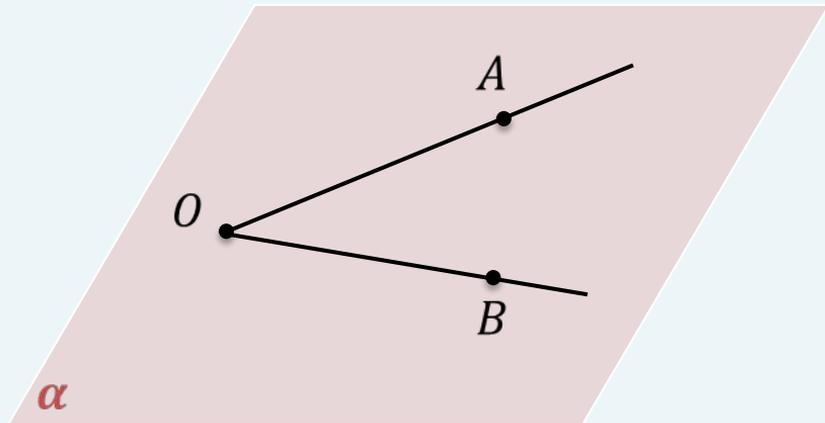
The diagram illustrates a dihedral angle. It features a central vertex from which several rays extend outwards. A red line is drawn from this vertex, bisecting the angle. The rays are arranged in a fan-like pattern, with the largest angle being the one bisected by the red line. The background is white, and the rays are light pink with a slight gradient.

Двугранный угол

Планиметрия

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

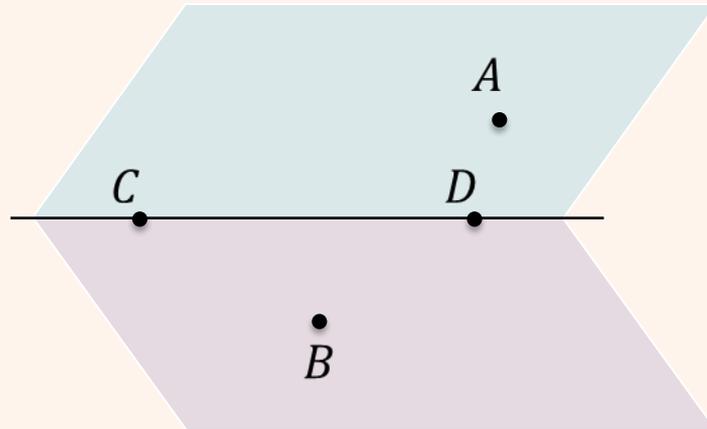
$\angle AOB$



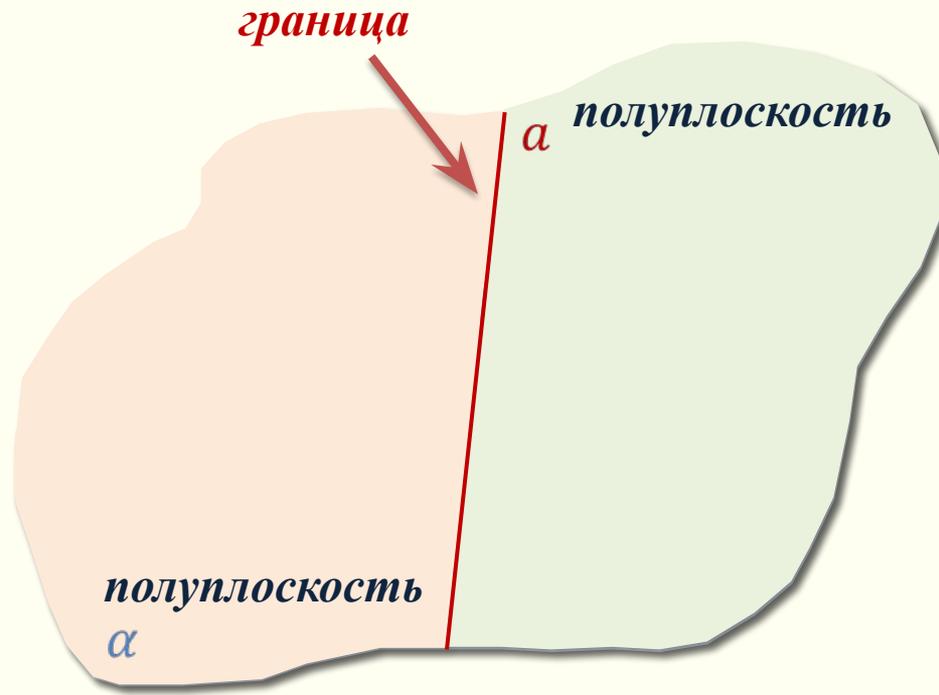
Стереометрия

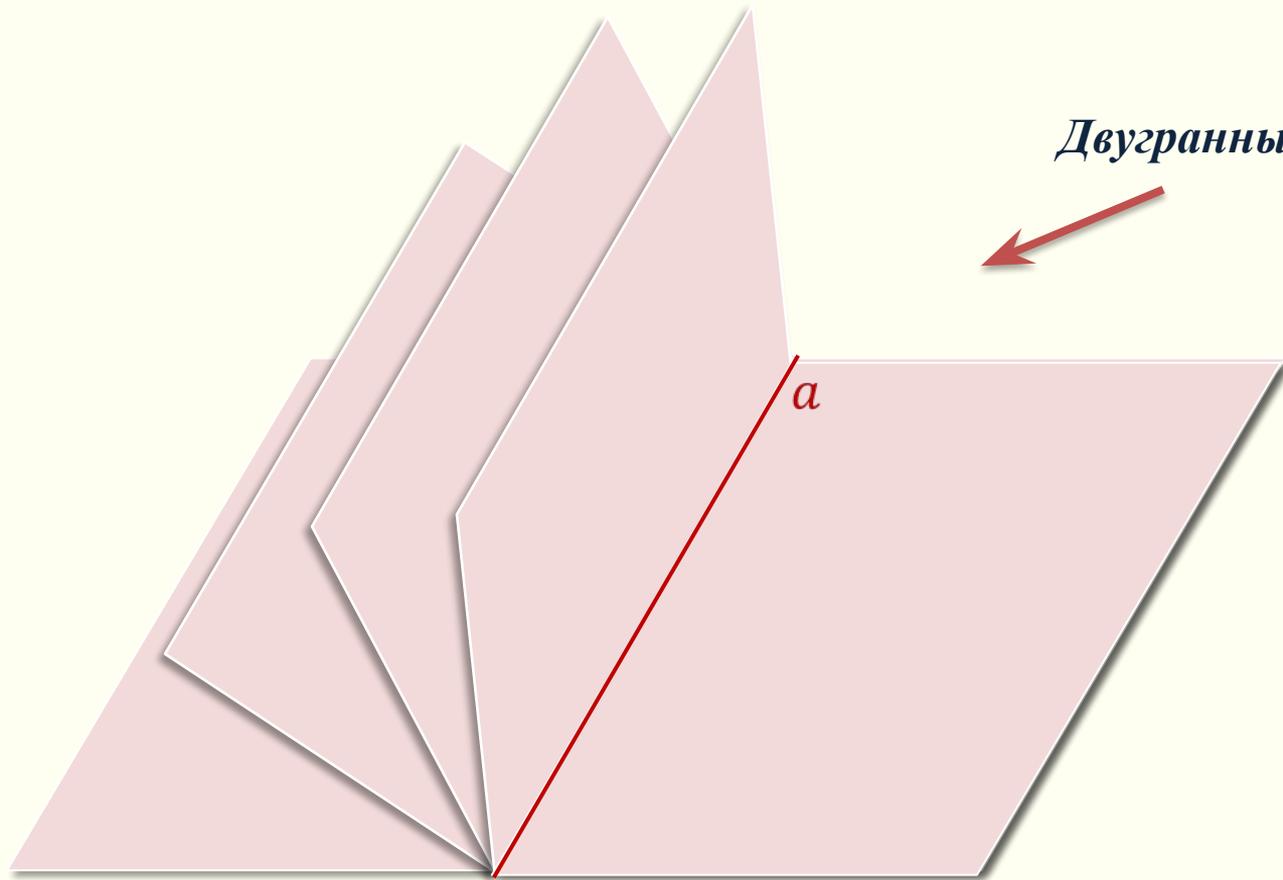
Двугранные углы

$ACDB$



Аксиома планиметрии: *любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости.*





Двугранный угол

a

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.

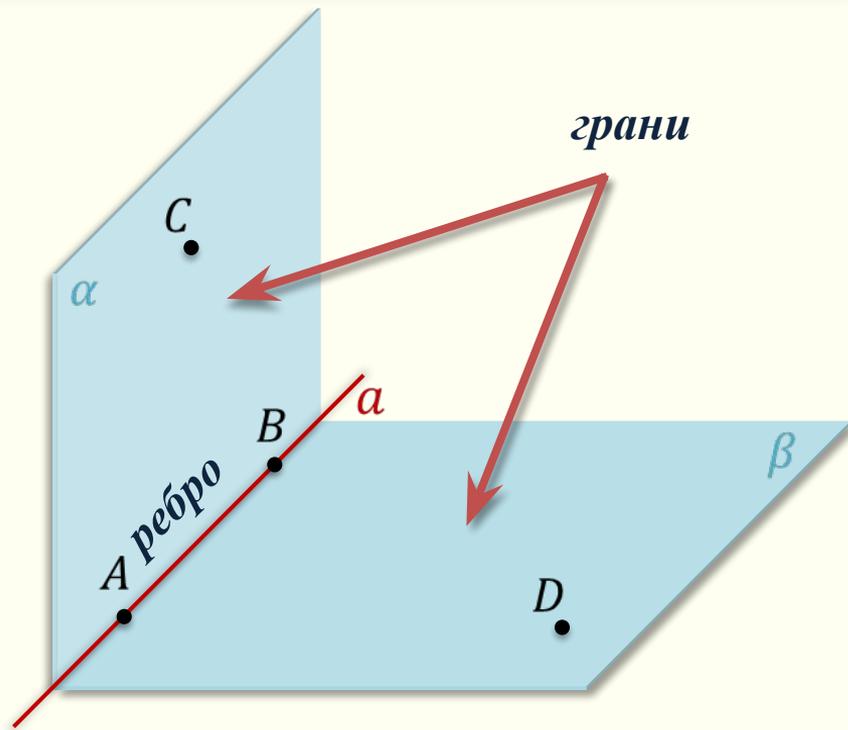
Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая a называется *ребром* двугранного угла.

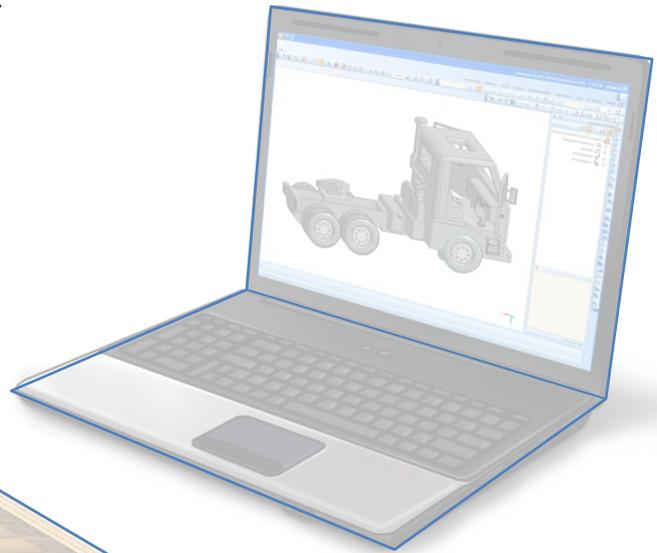
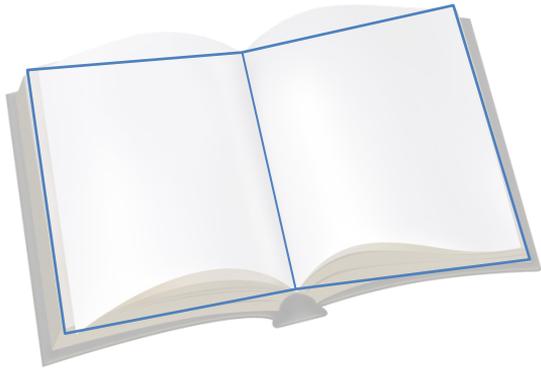
Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB , а гранями являются полуплоскости α и β , обозначают так:

$\alpha AB\beta$

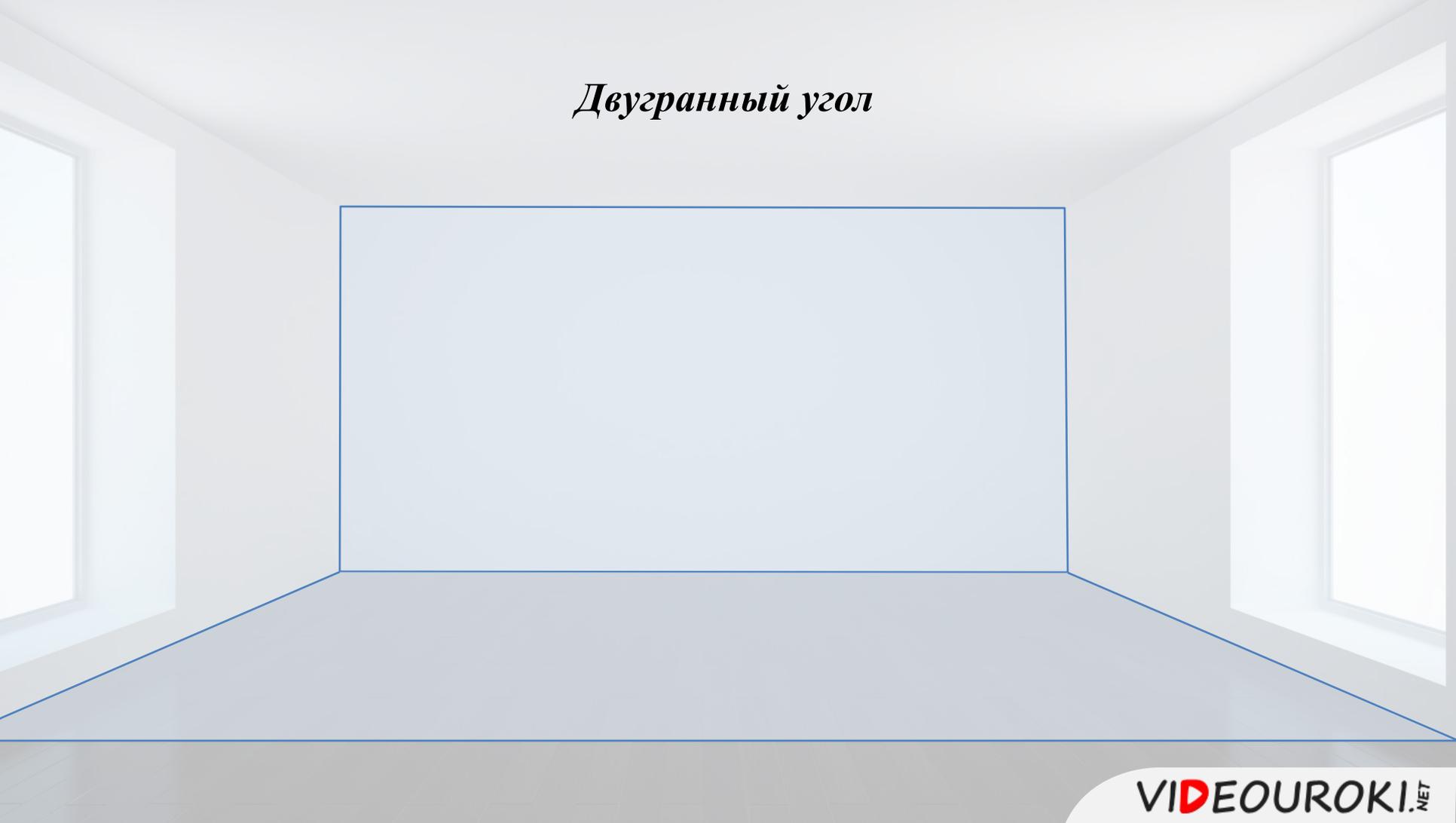
Двугранный угол с ребром AB , на разных гранях которого отмечены точки C и D , то двугранный угол называют **$CABD$** .



Двугранный угол



Двугранный угол



Для измерения двугранного угла вводится понятие *линейного угла*.

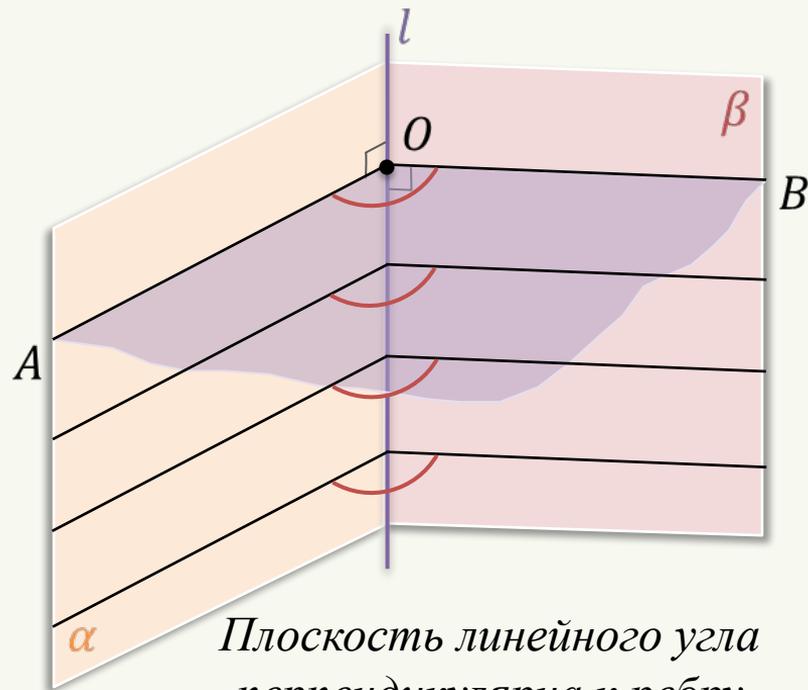
Пусть $O \in l$.

$OA \subset \alpha$, $OB \subset \beta$

$OA \perp l$, $OB \perp l$

$\angle AOB$, сторонами которого служат лучи OA и OB , называется *линейным углом* данного двугранного угла.

Определение. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.



Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.

Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha, O_1A_1 \subset \alpha, OA \perp l, O_1A_1 \perp l \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$

$OB \subset \beta, O_1B_1 \subset \beta, OB \perp l, O_1B_1 \perp l \Rightarrow OB \parallel O_1B_1$

$M \in OA, M_1 \in O_1A_1, OM = O_1M_1$

$N \in OB, N_1 \in O_1B_1, ON = O_1N_1$

Так как $OM = O_1M_1, OM \parallel O_1M_1$, то
четырёхугольник OMM_1O_1 – параллелограмм.

Значит, $OO_1 = MM_1$ и $OO_1 \parallel MM_1$.

Так как $ON = O_1N_1, ON \parallel O_1N_1$, то
четырёхугольник ONN_1O_1 – параллелограмм.

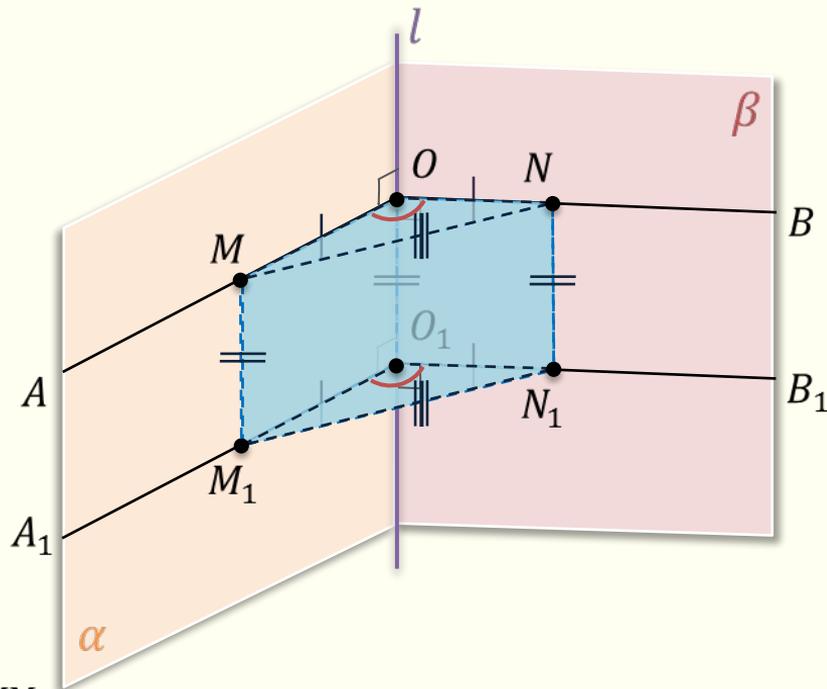
Значит, $OO_1 = NN_1$ и $OO_1 \parallel NN_1$.

$MM_1 = NN_1$ и $MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow NMM_1N$ – параллелограмм

Следовательно, $NM = N_1M_1$.

$\triangle OMN = \triangle O_1M_1N_1$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle MON = \angle M_1O_1N_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

Что и требовалось доказать.



Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha$, $O_1A_1 \subset \alpha$, $OA \perp OO_1$, $O_1A_1 \perp OO_1$

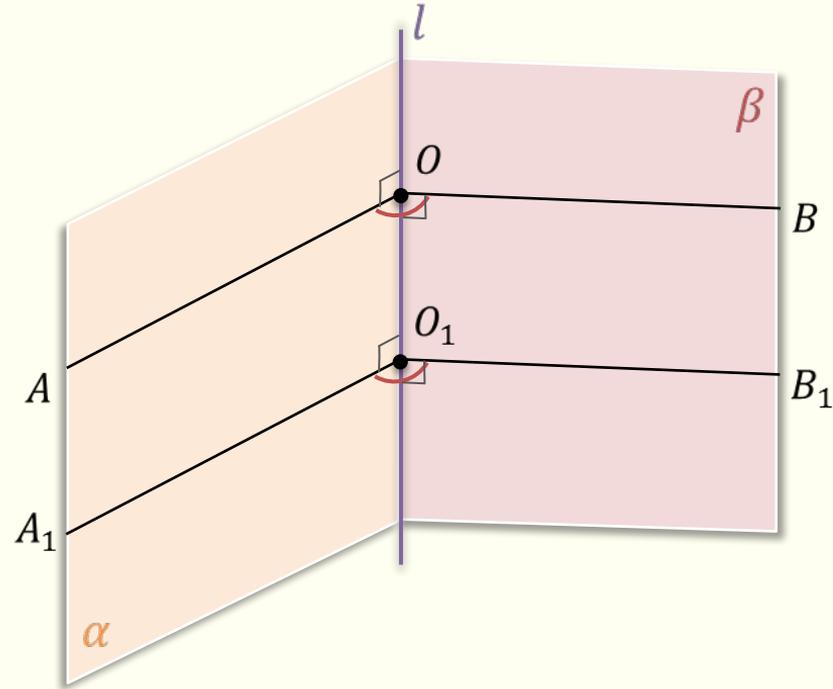
Значит, $OA \parallel O_1A_1$ – сонаправлены.

$OB \subset \beta$, $O_1B_1 \subset \beta$, $OB \perp OO_1$, $O_1B_1 \perp OO_1$

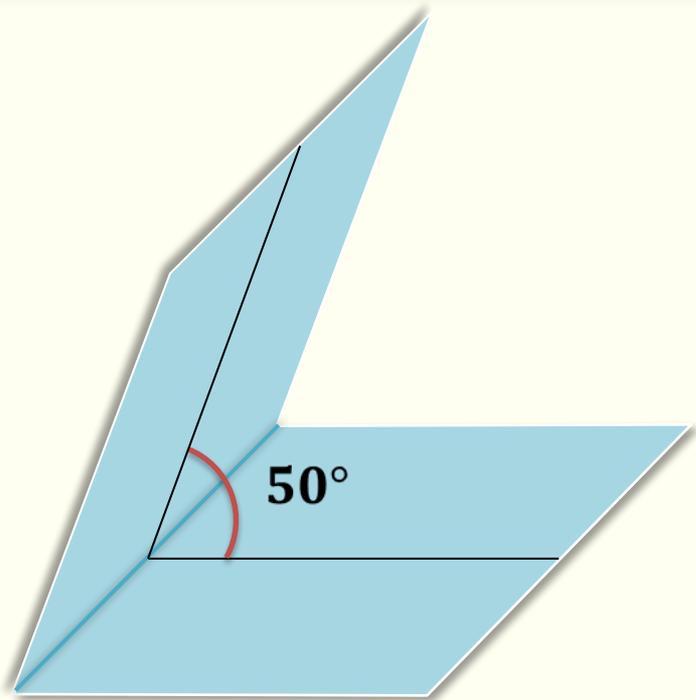
Значит, $OB \parallel O_1B_1$ – сонаправлены.

Значит, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ – как углы с сонаправленными сторонами.

Что и требовалось доказать.



Определение. *Градусной мерой двугранного угла* называется градусная мера его линейного угла.

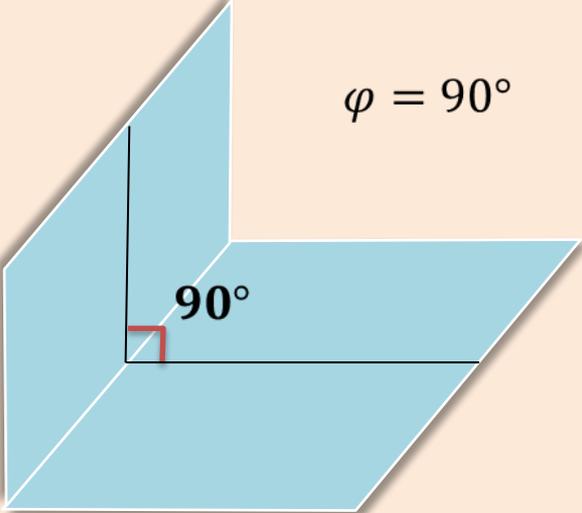


«Двугранный угол равен 50° »

Виды двугранных углов:

Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол равен 90° .

$$\varphi = 90^\circ$$

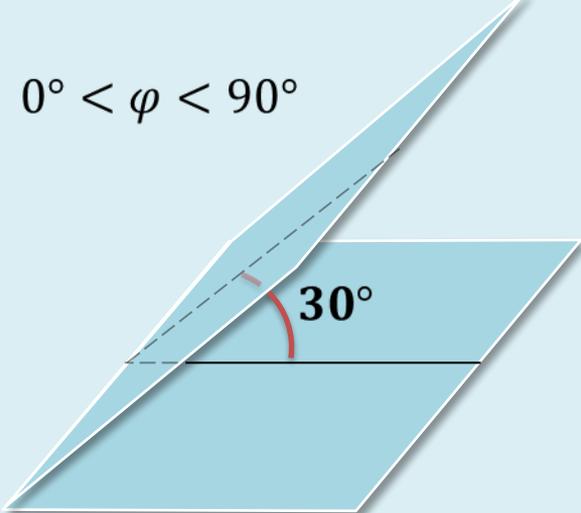


90°

The diagram shows two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and a vertical black line is drawn on the vertical plane, both originating from the same point on the edge. A red square symbol is placed at their intersection to indicate a right angle.

Двугранный угол называется **острым**, если его линейный угол острый, т.е. *меньше* 90° .

$$0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

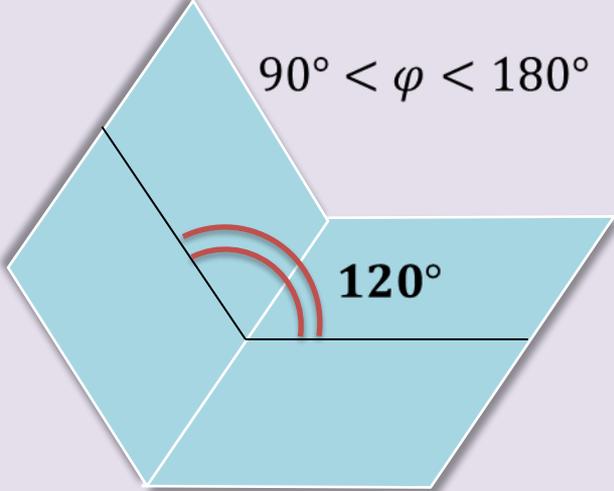


30°

The diagram shows two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and a dashed black line is drawn on the other plane, both originating from the same point on the edge. A red arc indicates the angle between these two lines, which is labeled as 30 degrees.

Двугранный угол называется **тупым**, если его линейный угол тупой, т.е. *больше* 90° .

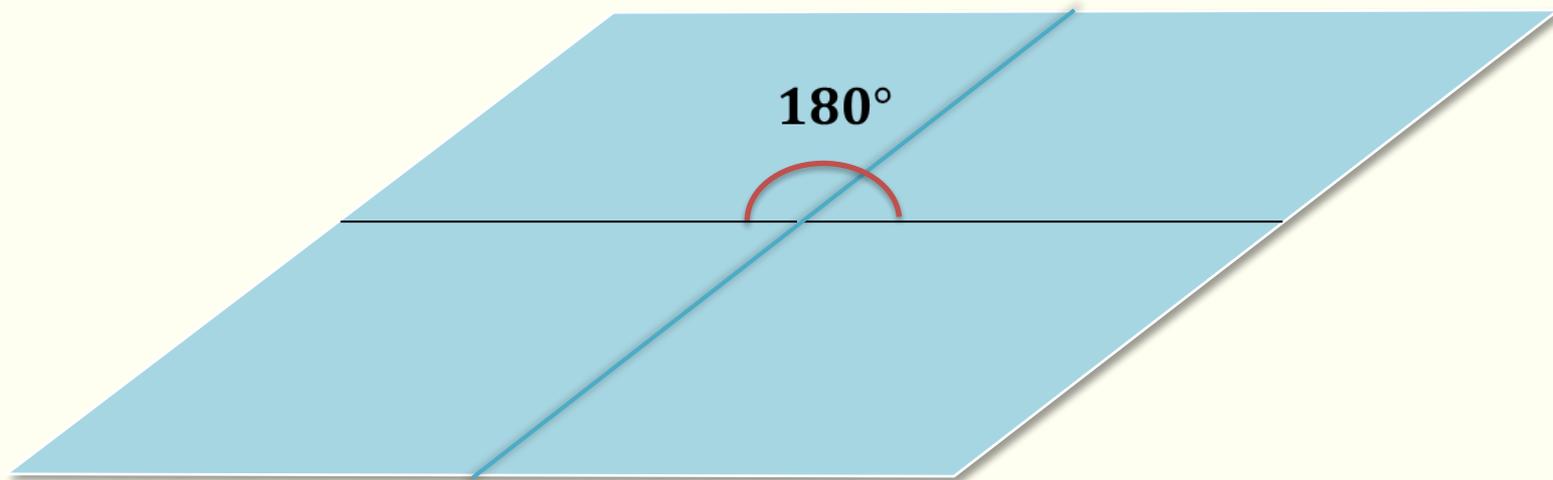
$$90^\circ < \varphi < 180^\circ$$



120°

The diagram shows two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and a dashed black line is drawn on the other plane, both originating from the same point on the edge. A red arc indicates the angle between these two lines, which is labeled as 120 degrees.

Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется *развернутым*.



В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол φ которого удовлетворяет условию:

$$0^\circ < \varphi < 180^\circ$$

Пример.

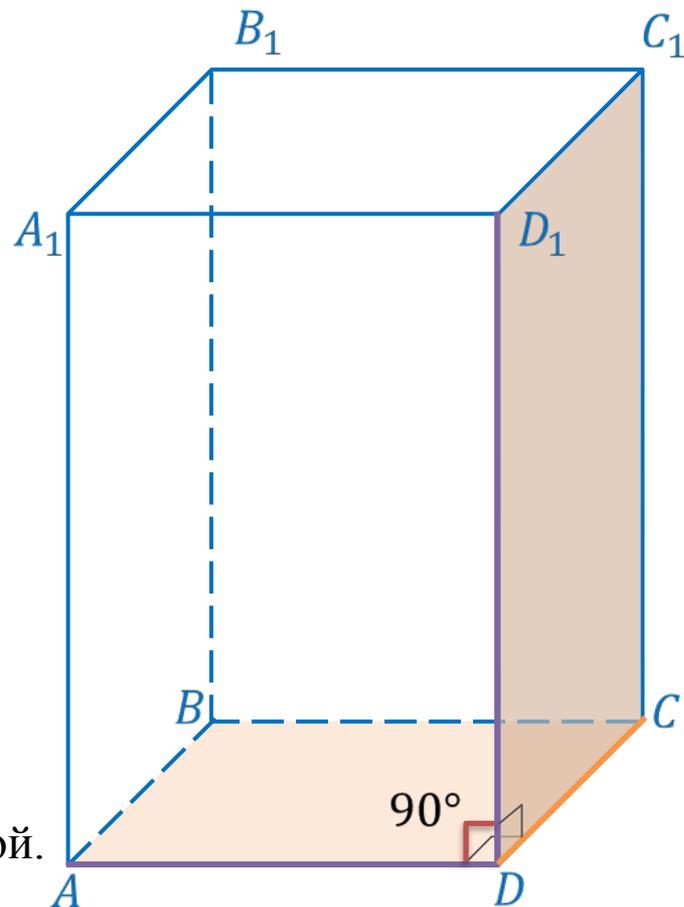
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед

Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая DC .

Его грани – полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и $DCC_1 D_1$, так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$.

$\angle ADD_1$ – прямой, следовательно, указанный двугранный угол – прямой.

Следовательно, указанный двугранный угол – прямой.



Пример.

Двугранным углом при ребре пирамиды называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

$DABC$ – правильная пирамида

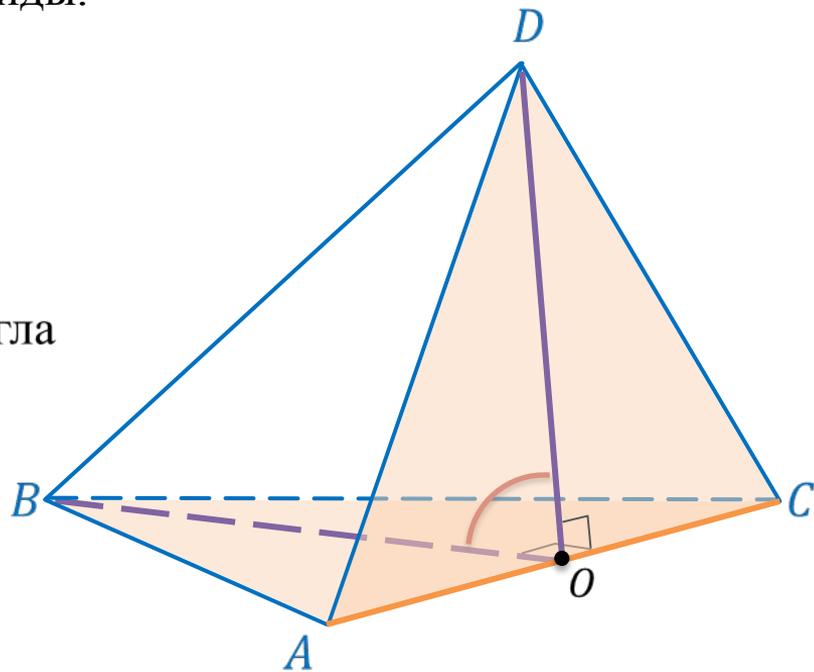
$AO = OC$

$DO \perp AC$

$BO \perp AC$

$\angle DOB$ является линейным углом двугранного угла $DACB$, ребро которого прямая AC .

Гранями являются полуплоскости, содержащие $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$.



№ 1

Дано: $\triangle ABC$, $AC = BC$, AB
лежит в плоскости α ,
 $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 5).

Построить
линейный угол
двугранного угла
 $CABD$.

№ 2

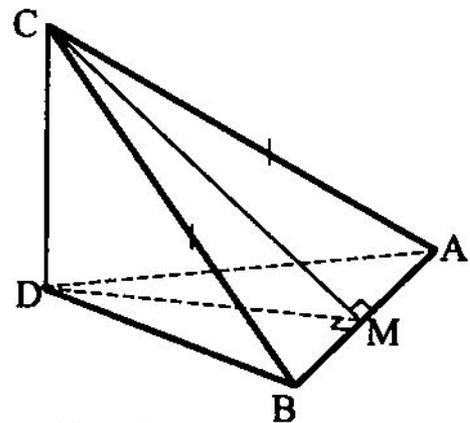
Дано: $\angle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, BC
лежит плоскости α , $AO \perp \alpha$,
 $A \in \alpha$ (рис. 6).

Построить $ABCO$.

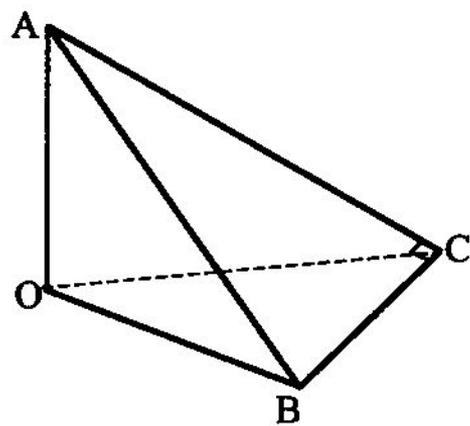
№ 3

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, AB
лежит в плоскости α ,
 $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 7).

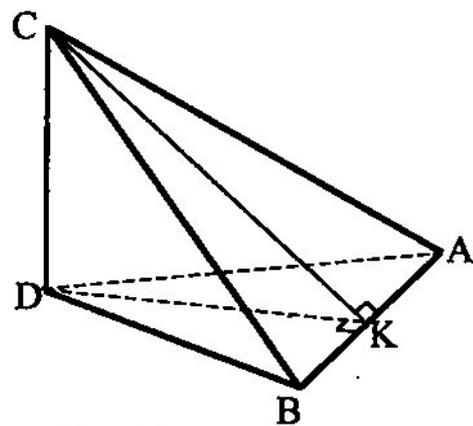
Построить $DABC$.



Puc. 5

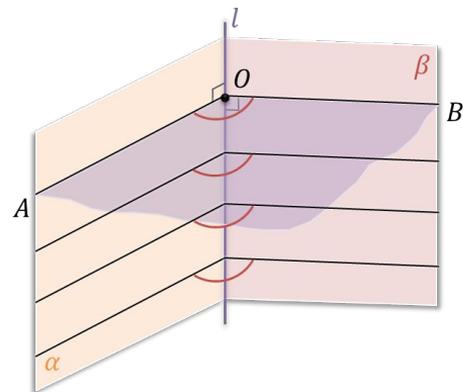
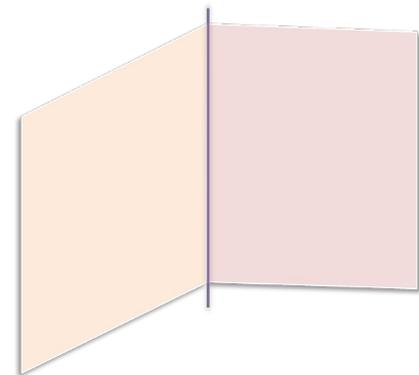


Puc. 6



Puc. 7

Двугранный угол



Домашнее

№1. Дано: $ABCD$ – квадрат, $M \in ABC$
задание
Построить: а) $(MDC; ABC)$; б) $MADB$;

№2. Дано: $DABC$ – тетраэдр, $DO \perp ABC$
Построить: $ABCD$