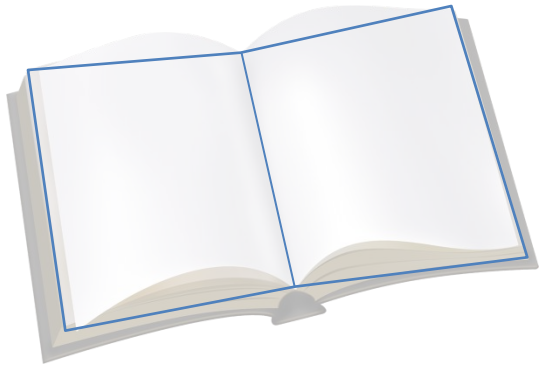
Двугранный угол, ребро которого есть прямая  $AB$ , а гранями являются полуплоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , обозначают так:

**$\alpha AB\beta$**

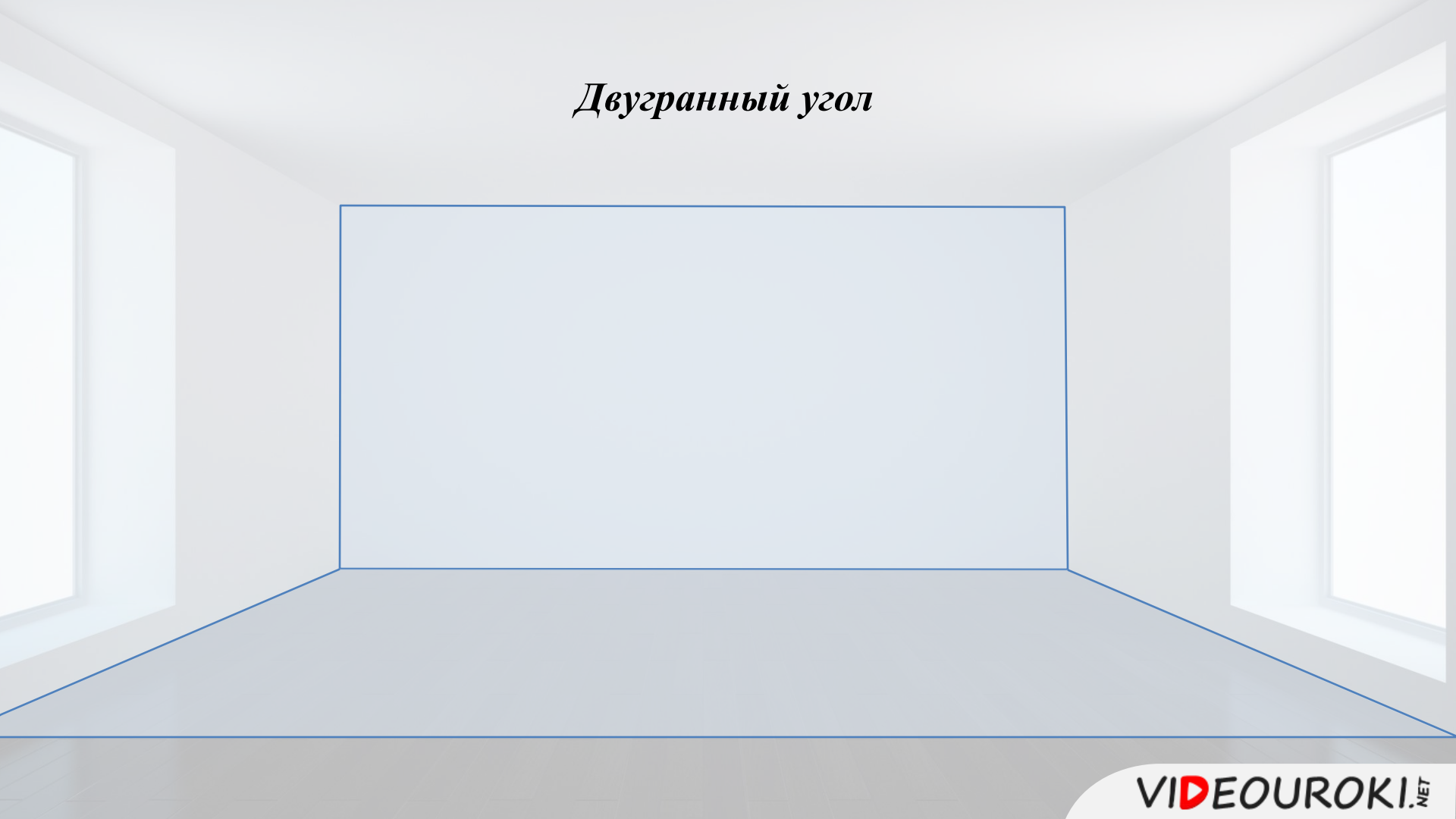
Двугранный угол с ребром  $AB$ , на разных гранях которого отмечены точки  $C$  и  $D$ , то двугранный угол называют  **$CABD$** .



# *Двугранный угол*



# *Двугранный угол*



Для измерения двугранного угла вводится понятие *линейного угла*.

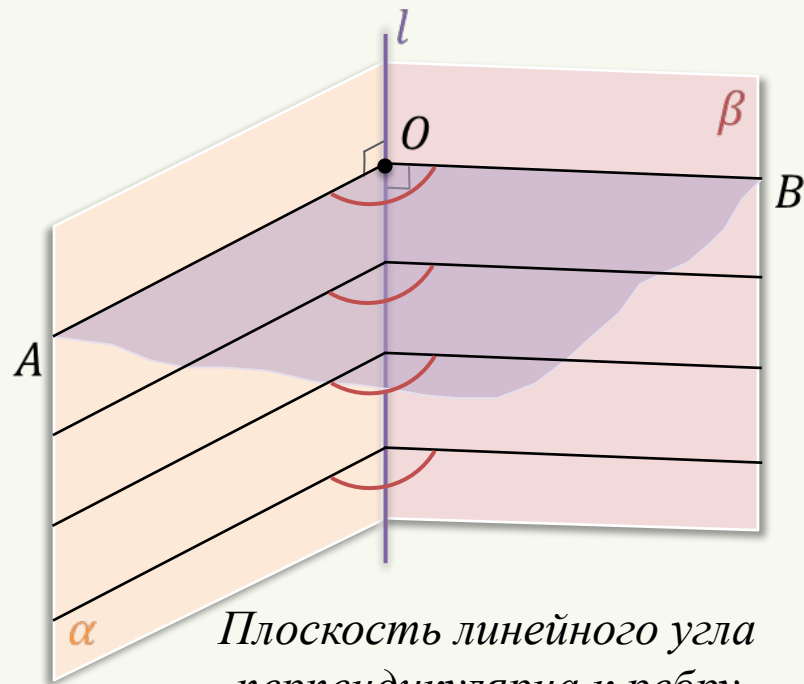
Пусть  $O \in l$ .

$OA \subset \alpha$ ,  $OB \subset \beta$

$OA \perp l$ ,  $OB \perp l$

$\angle AOB$ , сторонами которого служат лучи  $OA$  и  $OB$ , называется *линейным углом* данного двугранного угла.

**Определение.** *Линейным углом двугранного угла* называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.



*Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.*

*Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.*



**Все линейные углы двугранного угла равны между собой.**

**Доказательство.**

Рассмотрим  $\angle AOB$  и  $\angle A_1O_1B_1$ .

$OA \subset \alpha, O_1A_1 \subset \alpha, OA \perp l, O_1A_1 \perp l \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$

$OB \subset \beta, O_1B_1 \subset \beta, OB \perp l, O_1B_1 \perp l \Rightarrow OB \parallel O_1B_1$

$M \in OA, M_1 \in O_1A_1, OM = O_1M_1$

$N \in OB, N_1 \in O_1B_1, ON = O_1N_1$

Так как  $OM = O_1M_1, OM \parallel O_1M_1$ , то  
четырёхугольник  $OMM_1O_1$  – параллелограмм.

Значит,  $OO_1 = MM_1$  и  $OO_1 \parallel MM_1$ .

Так как  $ON = O_1N_1, ON \parallel O_1N_1$ , то  
четырёхугольник  $ONN_1O_1$  – параллелограмм.

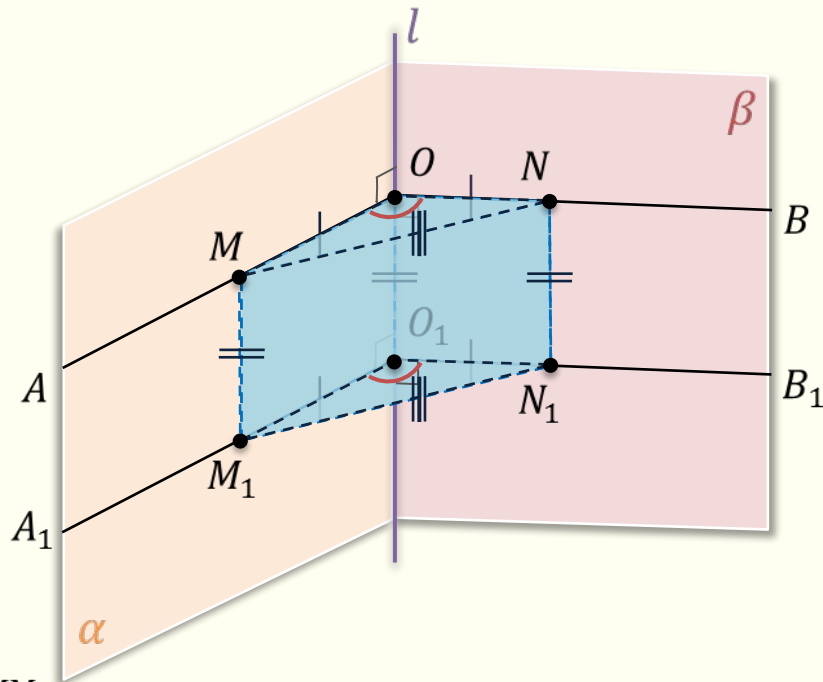
Значит,  $OO_1 = NN_1$  и  $OO_1 \parallel NN_1$ .

$MM_1 = NN_1$  и  $MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow NMM_1N$  – параллелограмм

Следовательно,  $NM = N_1M_1$ .

$\triangle OMN = \triangle O_1M_1N_1$  (по трем сторонам)  $\Rightarrow \angle MON = \angle M_1O_1N_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

**Что и требовалось доказать.**



**Все линейные углы двугранного угла равны между собой.**

**Доказательство.**

Рассмотрим  $\angle AOB$  и  $\angle A_1O_1B_1$ .

$OA \subset \alpha$ ,  $O_1A_1 \subset \alpha$ ,  $OA \perp OO_1$ ,  $O_1A_1 \perp OO_1$

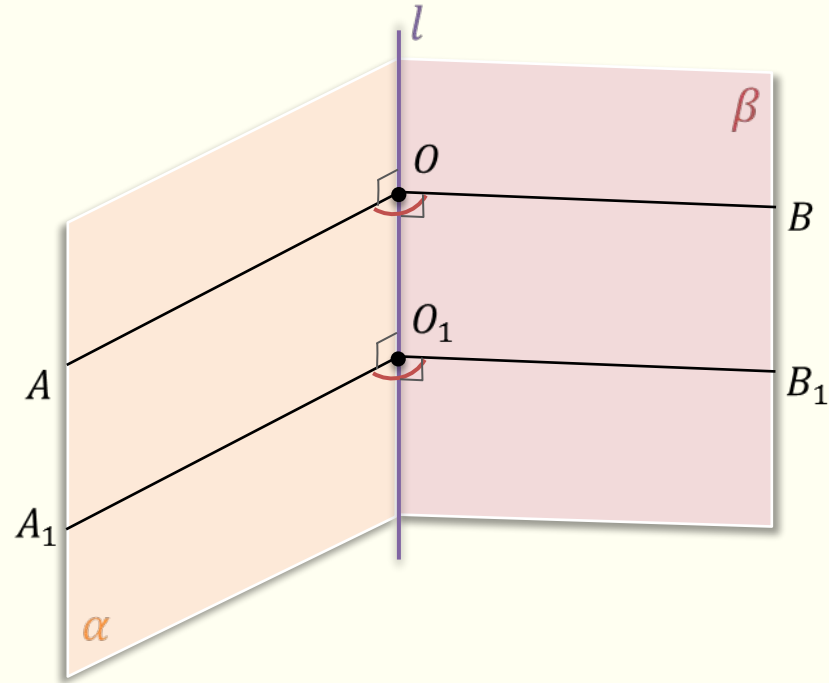
Значит,  $OA \parallel O_1A_1$  – сонаправлены.

$OB \subset \beta$ ,  $O_1B_1 \subset \beta$ ,  $OB \perp OO_1$ ,  $O_1B_1 \perp OO_1$

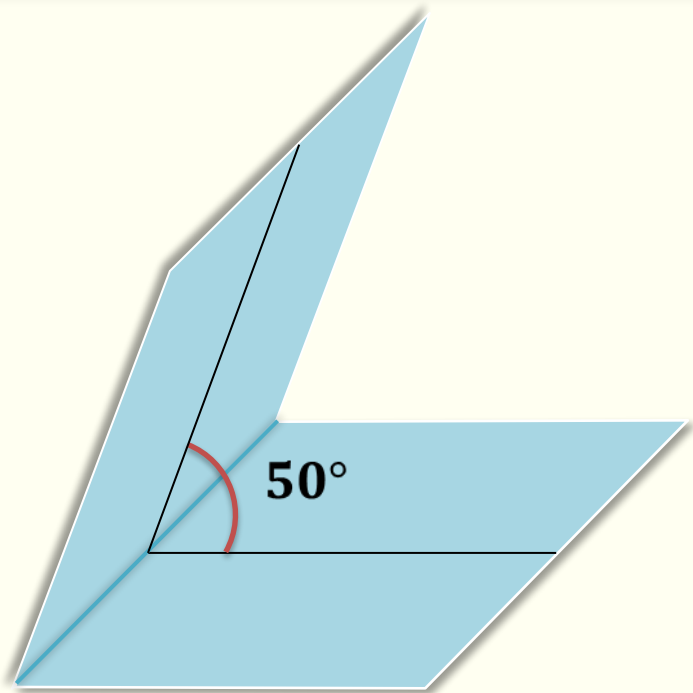
Значит,  $OB \parallel O_1B_1$  – сонаправлены.

Значит,  $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$  – как углы с сонаправленными сторонами.

**Что и требовалось доказать.**



**Определение.** *Градусной мерой двугранного угла* называется градусная мера его линейного угла.



«Двугранный угол равен  $50^\circ$ »

## Виды двугранных углов:

Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол равен  $90^\circ$ .

$$\varphi = 90^\circ$$

$90^\circ$

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and a vertical black line is drawn on the vertical plane, both originating from the same point on the edge. A red square symbol is drawn at their intersection to indicate a right angle. The text '90°' is written in black next to the symbol.

Двугранный угол называется **острым**, если его линейный угол острый, т.е. *меньше*  $90^\circ$ .

$$0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

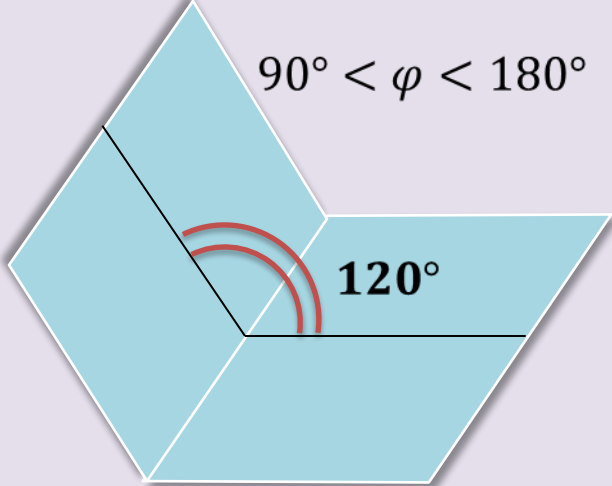
$30^\circ$

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A dashed black line is drawn on the upper plane, and a solid black line is drawn on the lower plane, both originating from the same point on the edge. A red arc is drawn between these two lines to indicate an acute angle. The text '30°' is written in black next to the arc.

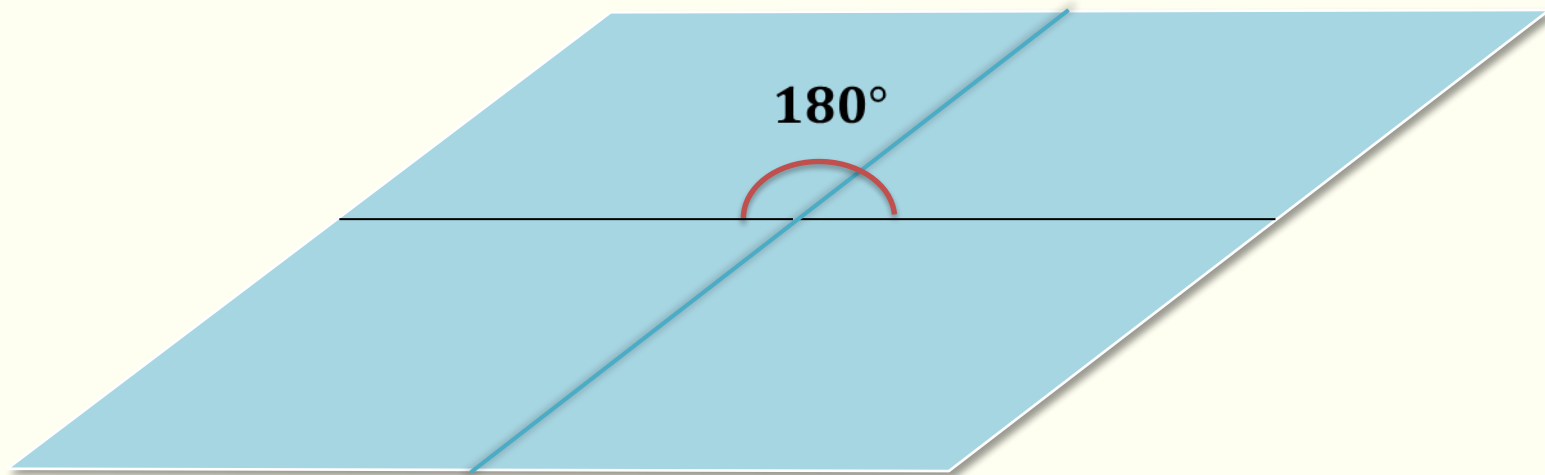
Двугранный угол называется **тупым**, если его линейный угол тупой, т.е. *больше*  $90^\circ$ .

$$90^\circ < \varphi < 180^\circ$$

$120^\circ$

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the left plane, and another black line is drawn on the right plane, both originating from the same point on the edge. A red arc is drawn between these two lines to indicate an obtuse angle. The text '120°' is written in black next to the arc.

Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется *развернутым*.



В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол  $\varphi$  которого удовлетворяет условию:

$$0^\circ < \varphi < 180^\circ$$

### Пример.

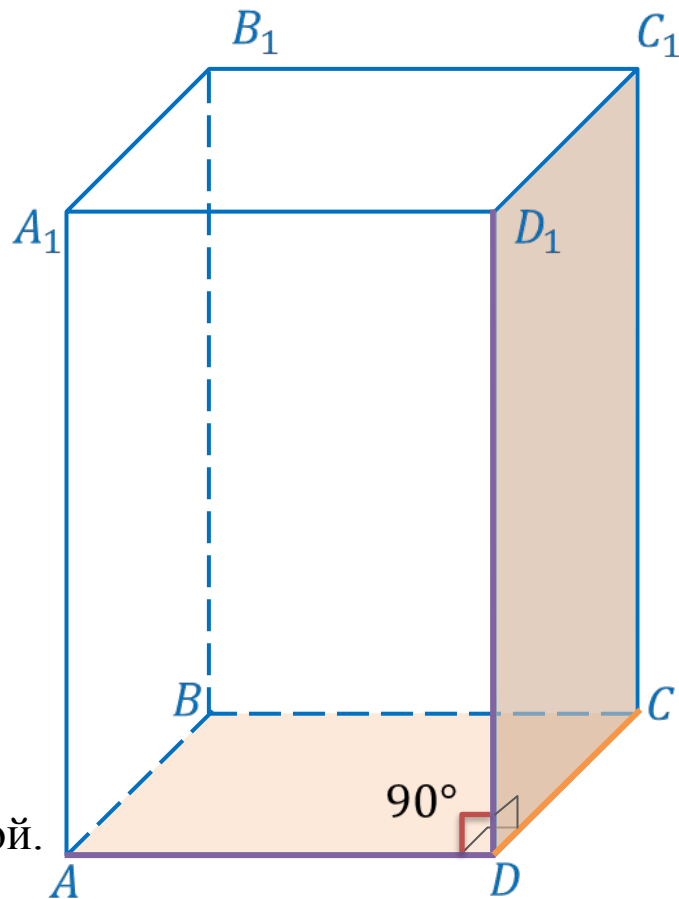
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный параллелепипед

Тогда  $\angle ADD_1$  является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая  $DC$ .

Его грани – полуплоскости, в которых лежат прямоугольники  $ABCD$  и  $DCC_1 D_1$ , так как  $AD \perp DC$  и  $DD_1 \perp DC$ .

$\angle ADD_1$  – прямой, следовательно, указанный двугранный угол – прямой.

Следовательно, указанный двугранный угол – прямой.



### **Пример.**

Двугранным углом при ребре пирамиды называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

$DABC$  – правильная пирамида

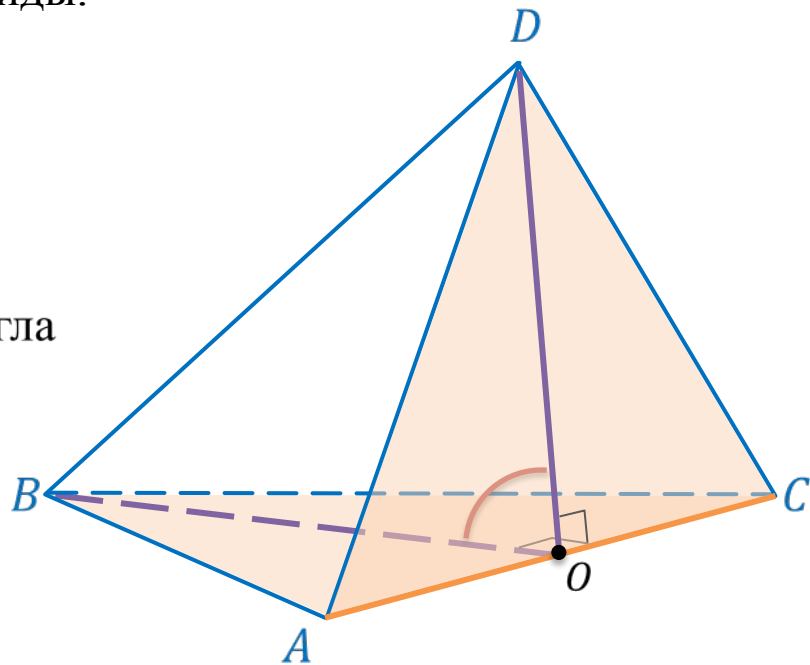
$$AO = OC$$

$$DO \perp AC$$

$$BO \perp AC$$

$\angle DOB$  является линейным углом двугранного угла  $DACB$ , ребро которого прямая  $AC$ .

Гранями являются полуплоскости, содержащие  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ , так как  $DO \perp AC$  и  $BO \perp AC$ .



**№ 1**

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AC = BC$ ,  $AB$   
лежит в плоскости  $\alpha$ ,  
 $CD \perp \alpha$ ,  $C \notin \alpha$  (рис. 5).

Построить  
линейный угол  
двугранного угла  
 $CABD$ .

**№ 2**

Дано:  $\angle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC$   
лежит плоскости  $\alpha$ ,  $AO \perp \alpha$ ,  
 $A \in \alpha$  (рис. 6).

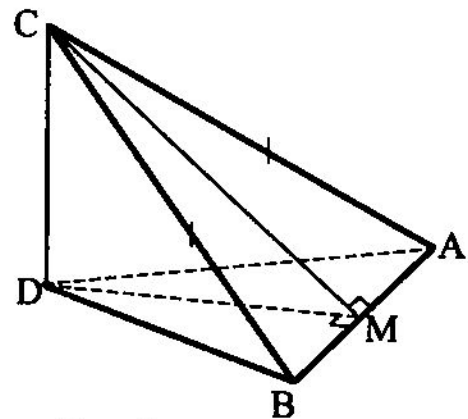
Построить  $ABCO$ .

**№ 3**

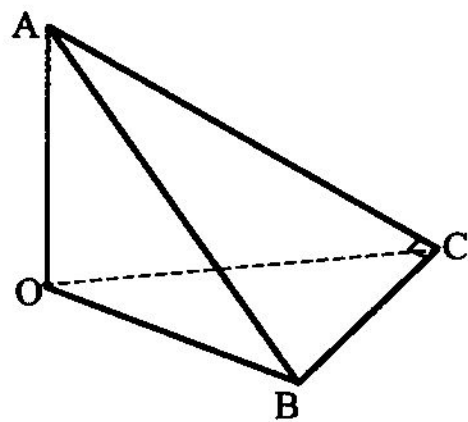
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB$   
лежит в плоскости  $\alpha$ ,  
 $CD \perp \alpha$ ,  $C \notin \alpha$  (рис. 7).

Построить  $DABC$ .

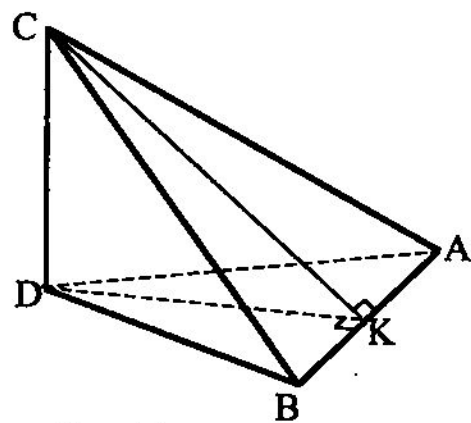




*Puc. 5*

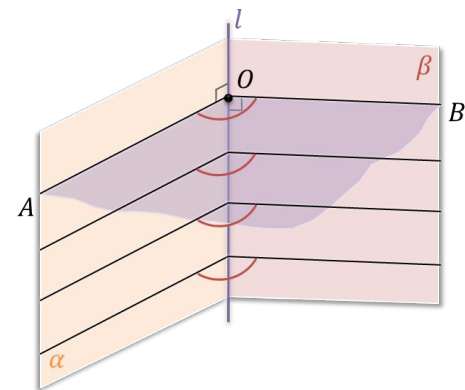
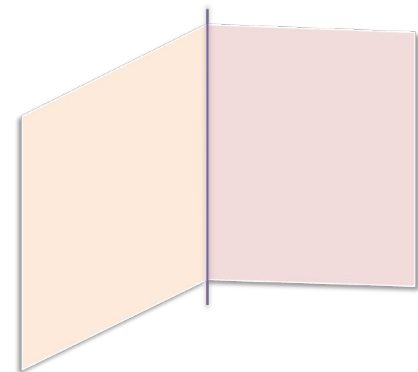


*Puc. 6*



*Puc. 7*

# Двугранный угол



# Домашнее

№1. Дано:  $ABCD$  – квадрат,  $M \in ABC$   
**задание**  
Построить: а)  $(MDC; ABC)$ ; б)  $MADB$ ;

№2. Дано:  $DABC$  – тетраэдр,  $DO \perp ABC$   
Построить:  $ABCD$