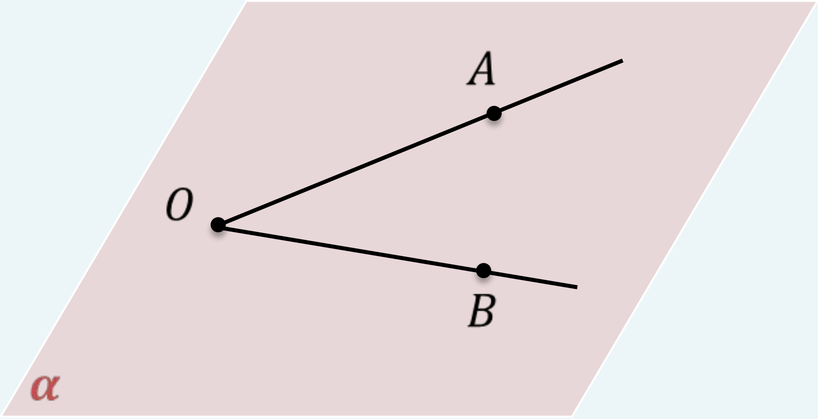
Двугранный угол

Планиметрия

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

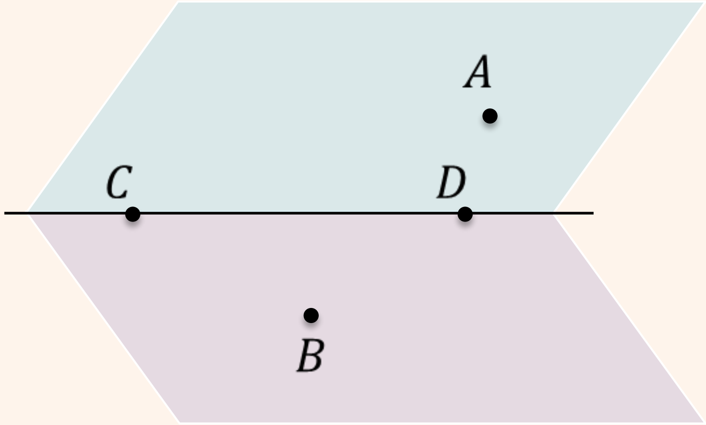
$\angle AOB$



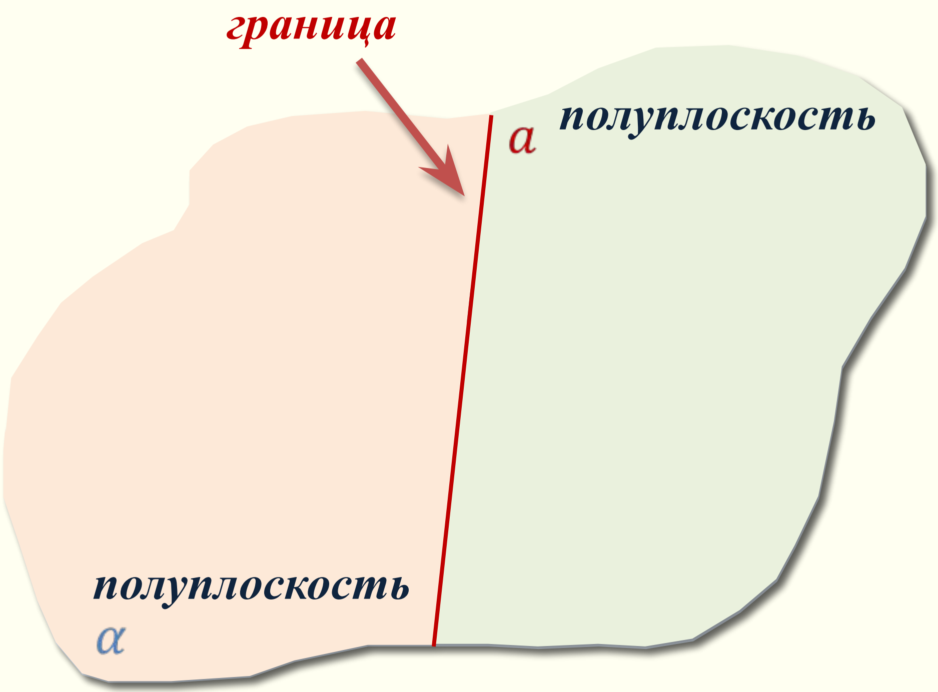
Стереометрия

Двугранные углы

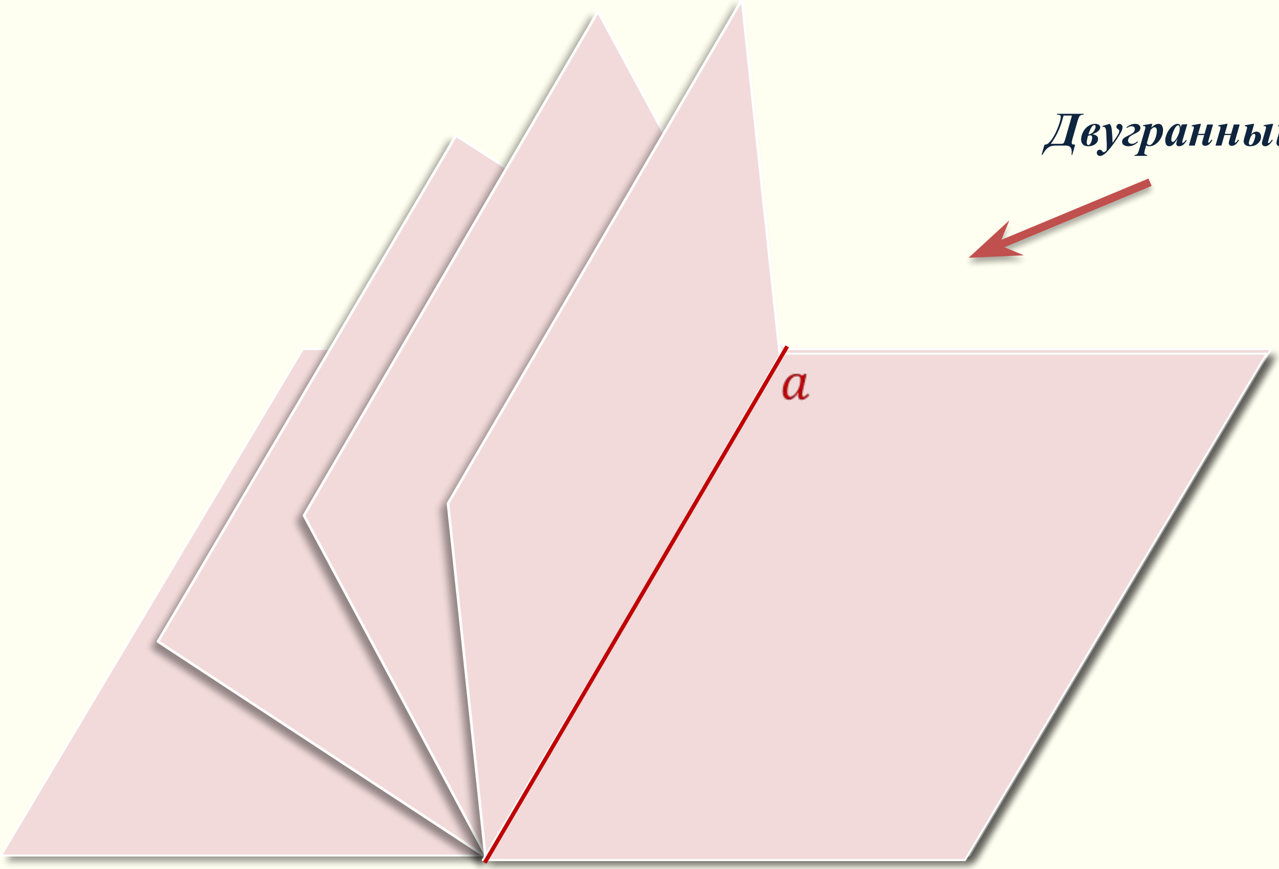
$ACDB$



Аксиома планиметрии: *любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости.*



Двугранный угол



Определение. ***Двугранным углом*** называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

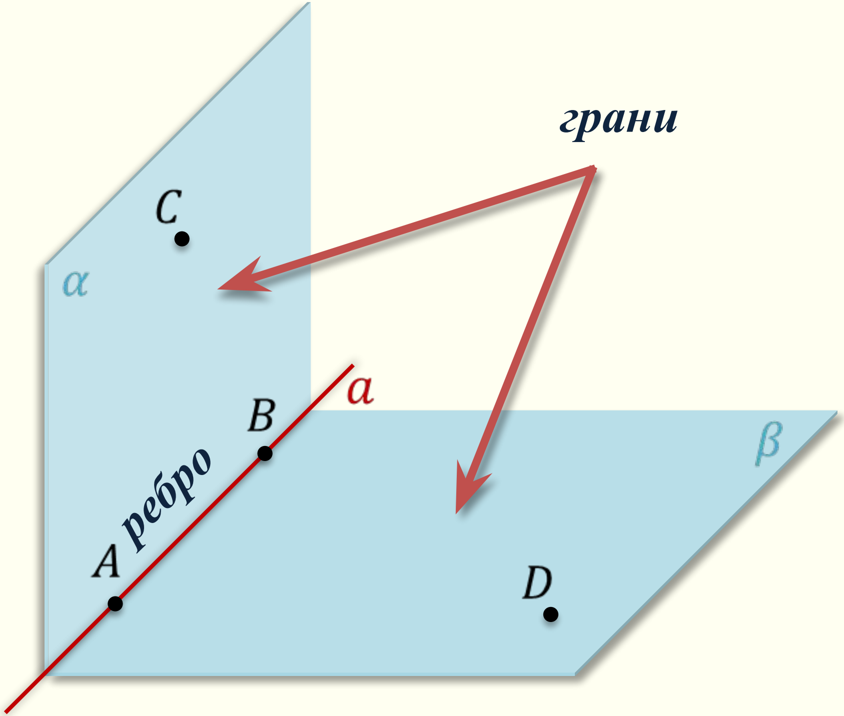
Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*.

Прямая a называется *ребром* двугранного угла.

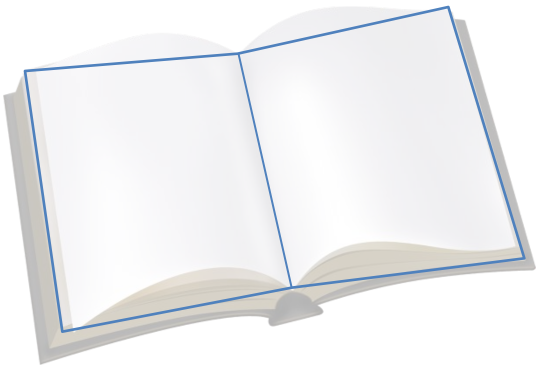
Двугранный угол, ребро которого есть прямая AB, а гранями являются полуплоскости α и β, обозначают так:

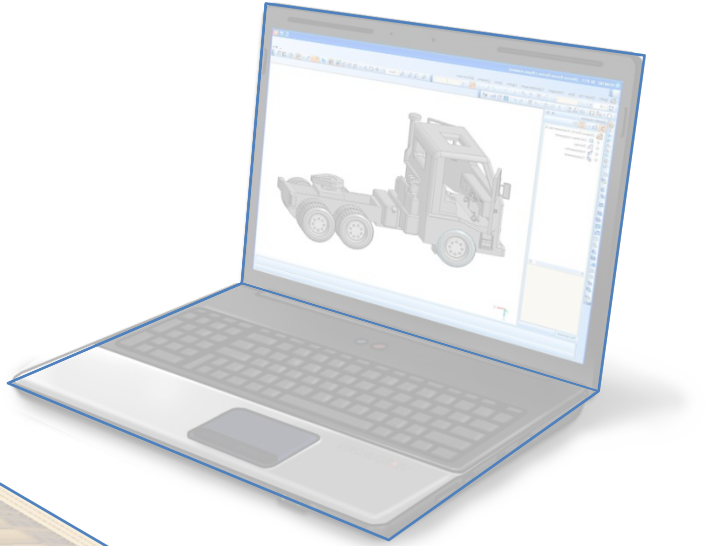
$$\boldsymbol{\alpha AB\beta}$$

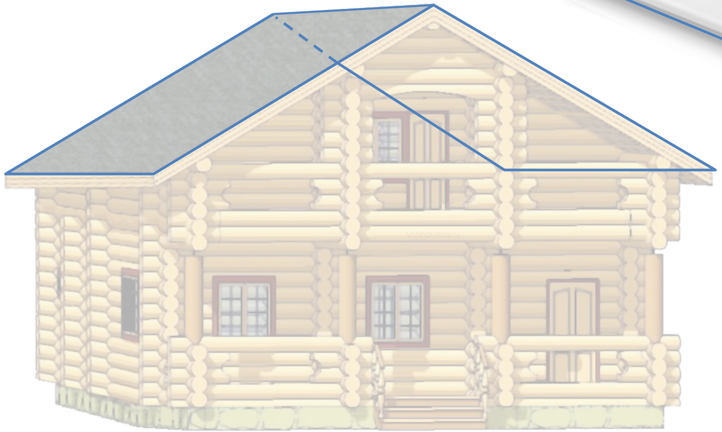
Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, то двугранный угол называют $\boldsymbol{CABD}$.



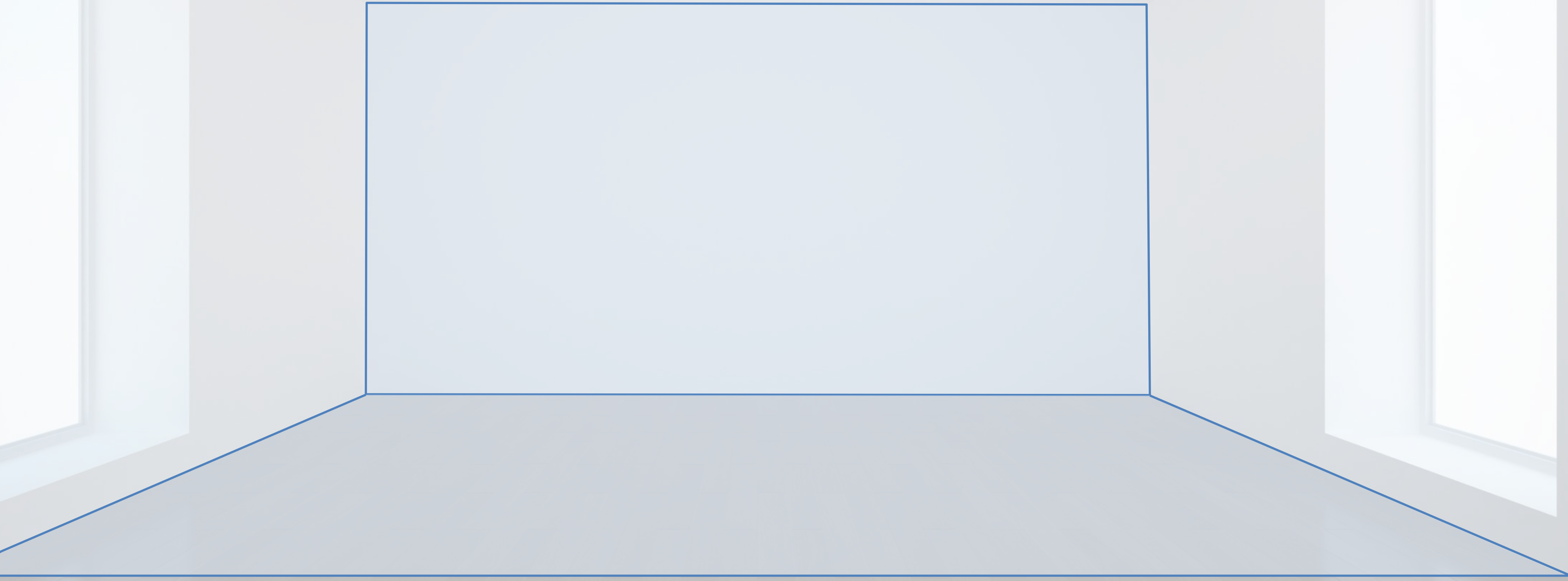
Двугранный угол







Двугранный угол



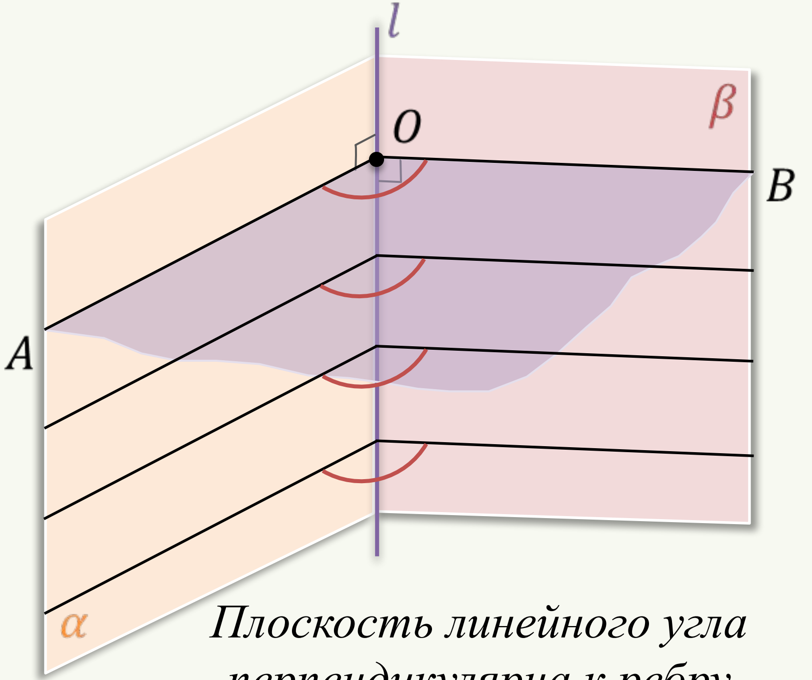
Для измерения двугранного угла вводится понятие ***линейного угла***.

Пусть $O \in l$.

$OA \subset \alpha,\ OB \subset \beta$

$OA \perp l,\ OB \perp l$

$\boldsymbol{\angle AOB}$, сторонами которого служат лучи OA и OB, называется *линейным углом* данного двугранного угла.



Определение. ***Линейным углом двугранного угла*** называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, которые проведены в его гранях перпендикулярно ребру.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла.

Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов.

Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

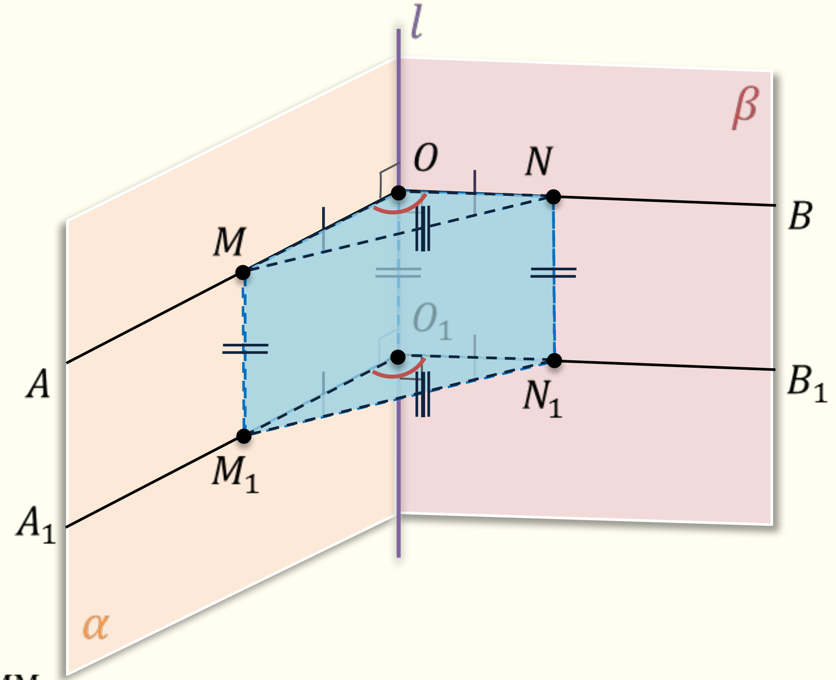
Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha,\ O_1A_1 \subset \alpha,\ OA \perp l,\ O_1A_1 \perp l \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$

$OB \subset \beta,\ O_1B_1 \subset \beta,\ OB \perp l,\ O_1B_1 \perp l \Rightarrow OB \parallel O_1B_1$

$M \in OA,\ M_1 \in O_1A_1,\ OM = O_1M_1$

$N \in OB,\ N_1 \in O_1B_1,\ ON = O_1N_1$



Так как $OM = O_1M_1,\ OM \parallel O_1M_1$, то четырехугольник OMM_1O_1 – параллелограмм.

Значит, $OO_1 = MM_1$ и $OO_1 \parallel MM_1$.

Так как $ON = O_1N_1,\ ON \parallel O_1N_1$, то четырехугольник ONN_1O_1 – параллелограмм.

Значит, $OO_1 = NN_1$ и $OO_1 \parallel NN_1$.

$MM_1 = NN_1$ и $MM_1 \parallel NN_1 \Rightarrow NMM_1N$ – параллелограмм

Следовательно, $NM = N_1M_1$.

$\Delta OMN = \Delta O_1M_1N_1$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle MON = \angle M_1O_1N_1 \Rightarrow \angle AOB = \angle A_1O_1B_1$

Что и требовалось доказать.

Все линейные углы двугранного угла равны между собой.

Доказательство.

Рассмотрим $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$.

$OA \subset \alpha, O_1A_1 \subset \alpha, OA \perp OO_1, O_1A_1 \perp OO_1$

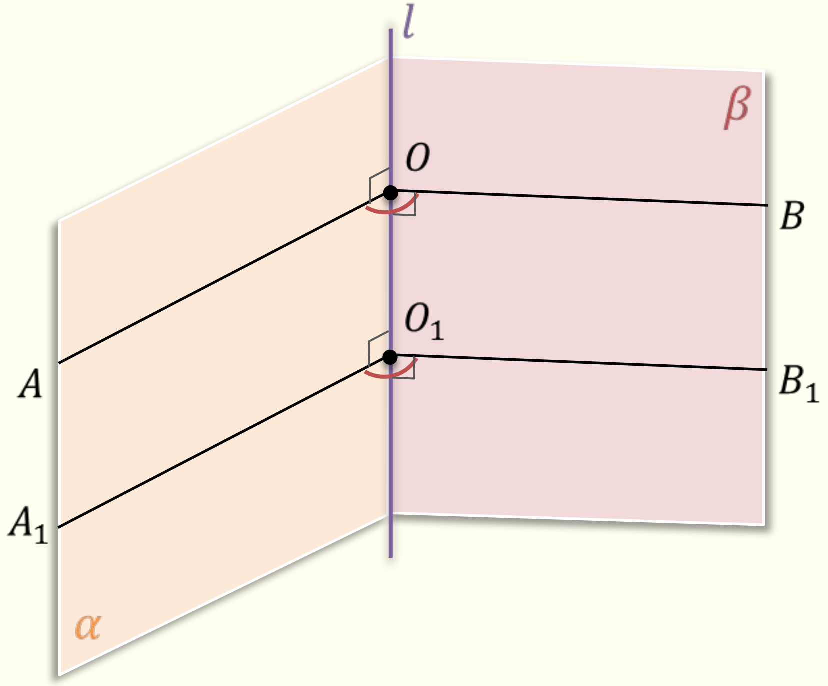
Значит, $OA \parallel O_1A_1$ – сонаправлены.

$OB \subset \beta, O_1B_1 \subset \beta, OB \perp OO_1, O_1B_1 \perp OO_1$

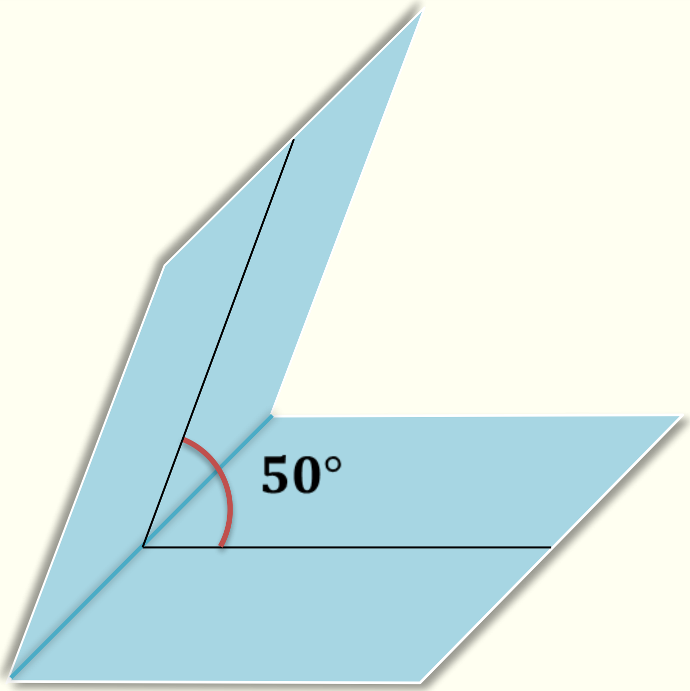
Значит, $OB \parallel O_1B_1$ – сонаправлены.

Значит, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ – как углы с сонаправленными сторонами.

Что и требовалось доказать.



Определение. ***Градусной мерой двугранного угла*** называется градусная мера его линейного угла.

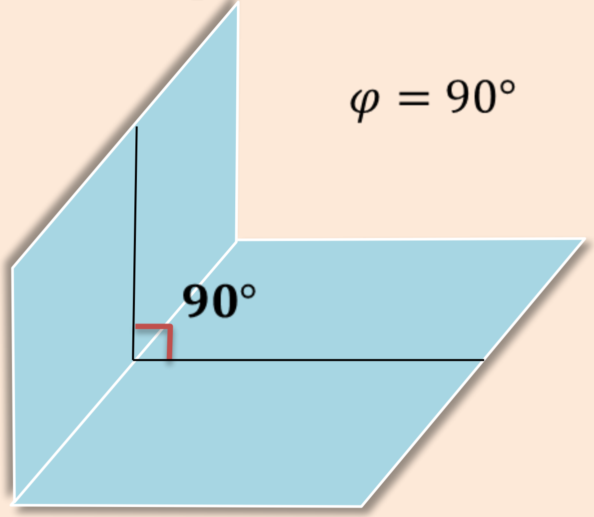


«Двугранный угол равен 50°»

Виды двугранных углов:

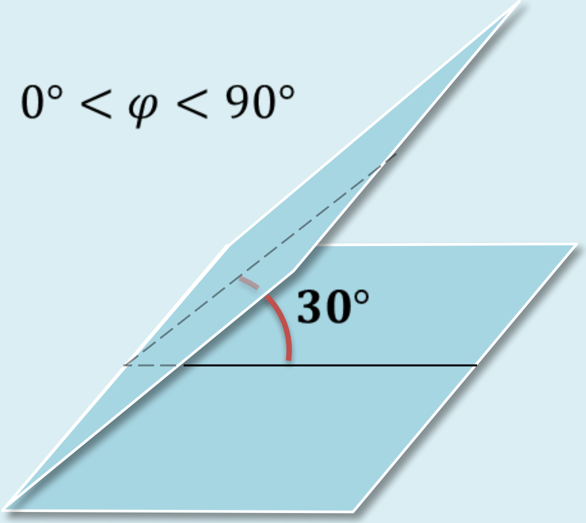
Двугранный угол называется ***прямым***, если его линейный угол равен 90°.

$\varphi = 90°$



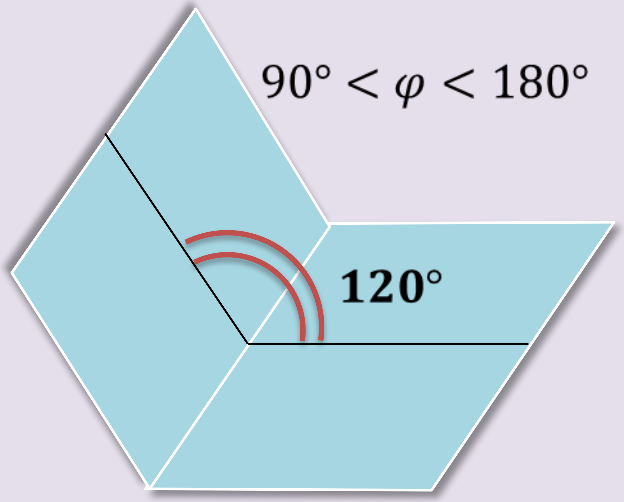
Двугранный угол называется ***острым***, если его линейный угол острый, т.е. *меньше* 90°.

$0° < \varphi < 90°$

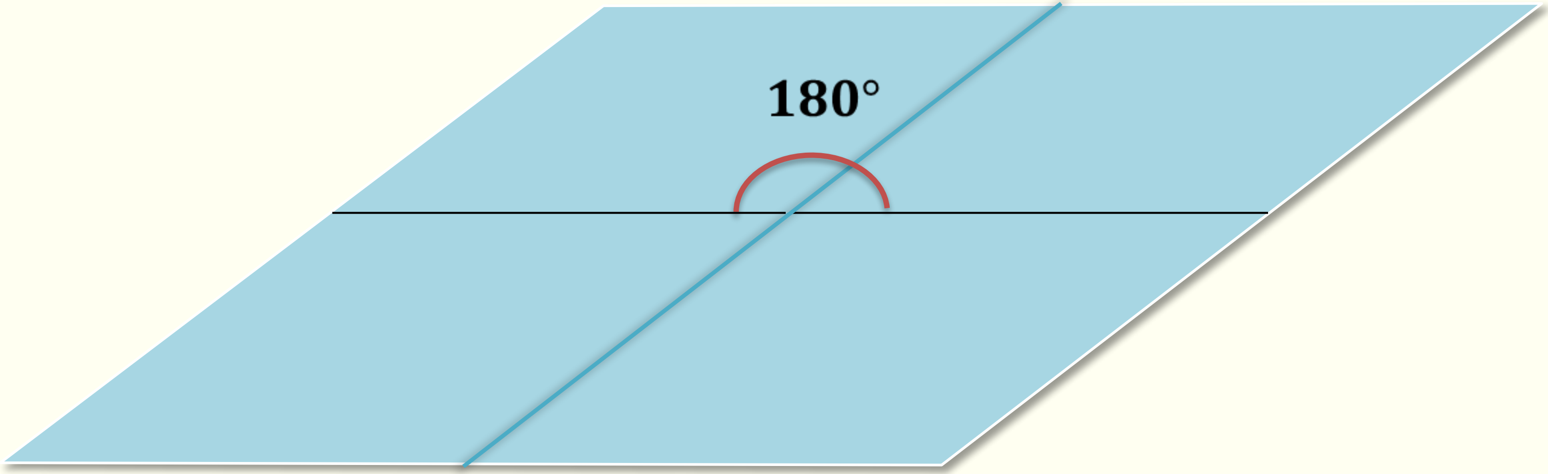


Двугранный угол называется ***тупым***, если его линейный угол тупой, т.е. *больше* 90°.

$90° < \varphi < 180°$



Если грани двугранного угла лежат в одной плоскости, то он называется ***развернутым***.



В дальнейшем под двугранным углом будем понимать всегда тот, линейный угол φ которого удовлетворяет условию:

$$0° < \varphi < 180°$$

Пример.

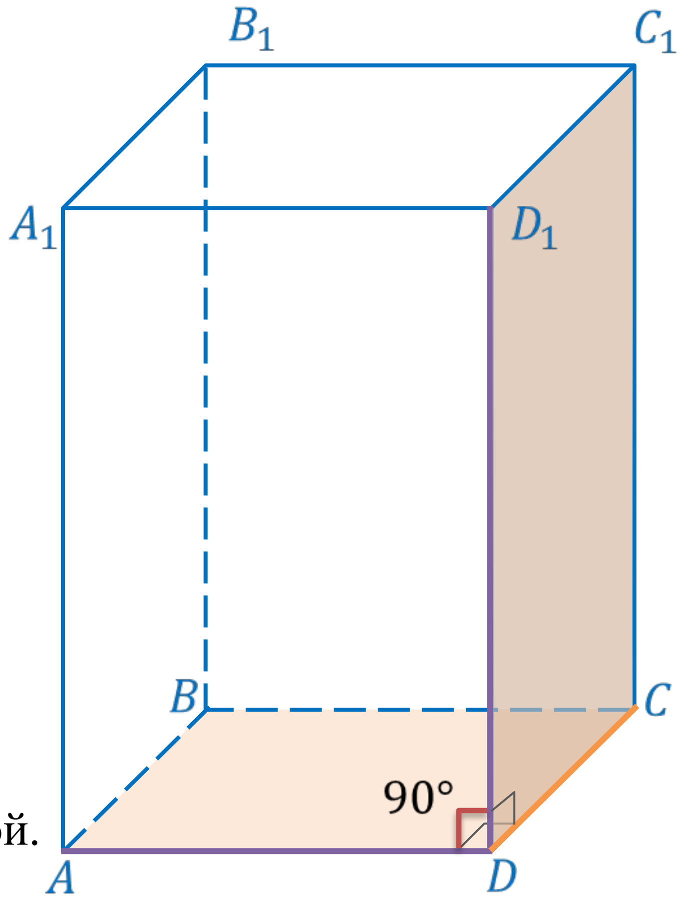
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

Тогда $\angle ADD_1$ является линейным углом двугранного угла, ребро которого есть прямая DC.

Его грани – полуплоскости, в которых лежат прямоугольники $ABCD$ и DCC_1D_1, так как $AD \perp DC$ и $DD_1 \perp DC$.

$\angle ADD_1$ – прямой, следовательно, указанный двугранный угол – прямой.

Следовательно, указанный двугранный угол – прямой.



Пример.

Двугранным углом при ребре пирамиды называется двугранный угол, ребро которого содержит ребро пирамиды, а грани двугранного угла содержат грани пирамиды, которые пересекаются по данному ребру пирамиды.

$DABC$ – правильная пирамида

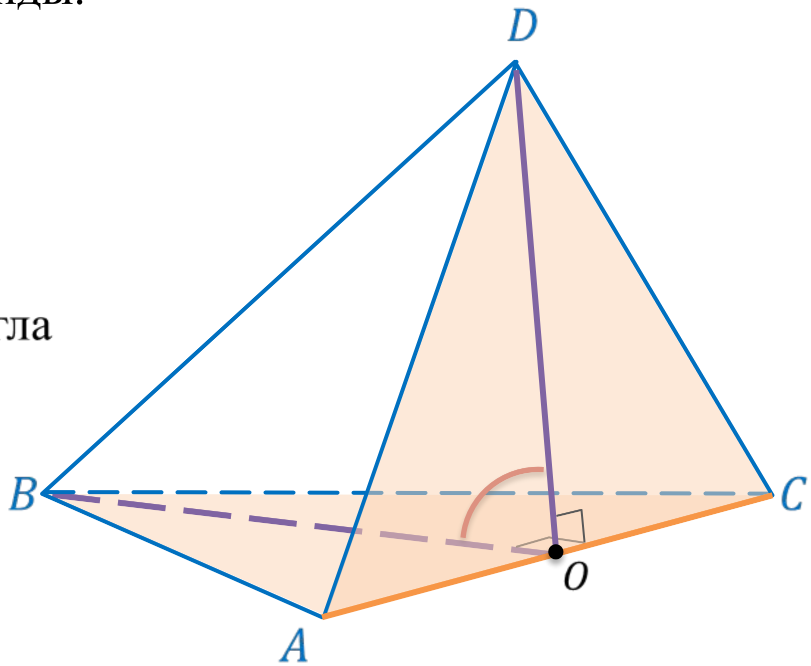
$AO = OC$

$DO \perp AC$

$BO \perp AC$

$\angle DOB$ является линейным углом двугранного угла $DACB$, ребро которого прямая AC.

Гранями являются полуплоскости, содержащие ΔABC и ΔACD, так как $DO \perp AC$ и $BO \perp AC$.



№ 1	№ 2	№ 3
Дано: ΔABC, $AC = BC$, AB лежит в плоскости α, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 5).	*Дано:* $\angle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, BC лежит плоскости α, $AO \perp \alpha$, $A \in \alpha$ (рис. 6).	*Дано:* ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, AB лежит в плоскости α, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 7).

Построить линейный угол двугранного угла CABD.

Построить АВСО.

Построить DABC.

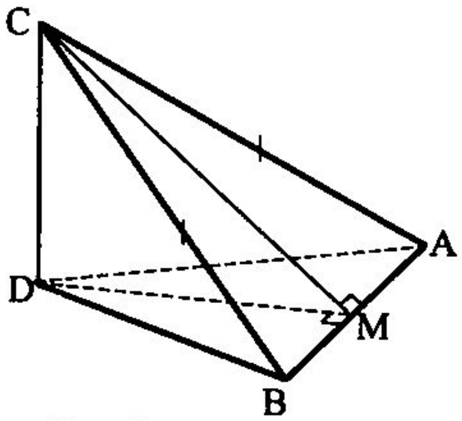


Рис. 5

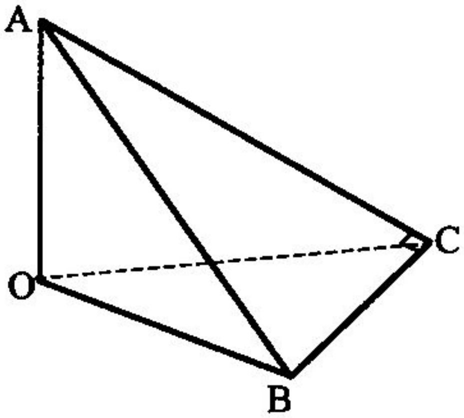


Рис. 6

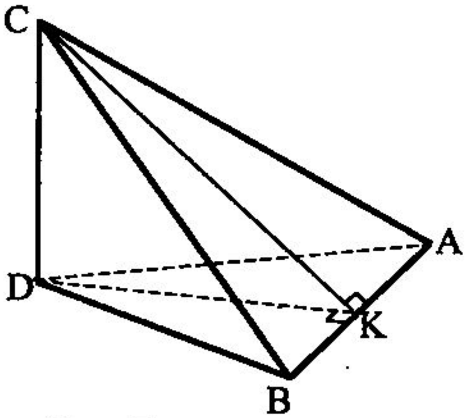
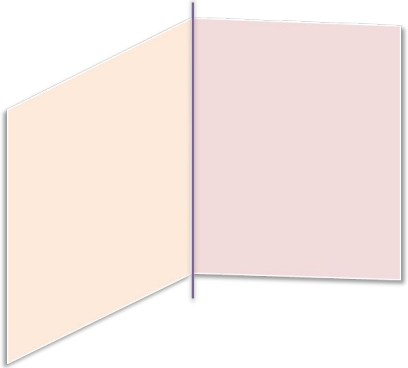
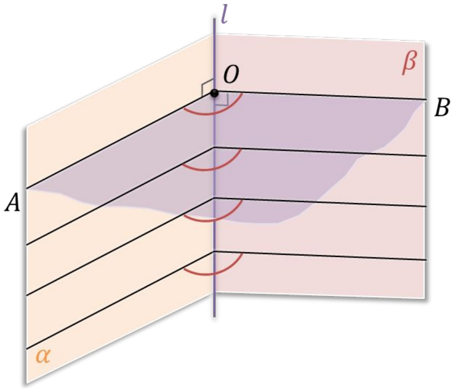


Рис. 7

Двугранный угол





Домашнее задание

№1. *Дано:* $ABCD$ – квадрат, $MB \perp ABC$

Построить: а) $(MDC; ABC)$; б) $MADB$;

№2. *Дано:* $DABC$ – тетраэдр, $DO \perp ABC$

Построить: $ABCD$