

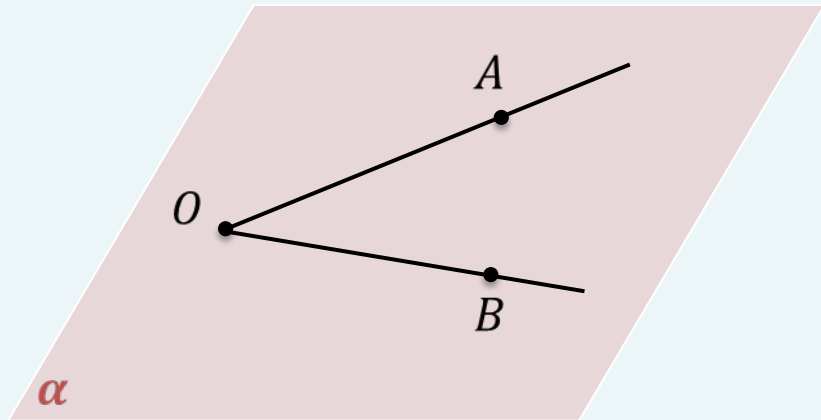
The diagram illustrates a dihedral angle. It features a central vertex from which several rays extend outwards. A red line is drawn through this vertex, representing the edge of the angle. The rays are arranged in a fan-like pattern, with the largest angle being the one formed by the red line and the ray to its right. The text 'Двугранный угол' is centered over the diagram.

Двугранный угол

Планиметрия

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

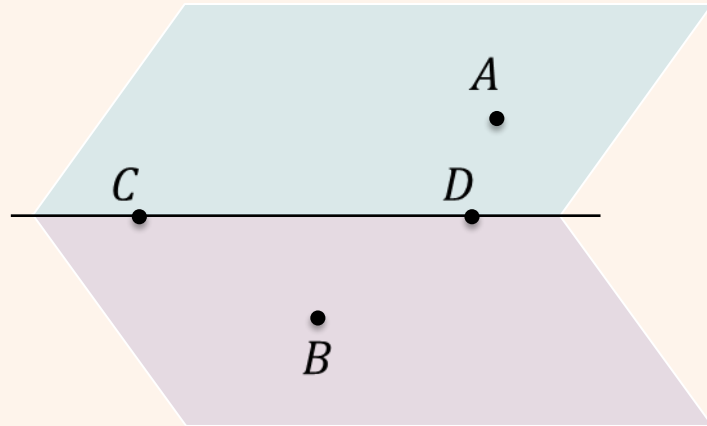
$\angle AOB$



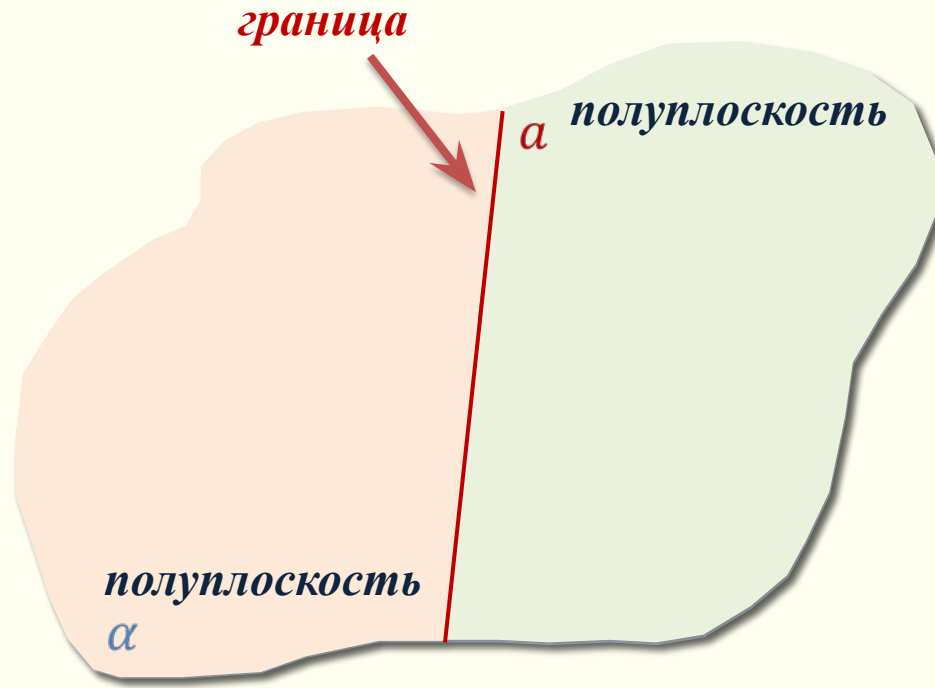
Стереометрия

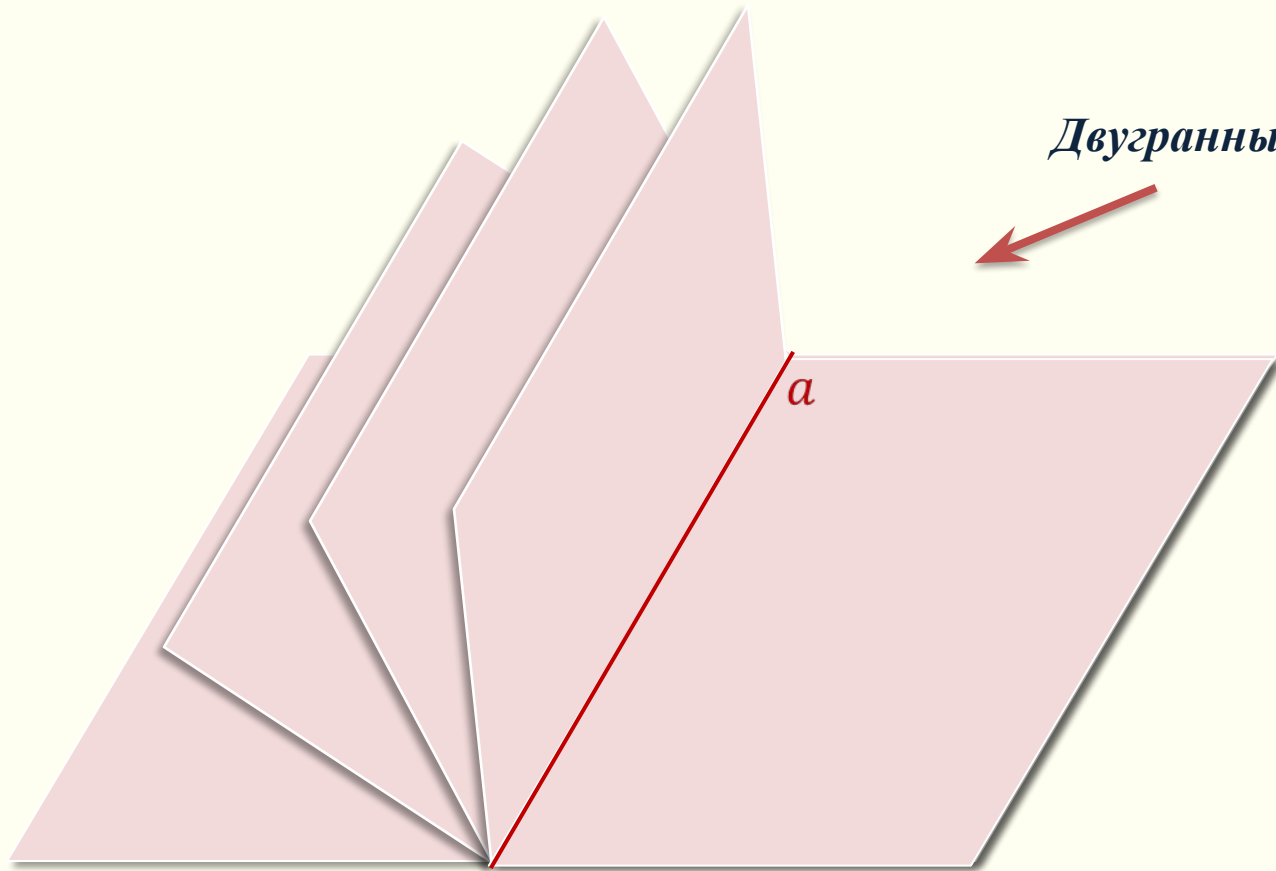
Двугранные углы

$ACDB$



Аксиома планиметрии: *любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости.*





Двугранный угол

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости.

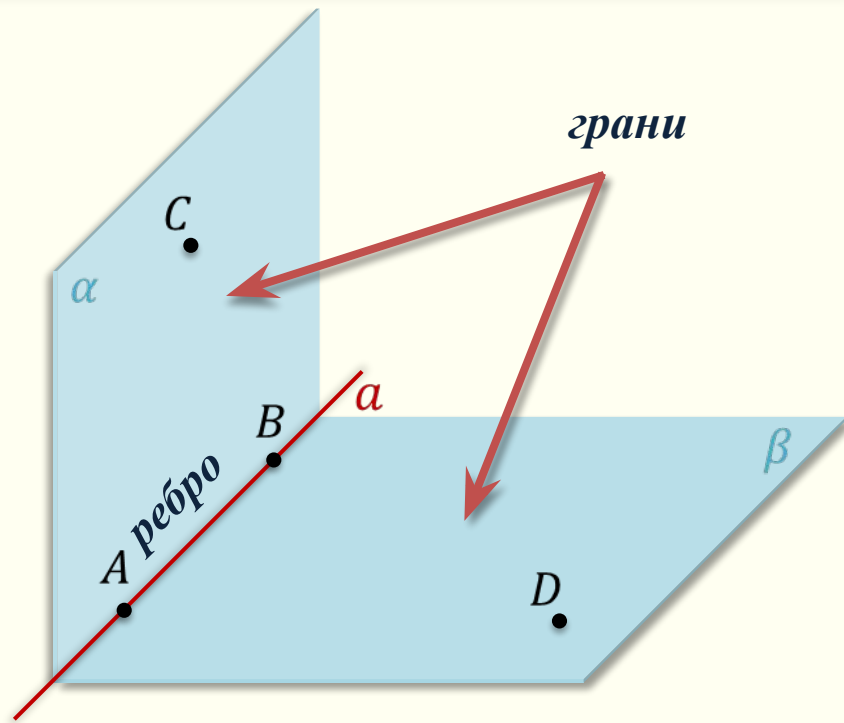
Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая a называется *ребром* двугранного угла.

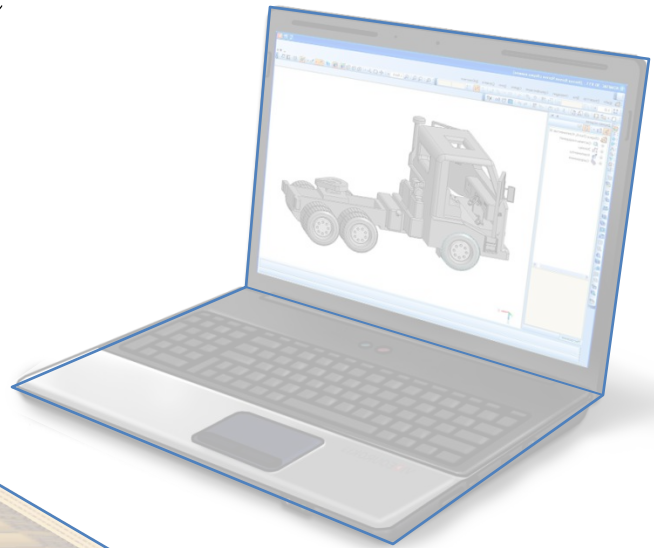
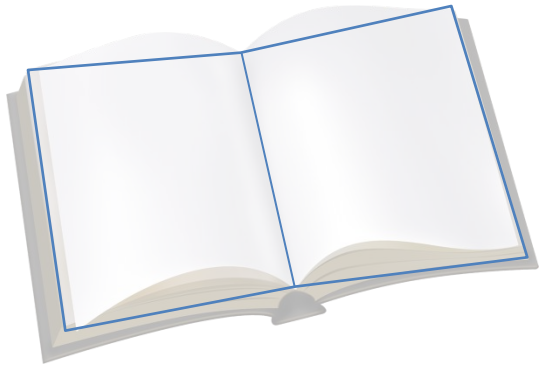
Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB , а гранями являются полуплоскости α и β , обозначают так:

$\alpha AB\beta$

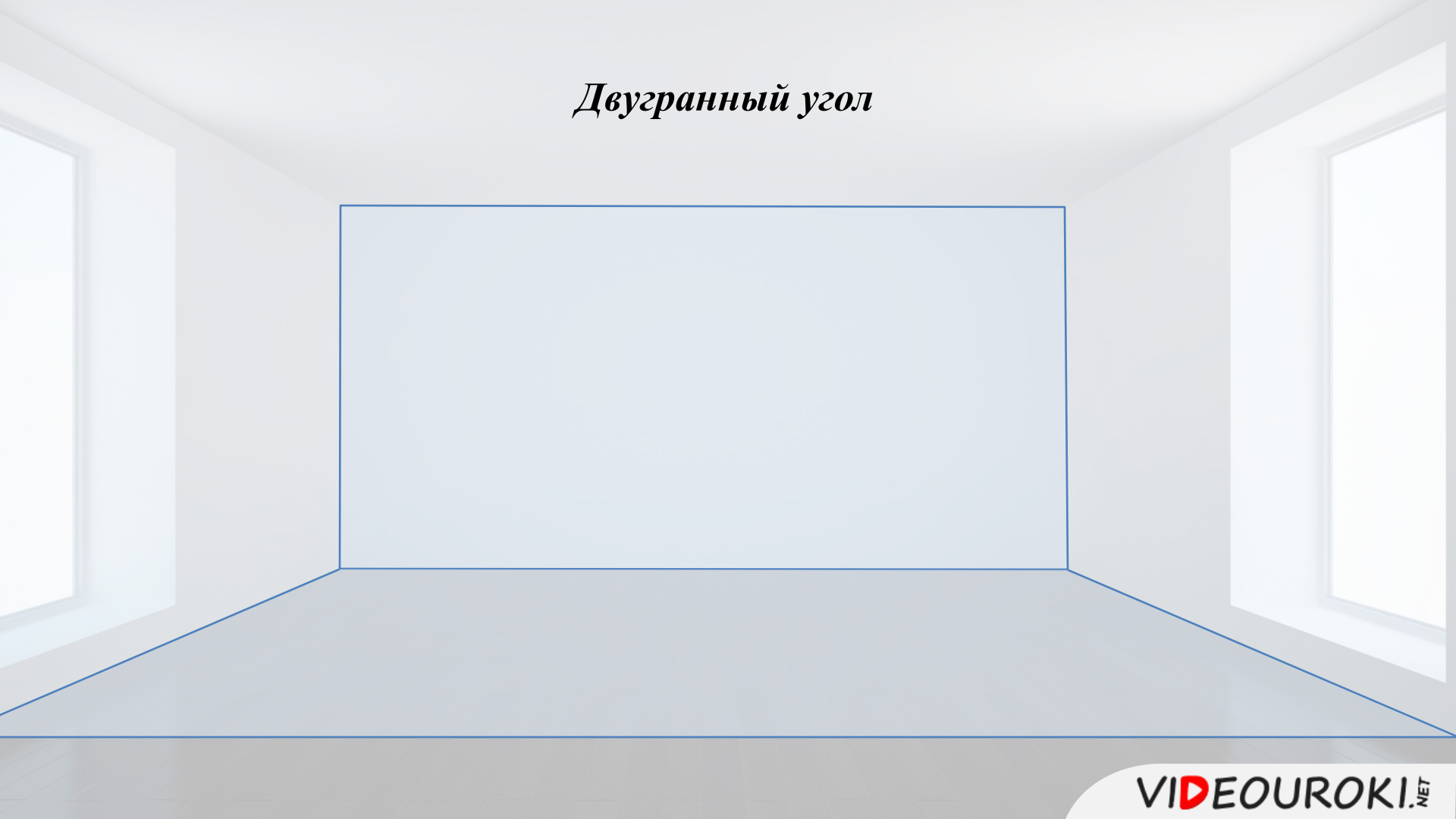
Двугранный угол с ребром AB , на разных гранях которого отмечены точки C и D , то двугранный угол называют **$CABD$** .



Двугранный угол



Двугранный угол



Для измерения двугранного угла вводится понятие *линейного угла*.

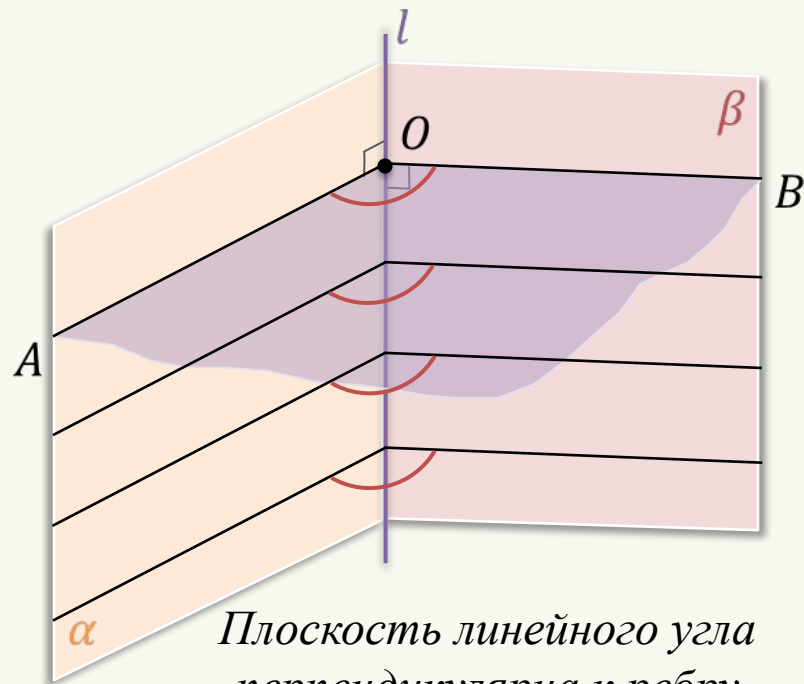
Пусть $O \in l$.

$OA \subset \alpha$, $OB \subset \beta$

$OA \perp l$, $OB \perp l$

$\angle AOB$, сторонами которого служат лучи OA и OB , называется *линейным углом* данного двугранного угла.

Определение. *Линейным углом двугранного угла* называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.



Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.

Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha, O_1A_1 \subset \alpha, OA \perp l, O_1A_1 \perp l \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$

$OB \subset \beta, O_1B_1 \subset \beta, OB \perp l, O_1B_1 \perp l \Rightarrow OB \parallel O_1B_1$

$M \in OA, M_1 \in O_1A_1, OM = O_1M_1$

$N \in OB, N_1 \in O_1B_1, ON = O_1N_1$

Так как $OM = O_1M_1, OM \parallel O_1M_1$, то
четырёхугольник OMM_1O_1 – параллелограмм.

Значит, $OO_1 = MM_1$ и $OO_1 \parallel MM_1$.

Так как $ON = O_1N_1, ON \parallel O_1N_1$, то
четырёхугольник ONN_1O_1 – параллелограмм.

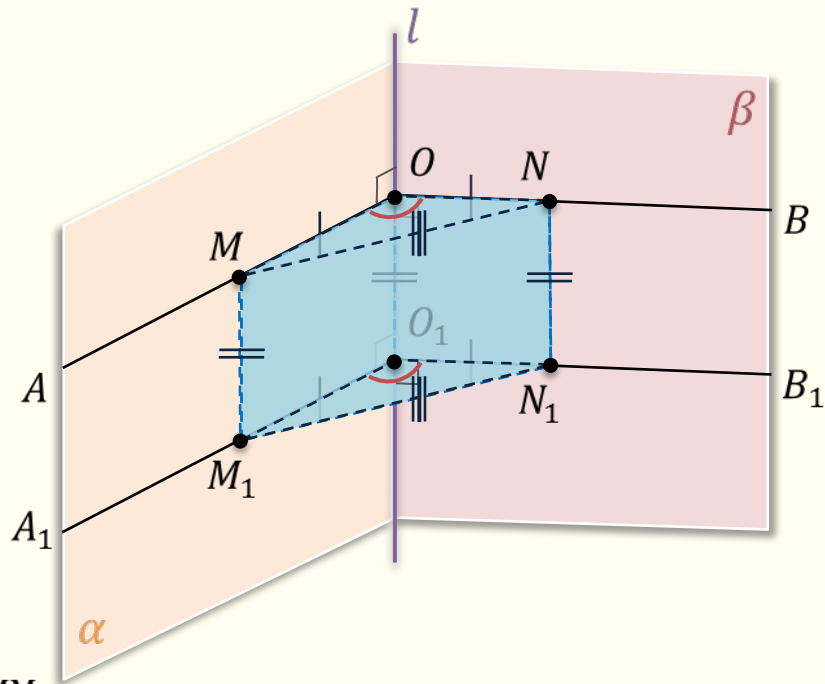
Значит, $OO_1 = NN_1$ и $OO_1 \parallel NN_1$.

$MM_1 = NN_1$ и $MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow NMM_1N$ – параллелограмм

Следовательно, $NM = N_1M_1$.

$\triangle OMN = \triangle O_1M_1N_1$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle MON = \angle M_1O_1N_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

Что и требовалось доказать.



Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha$, $O_1A_1 \subset \alpha$, $OA \perp OO_1$, $O_1A_1 \perp OO_1$

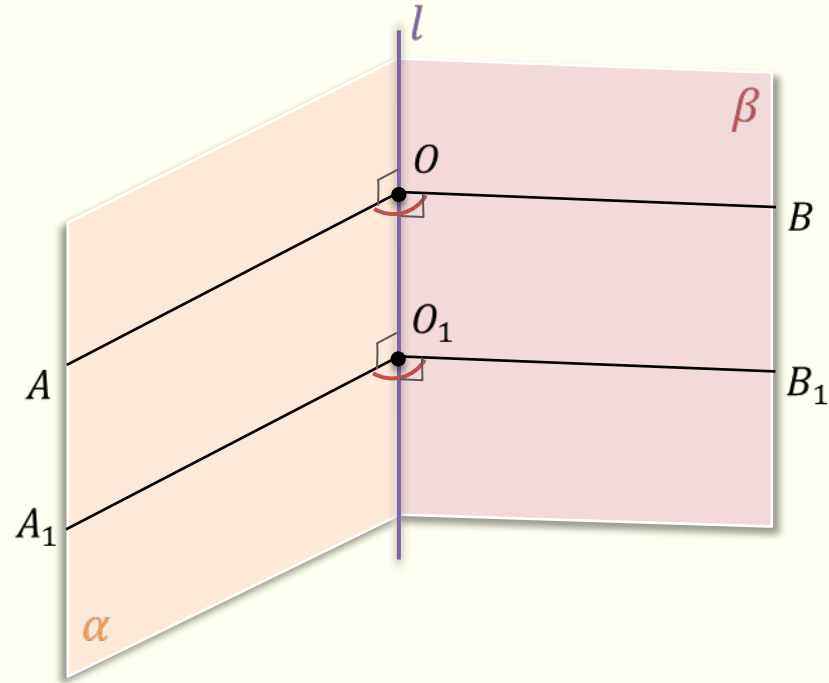
Значит, $OA \parallel O_1A_1$ – сонаправлены.

$OB \subset \beta$, $O_1B_1 \subset \beta$, $OB \perp OO_1$, $O_1B_1 \perp OO_1$

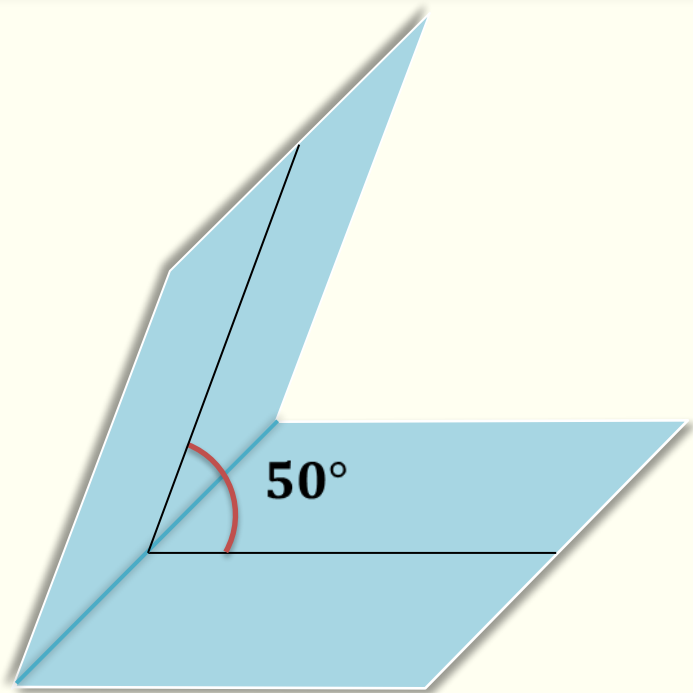
Значит, $OB \parallel O_1B_1$ – сонаправлены.

Значит, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ – как углы с сонаправленными сторонами.

Что и требовалось доказать.



Определение. *Градусной мерой двугранного угла* называется градусная мера его линейного угла.



«Двугранный угол равен 50° »

Виды двугранных углов:

Двугранный угол называется **прямым**, если его линейный угол равен 90° .

$$\varphi = 90^\circ$$

90°

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and a vertical black line is drawn on the vertical plane, both originating from the same point on the edge. A red square symbol is placed at their intersection to indicate a right angle. The text '90°' is written in black next to the symbol.

Двугранный угол называется **острым**, если его линейный угол острый, т.е. *меньше* 90° .

$$0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

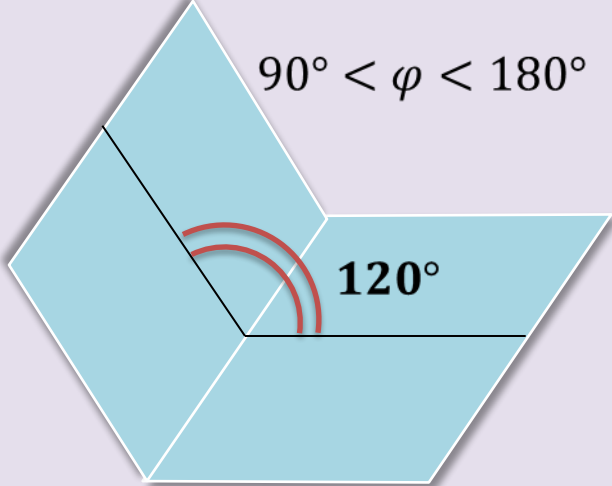
30°

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A dashed black line is drawn on the upper plane, and a solid black line is drawn on the lower plane, both originating from the same point on the edge. A red arc is drawn between these two lines to indicate the angle. The text '30°' is written in black next to the arc.

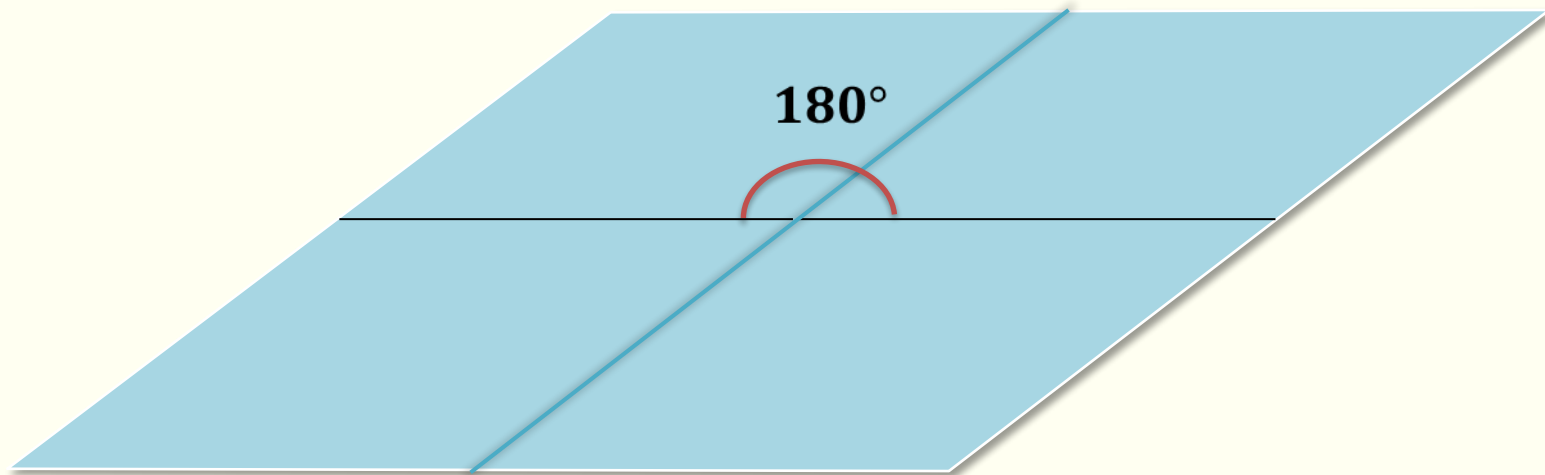
Двугранный угол называется **тупым**, если его линейный угол тупой, т.е. *больше* 90° .

$$90^\circ < \varphi < 180^\circ$$

120°

A 3D diagram showing two light blue planes meeting at a common edge. A black line is drawn on the horizontal plane, and another black line is drawn on the vertical plane, both originating from the same point on the edge. A red arc is drawn between these two lines to indicate the angle. The text '120°' is written in black next to the arc.

Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется *развернутым*.



В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол φ которого удовлетворяет условию:

$$0^\circ < \varphi < 180^\circ$$

Пример.

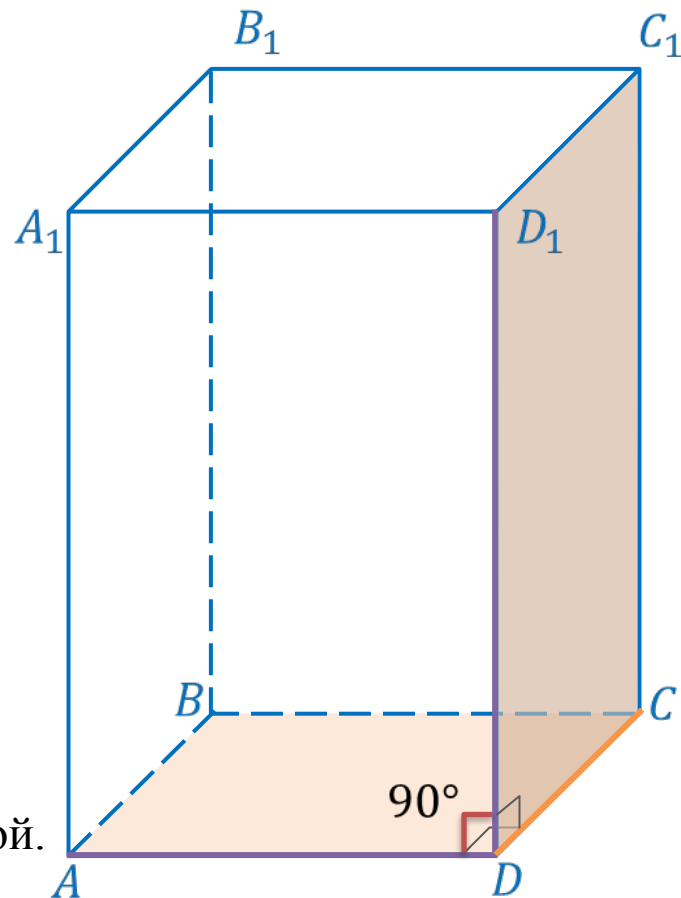
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед

Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая DC .

Его грани – полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и $DCC_1 D_1$, так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$.

$\angle ADD_1$ – прямой, следовательно, указанный двугранный угол – прямой.

Следовательно, указанный двугранный угол – прямой.



Пример.

Двугранным углом при ребре пирамиды называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

$DABC$ – правильная пирамида

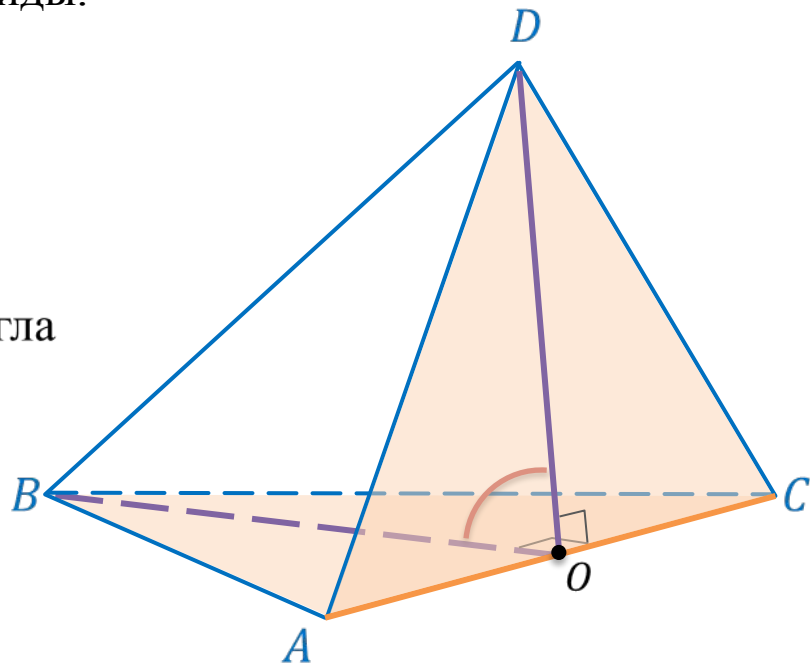
$AO = OC$

$DO \perp AC$

$BO \perp AC$

$\angle DOB$ является линейным углом двугранного угла $DACB$, ребро которого прямая AC .

Гранями являются полуплоскости, содержащие $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$.



№ 1

Дано: $\triangle ABC$, $AC = BC$, AB
лежит в плоскости α ,
 $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 5).

Построить
линейный угол
двугранного угла
 $CABD$.

№ 2

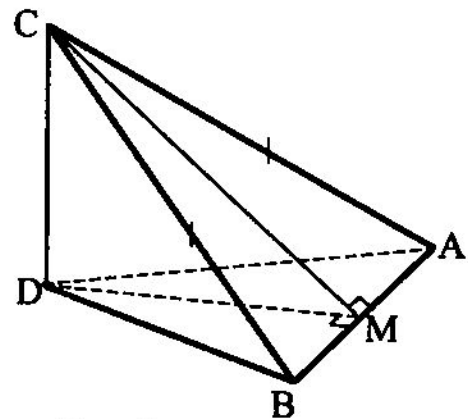
Дано: $\angle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, BC
лежит плоскости α , $AO \perp \alpha$,
 $A \in \alpha$ (рис. 6).

Построить $ABCO$.

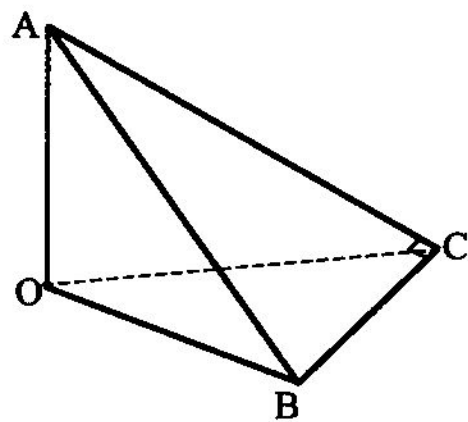
№ 3

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, AB
лежит в плоскости α ,
 $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 7).

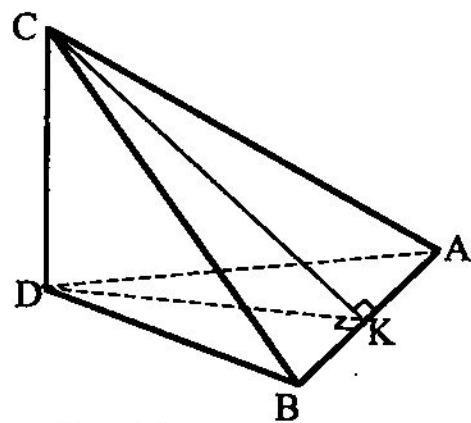
Построить $DABC$.



Puc. 5

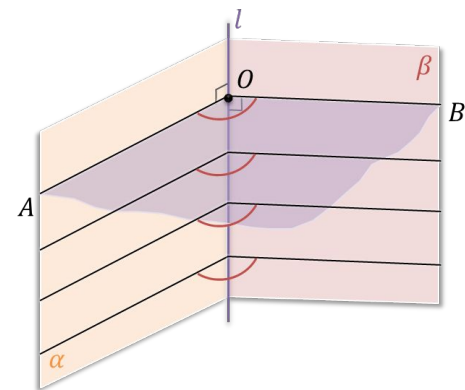
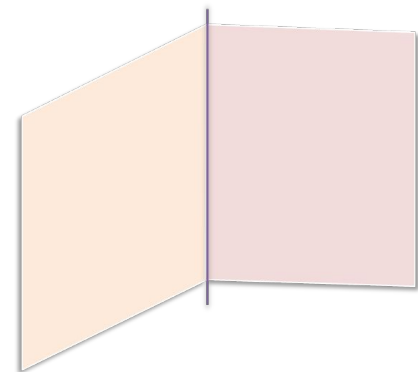


Puc. 6



Puc. 7

Двугранный угол



Домашнее

№1. Дано: $ABCD$ – трапеция, $MD \perp ABC$
задание
Построить: а) $(MDC; ABC)$; б) $MADB$;

№2. Дано: $DABC$ – тетраэдр, $DO \perp ABC$
Построить: $ABCD$