

# Кинематика материальной точки

Слова механика, физика, кинематика появилась в древней Греции в 7-6 вв. до н.э. Еще в древней Греции говорилось о первичности и о материальности окружающего нас мира.

Задача физиков не только объяснить те или иные явления, но и создать целостное представление о мире. Эйнштейн писал: «*Высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов из которых возможно получить картину мира*».

**Физика** – это *наука, изучающая наиболее общие законы, которым подчиняется окружающий нас внешний мир.*

Роль физики в естествознании очень велика. Например: закон сохранения и изменения энергии, законы термодинамики и др. справедливы и для живой природы.

Вследствие всеобщности физических законов возникло много смежных с физикой дисциплин: биофизика, физическая химия, астрофизика и т. д.

**Физика рассматривает следующие формы движения материи:**

- Электромагнитная
- Термовая
- Механическая
- Внутриатомная
- Гравитационная

**Существует два вида измерений:**

1. **Прямое** – результат получается из **опытных данных сравнения измеряемой величины с эталоном** (измерение длины – линейкой, штангенциркулем, микрометром; времени – часами, секундомером).
2. **Косвенное** – результат получается на основании **опытных данных прямых измерений нескольких величин, связанных между собой функциональной зависимостью.** Например:  $V = S/t$ .

Совокупность основных единиц и выраженных через них производных, называется системой единиц СИ, принятой Международной конвенцией.

**Основные единицы:** *длина – метр (м), масса – килограмм (кг), время – секунда (с), сила тока – Ампер (А), температура – Кельвин (К), количество вещества – моль (масса изотопа С12 0,012 кг), сила света – Кандела.*

**Дополнительные единицы:** *радиан, стерадиан* (плоский и объемный угол).

Широко используются другие системы, например, *физическая СГС*. Название системы складывается из названий основных единиц – сантиметр, грамм, секунда.

Первым известным физиком механиком в истории человечества был Архимед. Который уделял большое внимание созданию различных приборов в том числе и военного оборудования.

**Механика**- «механе»-орудие, приспособление.

**Механика изучает самый простой вид движения перемещение тел в пространстве.**

В механике рассматривается движение тел.

**Кинематика** - изучает движение тел, но не рассматривает причины, вызывающие это движение.

**Динамика** - изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Статика** - изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

**Механическое движение – изменение положения тела или частей тела в пространстве с течением времени.**

Существует два вида механического движения:

- поступательное;
- вращательное.

При **поступательном движении** все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения.

Наиболее простым случаем движения является движение материальной точки.

**Материальной точкой** называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором оно рассматривается

Выбираем систему отсчета, относительно которой будем рассматривать движение материальной точки. Например: прямоугольная система координат XYZ. Положение материальной точки можно задать тремя скалярными уравнениями

$$x = f_1(t);$$

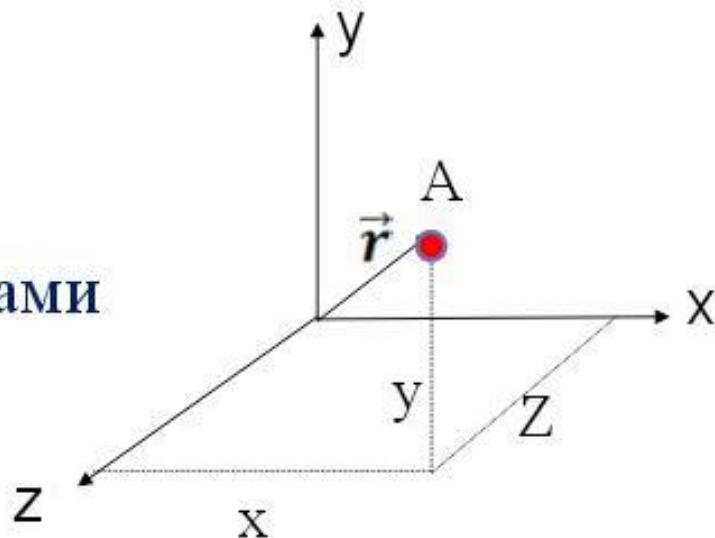
$$y = f_2(t);$$

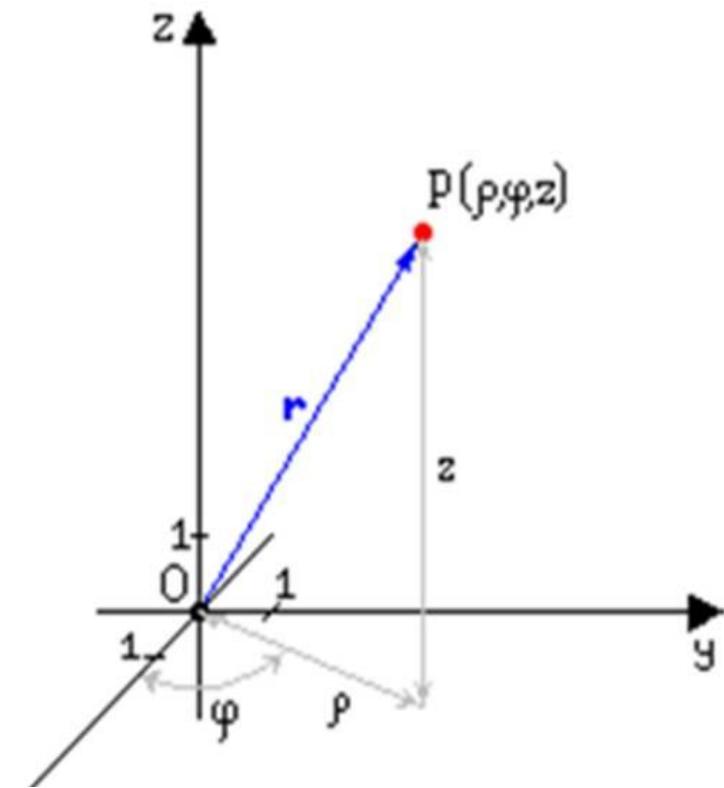
$$z = f_3(t)$$

одним векторным

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

А также тремя координатами  
(X, Y, Z).





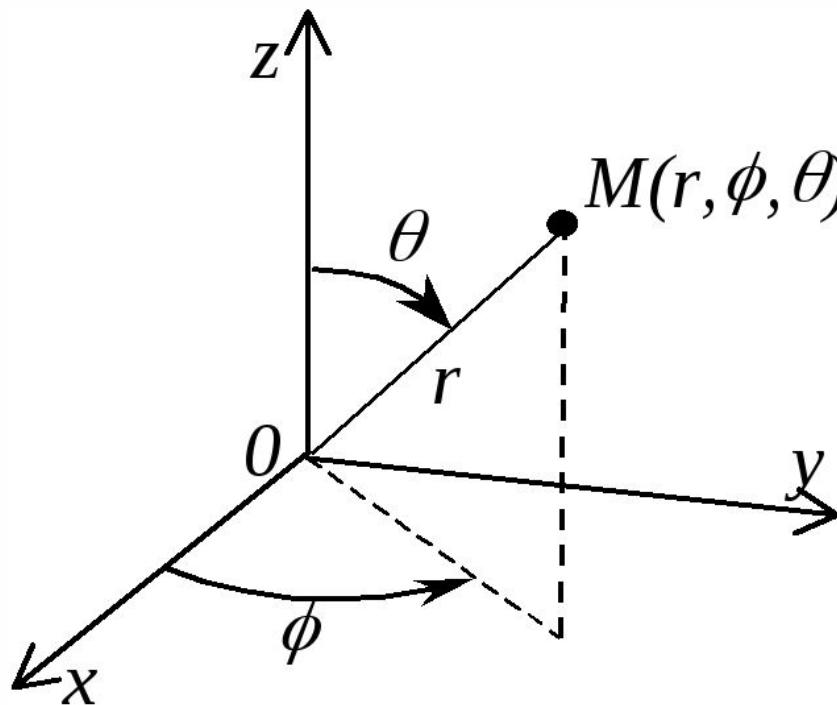
## Цилиндрическая система координат

трехмерный аналог полярных,  
в котором точка  $P$   
представляется  
трехкомпонентным  
кортежем  $(r, \theta, h)$ .

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$



Связь между декартовыми и сферическими координатами описывается формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Связь между сферическими и цилиндрическими координатами описывается формулами

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\rho}{z}.$$

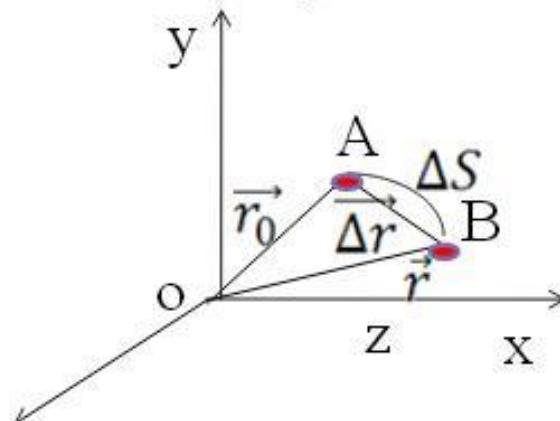
**Траектория**- это линия вдоль которой движется тело.

Рассмотрим перемещение точки из положения А в положение В за промежуток времени  $\Delta t$

В зависимости от формы траектории различают:

- Прямолинейное движение (траектория - прямая линия)
  - Криволинейное движение (траектория - кривая линия)
- Путь- расстояние, измеренное вдоль траектории.**

$AB = \Delta S$  –путь или длина пути, длина траектории.



$\Delta S$  - скалярная величина (положительная, отрицательная). Измеряется в м.

Перемещение - *направленный отрезок, соединяющий начальную точку с конечной. Это векторная величина.*

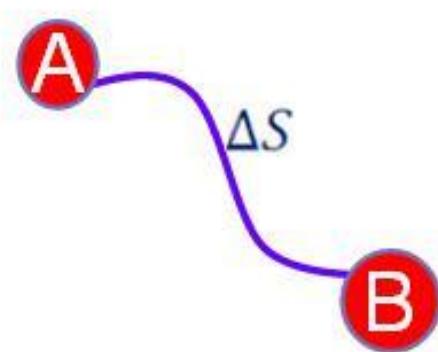
$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \text{ - перемещение,}$$

$\Delta \vec{r}$  - вектор, характеризуется численным значением и направлением

Для характеристики движения вводим понятие скорости.

**Скорость** - это физическая величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

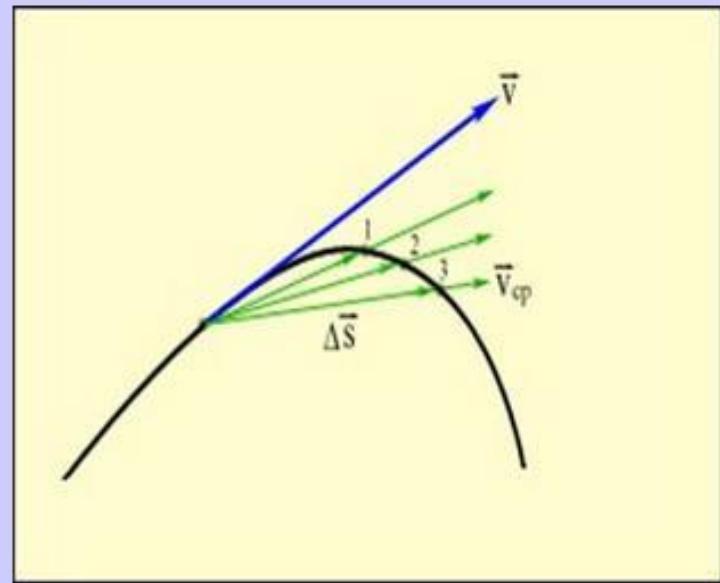
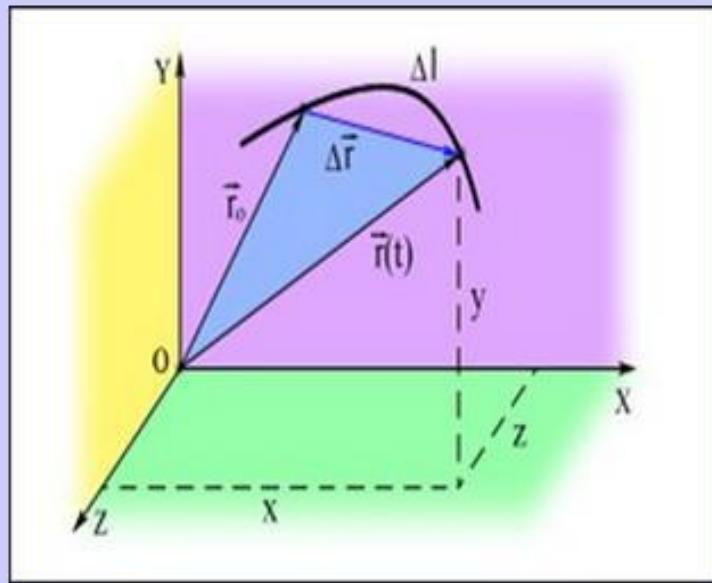
Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, прошла за промежуток времени  $\Delta t$  путь  $\Delta S$ . Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется средней скоростью движения



$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

1

# Скорость точки при криволинейном движении



$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt}$$

Предел этого отклонения при  $\Delta t \rightarrow 0$  назовем скоростью в данный момент времени или мгновенной скоростью

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \quad \rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по модулю равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю.

## Скорость – первая производная пути по времени.

При  $\Delta t \rightarrow 0$  численное значение скорости

$$\bar{V} = \frac{\overline{dS}}{dt}$$
 откуда  $\overline{dS} = \bar{V} dt$

Проинтегрируем это выражение в интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$

$$S = \int_t^{t+\Delta t} V dt$$
 3

Если движение равномерное

$$S = V \Delta t$$
 4

где  $S = [м]$ ;  $V = [м/с]$ ;  $t = [с]$ .

Равномерным называется движение - с неизменной скоростью.

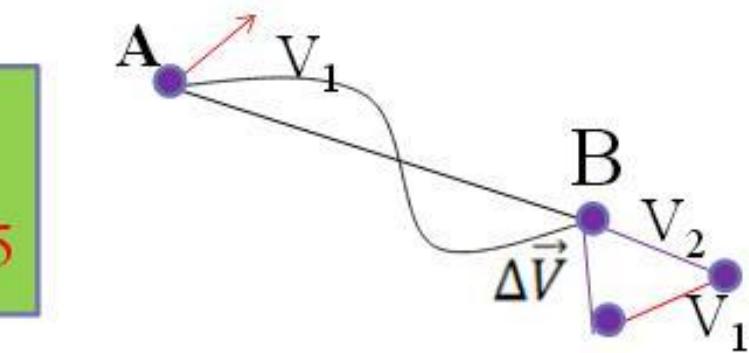
Если движение не равномерное, то вводится понятие ускорения.

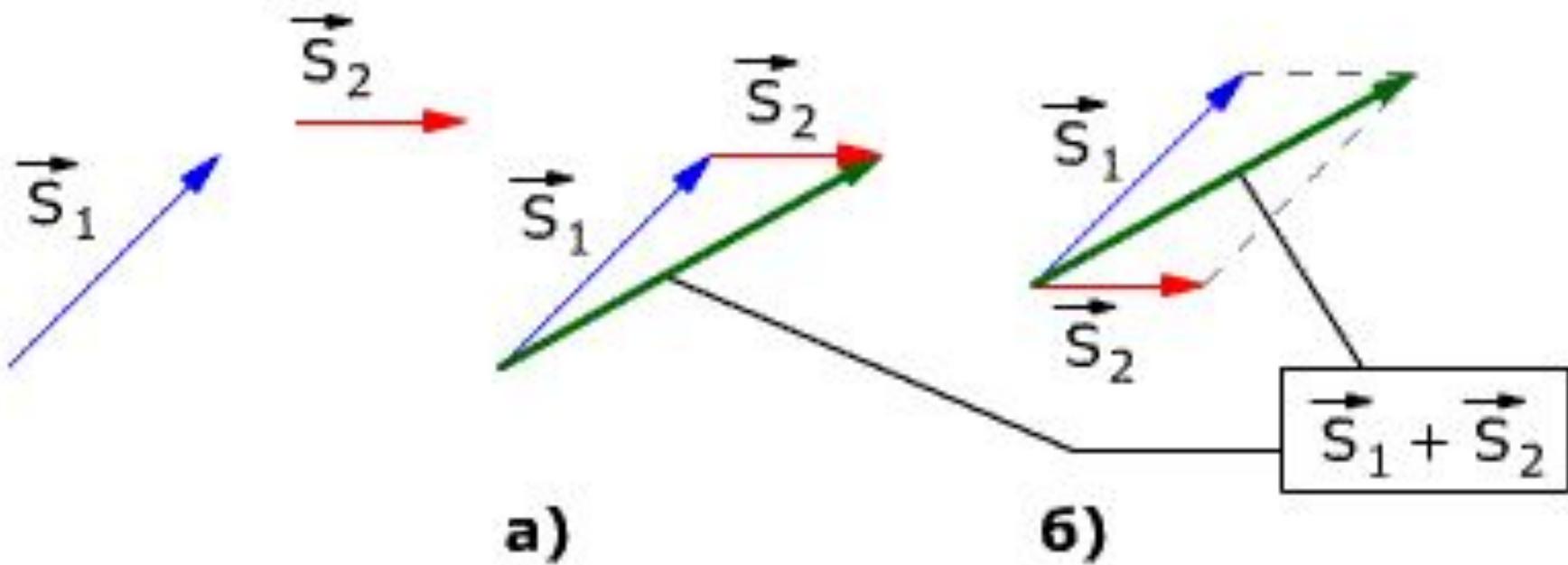
**Ускорение** – физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.

Пусть материальная точка переместилась за малый промежуток времени  $\Delta t$  из точки “A”, где она имела скорость  $V_1$ , в точку “B”, где она имеет скорость  $V_2$ .

Изменение скорости движения точки есть вектор  $\Delta V$ , равный разности векторов конечной и начальной скоростей.

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$$





Среднее ускорение – это отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$$
 6

Ускорение направлено в ту же сторону, что и вектор изменения скорости  $\Delta \bar{V}$

Предел этого отношения при  $\Delta t \rightarrow 0$  есть 1-я производная скорости по времени и называется мгновенным ускорением

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d \bar{V}}{dt}$$
 7

Так как

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \bar{a} = \frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$
 8

Ускорение - это вторая производная пути по времени.  
Измеряется  $a = [\text{м}/\text{с}^2]$ .

Ускорение, как и скорость, имеет направление.

В общем случае ускорение зависит от времени  
(движение с переменным ускорением).

Если направление ускорения совпадает с направлением  
скорости – движение равноускоренное.

Если противоположно – равнозамедленное.

Рассмотрим случай, когда пройденный путь определяется выражением.

$$S = A + Bt + Ct^2$$

9

**Возьмем первую и вторую производные пути по времени**

$$V = \frac{dS}{dt} = B + 2Ct$$

10

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = 2C = \text{const}$$

случай равноускоренное движение

Значит,  $C = \frac{a}{2}$

Введем обозначения:  $A = S_0$ ;  $B = V_0$ ;  $C = \frac{a}{2}$

Получаем формулу пути при равноускоренном движении:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad 11$$

а скорость

$$V = V_0 + at \quad 12$$

выразим из формулы скорости ускорение

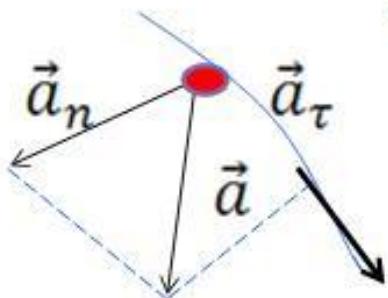
$$a = \frac{V - V_0}{t} \quad 13$$

-ускорение при  
равноускоренном движении

Разложим вектор ускорения на 2 составляющие: *тангенциальную* и *нормальную*. Первая составляющая направлена по касательной к траектории, вторая по нормали.

Численное значение полного ускорения равно:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



**Тангенциальное ускорение** - характеризует быстроту изменения скорости.

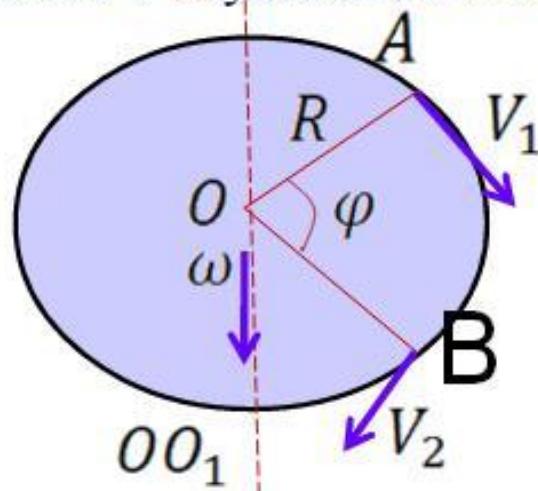
$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \quad 14$$

**Нормальное ускорение** - характеризует изменение скорости по направлению.

$$a_n = \frac{V^2}{R} \quad 15$$

При вращательном движении - все точки, принадлежащие твердому телу, описывают окружности относительно оси вращения.

Вращательное движение характеризуется двумя величинами: линейной  $V$  и угловой  $\omega$  скоростями.



Угловой скоростью  $\omega$  - называется отношение угла поворота радиуса  $R$  (угловой путь) к промежутку времени, за который этот поворот произошел.

В случае равномерного движения:

$$\langle \bar{\omega} \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$
 16

Где  $\Delta\varphi$  – угол поворота, [рад];  $\langle \bar{\omega} \rangle$  – средняя скорость [рад/с];  
 $\Delta t$  – время, [с].

В случае неравномерного движения мгновенная угловая  
скорость будет иметь вид:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad [\text{рад/с}]$$
 17

**Угловая скорость – первая производная угла поворота по времени.**

При неравномерном вращательном движении вводим понятие углового ускорения.

**Среднее угловое ускорение** – отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

18

**Мгновенное ускорение** – предел среднего углового ускорения при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \text{ [рад/с}^2\text{]}$$

19

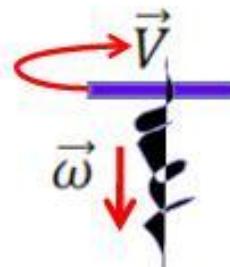
Угловое ускорение – это первая производная скорости по времени и вторая производная углового пути по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left( d \frac{d\varphi}{dt} \right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

20

Направление углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости при равноускоренном движении и противоположно при равнозамедленном. Направление угловой скорости определяется правилом буравчика.

*Вектор угловой скорости направлен в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости.*



Обозначим:  $\Delta\varphi = 2\pi$ ,  $dt = T$  – период – время, в течение которого совершается один полный оборот, получим:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_{21}$$

где  $\nu = 1/T$  – угловая частота Гц];  $T$  – период, [с].

$$\omega = 2\pi\nu_{22}$$

*угловая скорость, выраженная через частоту*

## *Линейная скорость при вращательном движении*

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

23

Если материальная точка совершает полный оборот, то  $\Delta S = 2\pi R$

$$V = 2\pi R \nu$$

24

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

*линейная скорость,  
выраженная через  
частоту*

*Линейная скорость,  
выраженная через  
период*

## Линейные

$$S, \bar{S}, \bar{V}, \bar{a}$$

$$V = V_0 + at$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

## Угловые

$$\varphi, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

*При равномерном движении по окружности*

$$AB = S, \Rightarrow S = R \cdot \varphi$$

*Возьмем 1-ю производную по времени*

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{dS}{dt} = V; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$V = \omega R$$

25

*Связь между линейной и угловой скоростью.*

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = \varepsilon \cdot R$$

26

*связь между ускорением линейным и угловым*