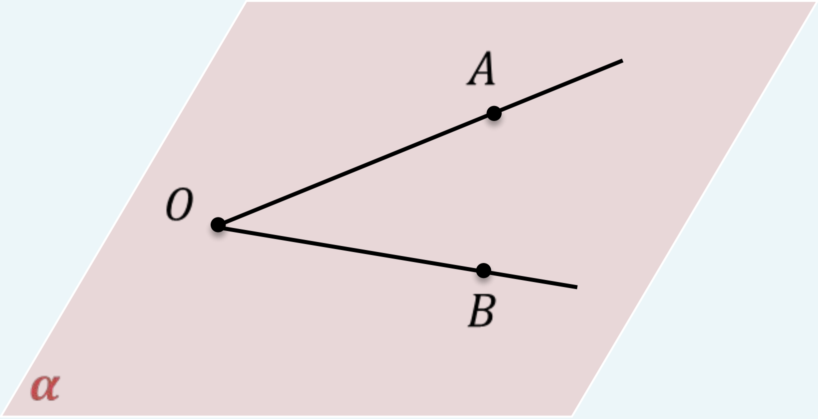
# Двугранный угол

## *Планиметрия*

***Угол*** – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

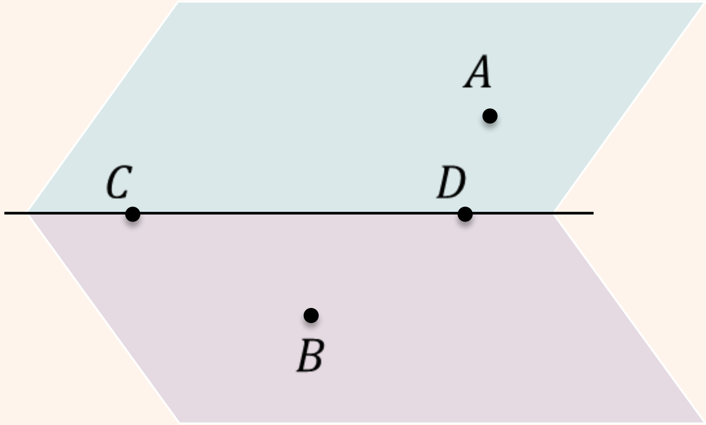
$\angle AOB$



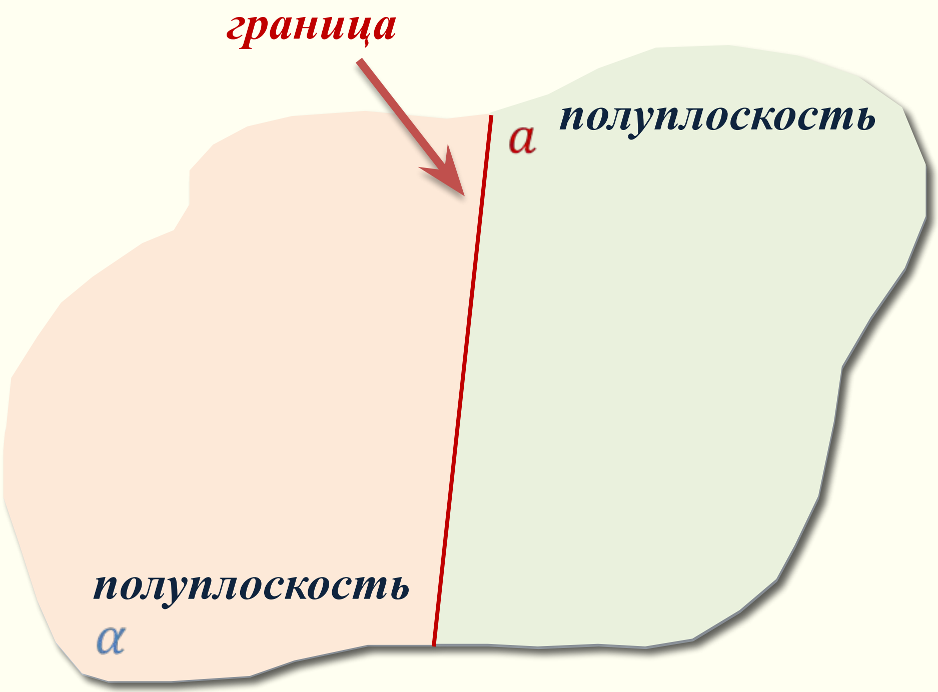

## *Стереометрия*

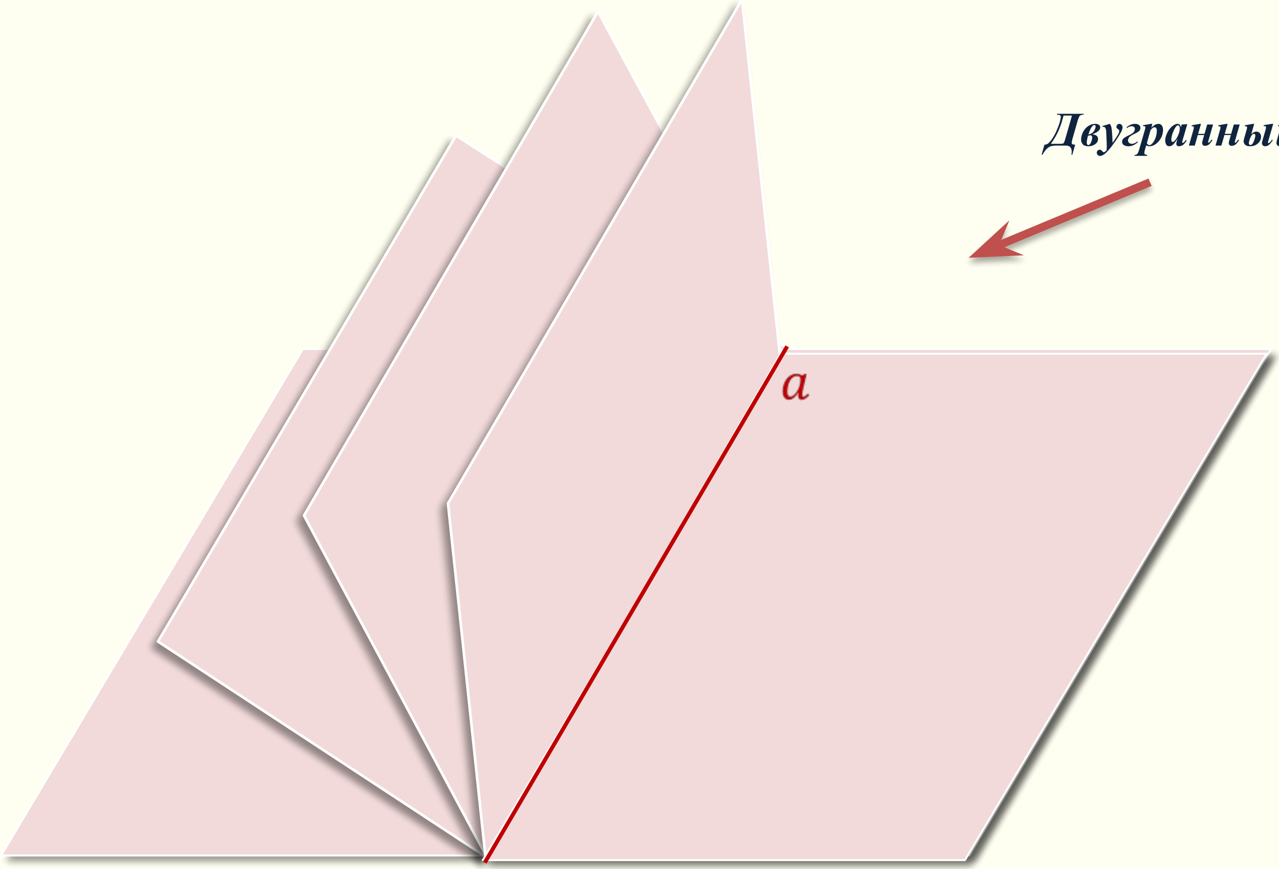
***Двугранные углы***

$ACDB$



**Аксиома планиметрии:** *любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости*.




Двугранный угол
$a$

**Определение.** ***Двугранным углом*** называется фигура, образованная прямой $a$ и двумя полуплоскостями с общей границей $a$, не принадлежащими одной плоскости.

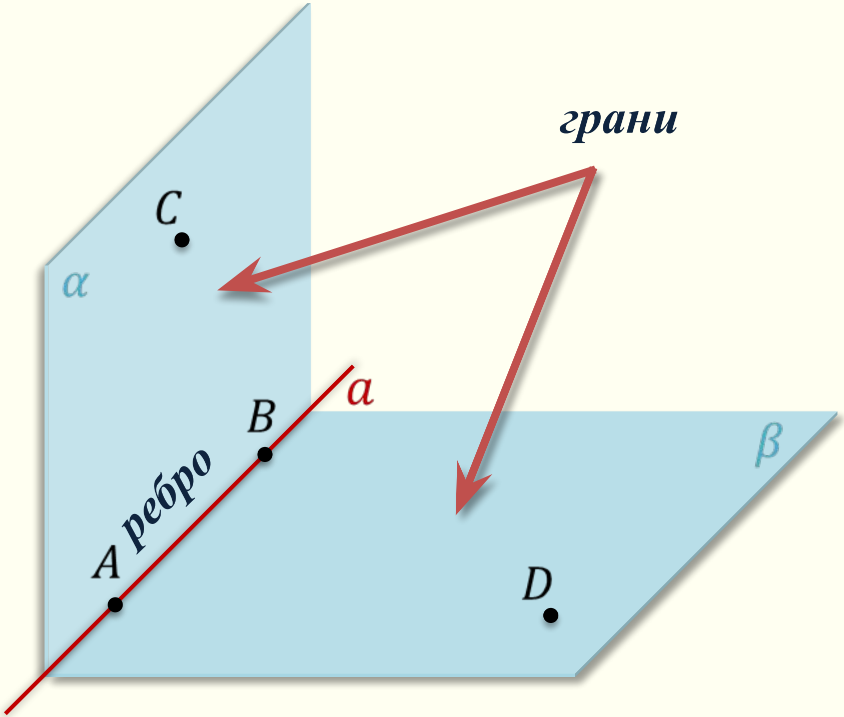
*Полуплоскости*, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

*Прямая $a$* называется *ребром* двугранного угла.

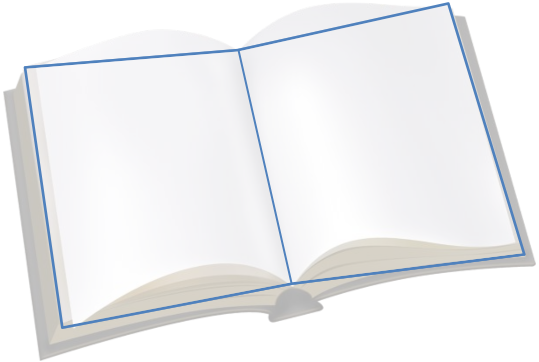
Двугранный угол, ребро которого есть прямая $AB$, а гранями являются полуплоскости $\alpha$ и $\beta$, обозначают так:

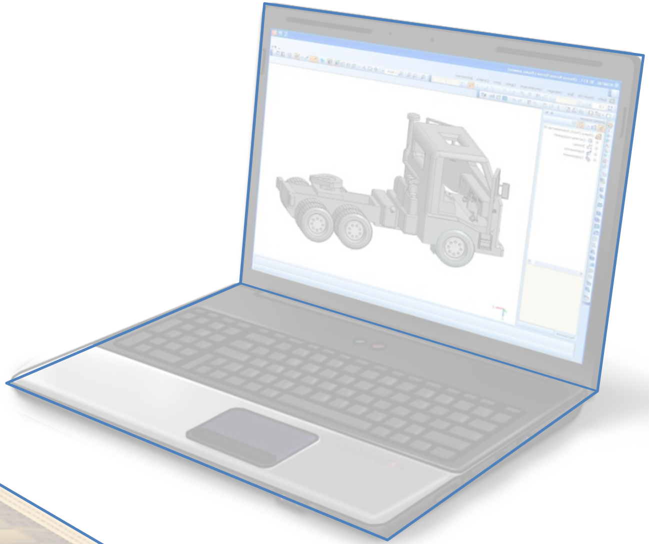
$$\boldsymbol{\alpha AB\beta}$$

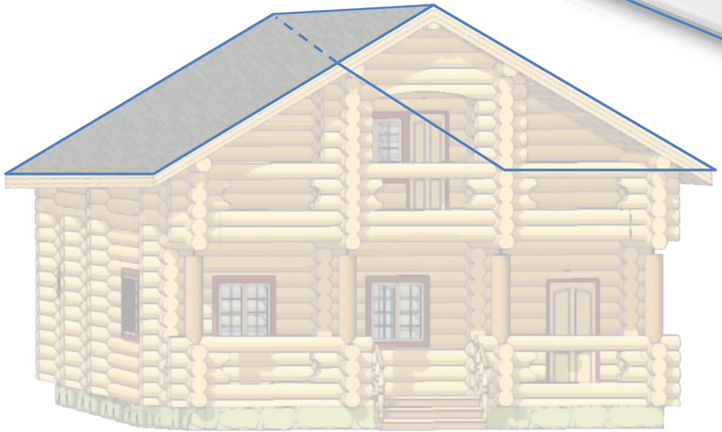
Двугранный угол с ребром $AB$, на разных гранях которого отмечены точки $C$ и $D$, то двугранный угол называют $\boldsymbol{CABD}$.



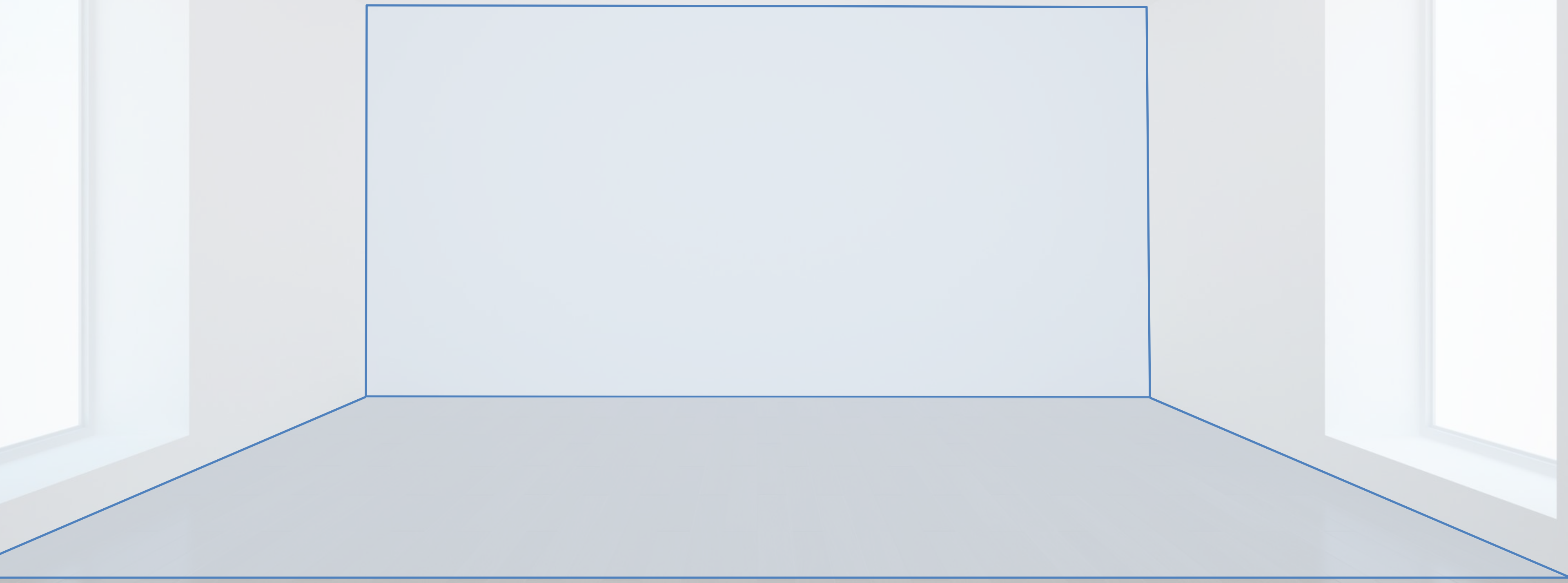
# *Двугранный угол*







# *Двугранный угол*



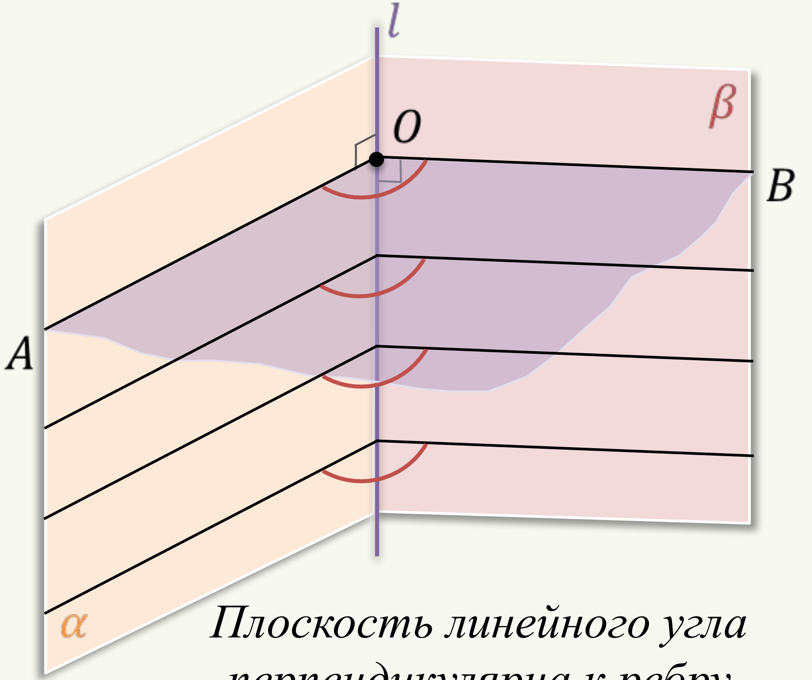
Для измерения двугранного угла вводится понятие ***линейного угла***.

Пусть $O \in l$.

$OA \subset \alpha,\ OB \subset \beta$

$OA \perp l,\ OB \perp l$

$\boldsymbol{\angle AOB}$, сторонами которого служат лучи $OA$ и $OB$, называется *линейным углом* данного двугранного угла.




**Определение.** ***Линейным углом двугранного угла*** называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.

*Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.*

*Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.*

**Все линейные углы двугранного угла равны между собой.**

**Доказательство.**

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha,\ O_1A_1 \subset \alpha,\ OA \perp l,\ O_1A_1 \perp l \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$

$OB \subset \beta,\ O_1B_1 \subset \beta,\ OB \perp l,\ O_1B_1 \perp l \Rightarrow OB \parallel O_1B_1$

$M \in OA,\ M_1 \in O_1A_1,\ OM = O_1M_1$

$N \in OB,\ N_1 \in O_1B_1,\ ON = O_1N_1$

Так как $OM = O_1M_1,\ OM \parallel O_1M_1$, то четырехугольник $OMM_1O_1$ – параллелограмм.

Значит, $OO_1 = MM_1$ и $OO_1 \parallel MM_1$.

Так как $ON = O_1N_1,\ ON \parallel O_1N_1$, то четырехугольник $ONN_1O_1$ – параллелограмм.

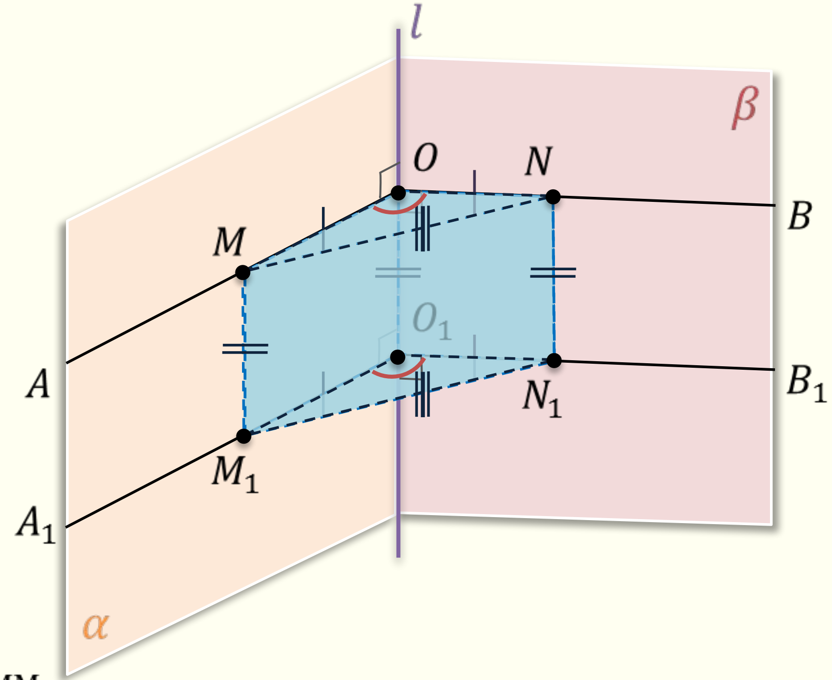
Значит, $OO_1 = NN_1$ и $OO_1 \parallel NN_1$.

$MM_1 = NN_1$ и $MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow NMM_1N$ – параллелограмм

Следовательно, $NM = N_1M_1$.

$\Delta OMN = \Delta O_1M_1N_1$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle MON = \angle M_1O_1N_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

**Что и требовалось доказать.**



**_Все линейные углы двугранного угла равны между собой._**

**Доказательство.**

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha,\ O_1A_1 \subset \alpha,\ OA \perp OO_1,\ O_1A_1 \perp OO_1$

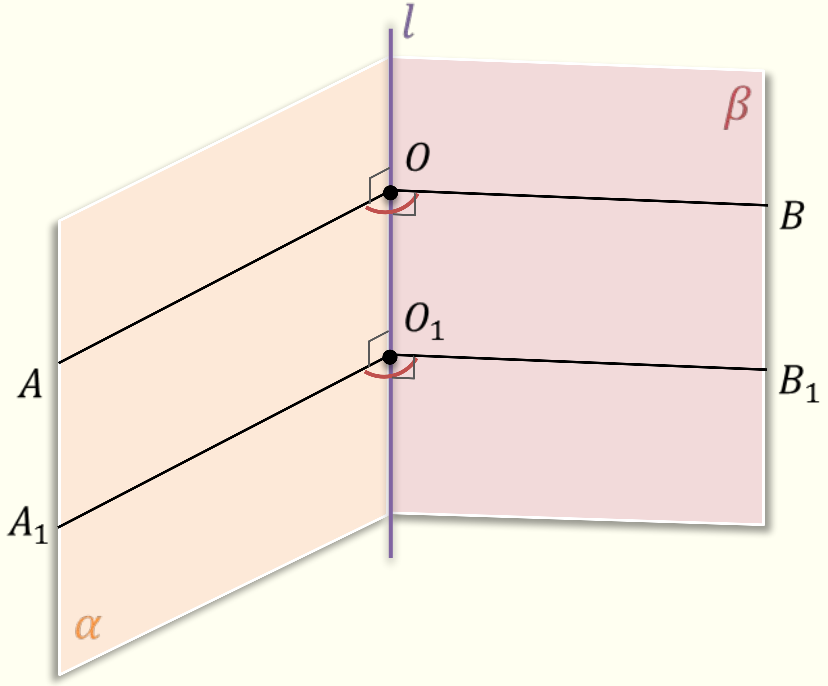
Значит, $OA \parallel O_1A_1$ – сонаправлены.

$OB \subset \beta,\ O_1B_1 \subset \beta,\ OB \perp OO_1,\ O_1B_1 \perp OO_1$

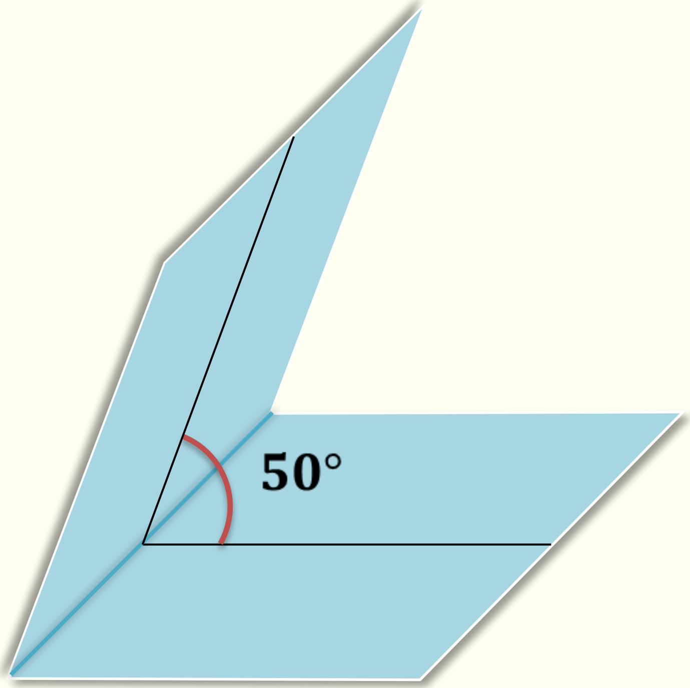
Значит, $OB \parallel O_1B_1$ – сонаправлены.

Значит, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ – как углы с сонаправленными сторонами.

**Что и требовалось доказать.**



**Определение.** ***Градусной мерой двугранного угла*** называется градусная мера его линейного угла.

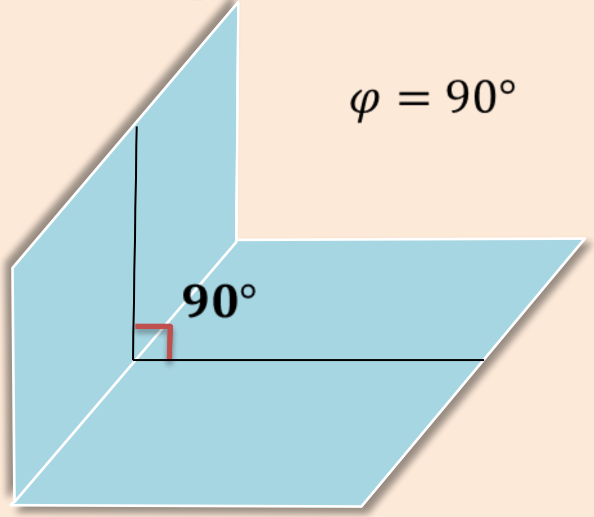



*«Двугранный угол равен 50°»*

# *Виды двугранных углов:*

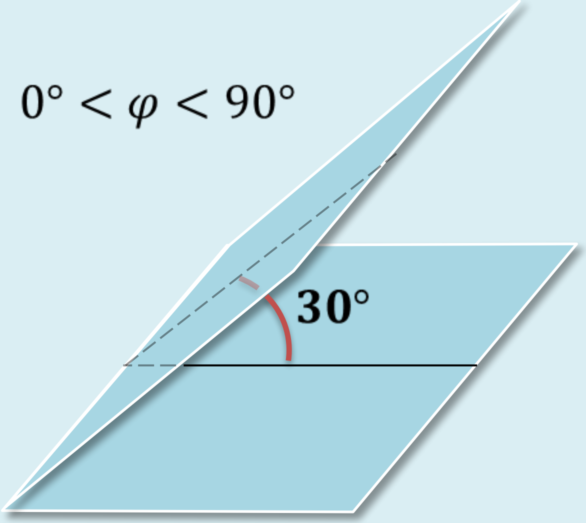
Двугранный угол называется ***прямым***, если его линейный угол равен 90°.

$\varphi = 90°$



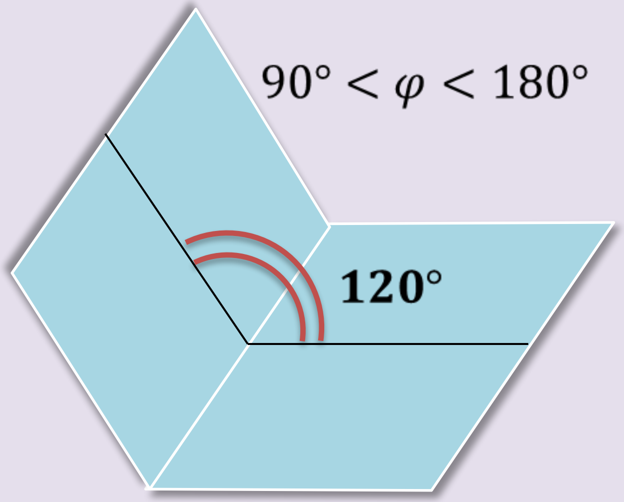

Двугранный угол называется ***острым***, если его линейный угол острый, т.е. *меньше* 90°.

$0° < \varphi < 90°$

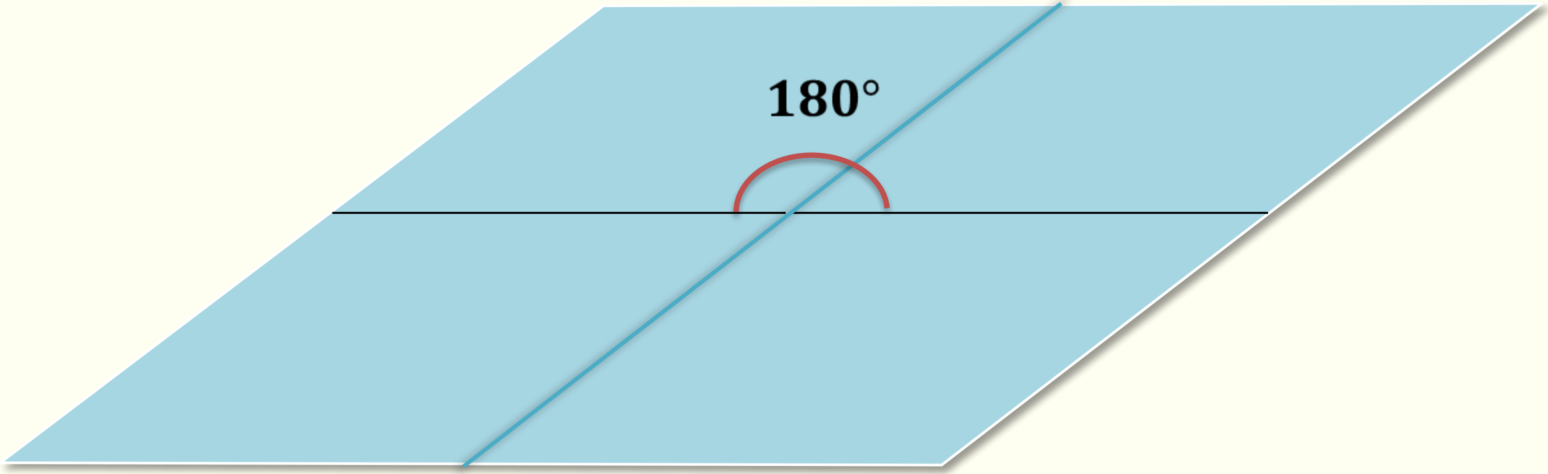



Двугранный угол называется ***тупым***, если его линейный угол тупой, т.е. *больше* 90°.

$90° < \varphi < 180°$



Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется ***развернутым***.




В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол $\varphi$ которого удовлетворяет условию:

$$0° < \varphi < 180°$$

***Пример.***

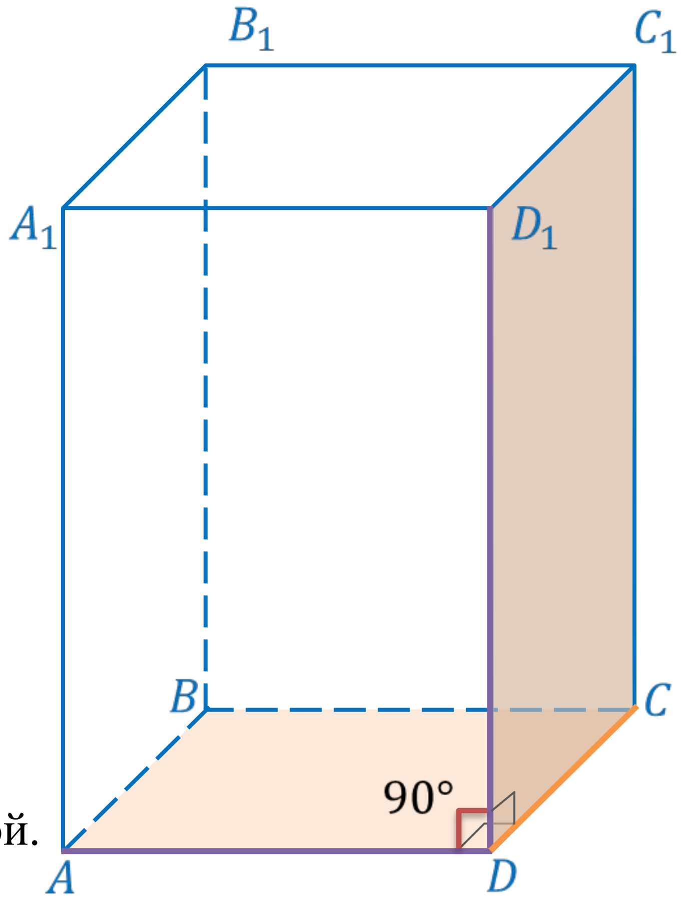
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая $DC$.

Его грани – полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и $DCC_1D_1$, так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$.

$\angle ADD_1$ – прямой, следовательно, указанный двугранный угол – прямой.

Следовательно, указанный двугранный угол – прямой.



***Пример.***

Двугранным углом при ребре пирамиды называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

$DABC$ – правильная пирамида

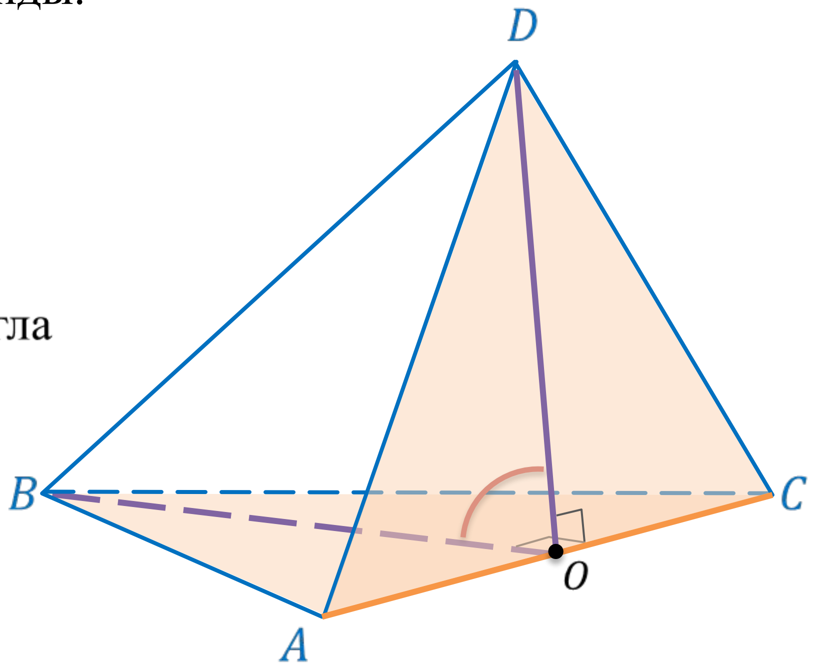
$AO = OC$

$DO \perp AC$

$BO \perp AC$

$\angle DOB$ является линейным углом двугранного угла $DACB$, ребро которого прямая $AC$.

Гранями являются полуплоскости, содержащие $\Delta ABC$ и $\Delta ACD$, так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$.



| № 1 | № 2 | № 3 |
|---|---|---|
| *Дано:* $\Delta ABC$, $AC = BC$, $AB$ лежит в плоскости $\alpha$, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 5). | *Дано:* $\angle ABC$, $\angle C = 90°$, $BC$ лежит плоскости $\alpha$, $AO \perp \alpha$, $A \in \alpha$ (рис. 6). | *Дано:* $\Delta ABC$, $\angle C = 90°$, $AB$ лежит в плоскости $\alpha$, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 7). |

Построить линейный угол двугранного угла CABD.

Построить ABCO.

Построить DABC.

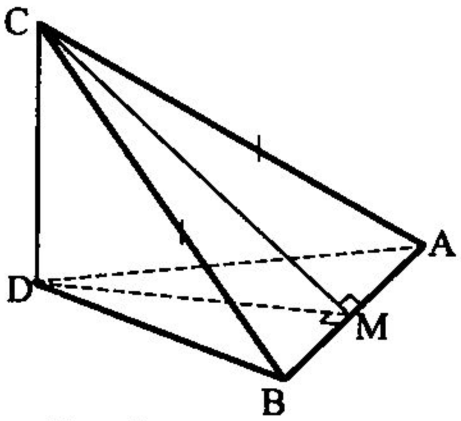


*Рис. 5*

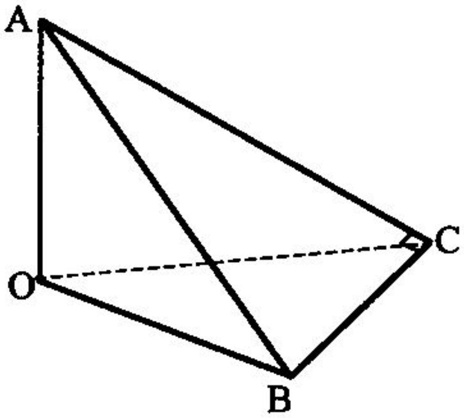


*Рис. 6*

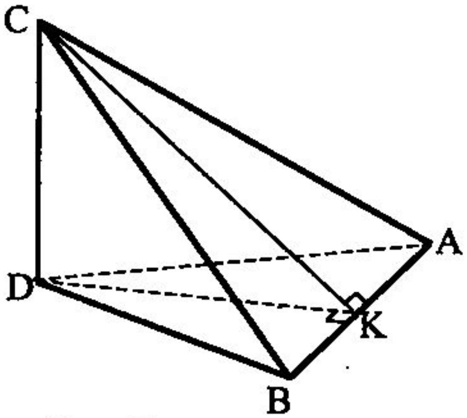
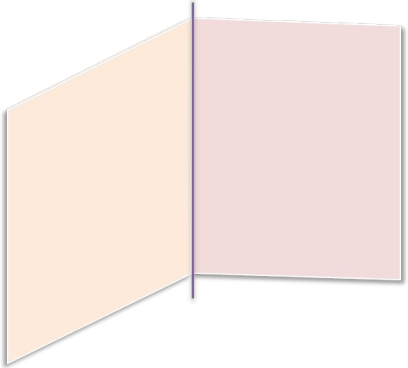
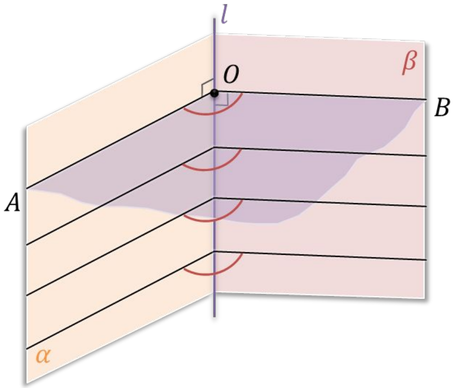


*Рис. 7*

# Двугранный угол





# Домашнее задание

№1. *Дано:* $ABCD$ – квадрат, $MB \perp ABC$

*Построить:* а) $(MDC; ABC)$; б) $MADB$;

№2. *Дано:* $DABC$ – тетраэдр, $DO \perp ABC$

*Построить:* $ABCD$