

АКС приКАУ

Основы высшей и дискретной математики

Тема урока: Общее уравнение прямой и плоскости
Преподаватель Аширбекова Р.Н.

Общее уравнение прямой

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ (1) называется общим уравнением прямой, где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Частные случаи общего уравнения прямой

- Если $C = 0$, уравнение (1) будет иметь вид $Ax + By = 0$ (рис.1), и прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты начала координат $x = 0, y = 0$ удовлетворяют этому уравнению.
- Если в общем уравнении прямой (1) $B = 0$, то уравнение примет вид $Ax + C = 0$ (рис.2), или $x = -\frac{C}{A}$. Уравнение не содержит переменной y , а определяемая этим уравнением прямая параллельна оси Oy .
- Если в общем уравнении прямой (1) $A = 0$, то это уравнение примет вид $By + C = 0$ (рис.3), или $y = -\frac{C}{B}$. Уравнение не содержит переменной x , а определяемая им прямая параллельна оси Ox .

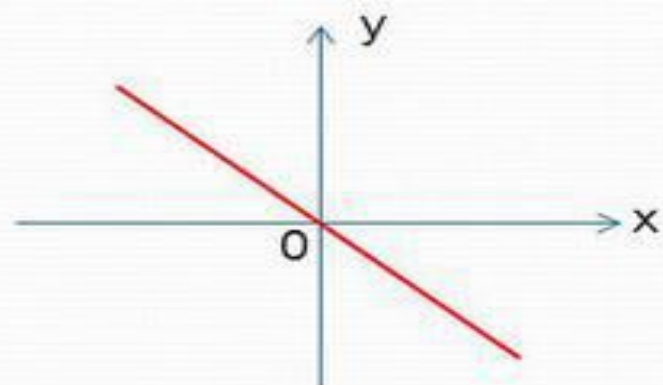


Рис. 1

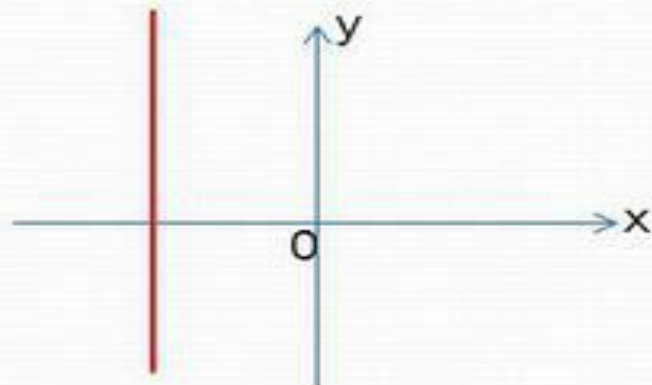


Рис. 2

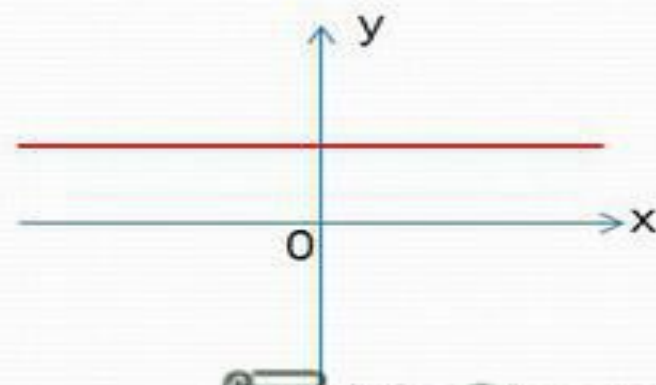


Рис. 3

Частные случаи общего уравнения прямой

- При $C = 0$ и $A = 0$ уравнение (1) принимает вид $Bu = 0$, или $y = 0$. Это уравнение оси Ox (рис. 4).
- При $C = 0$ и $B = 0$ уравнение (1) запишется в виде $Ax = 0$ или $x = 0$. Это уравнение оси Oy (рис. 5).

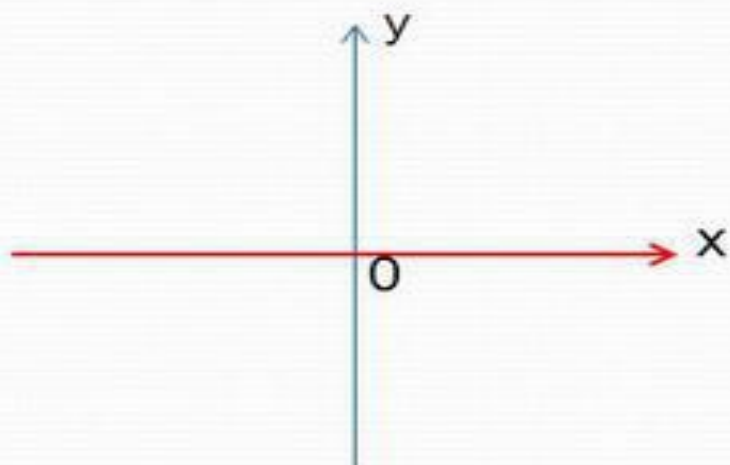


Рис. 4

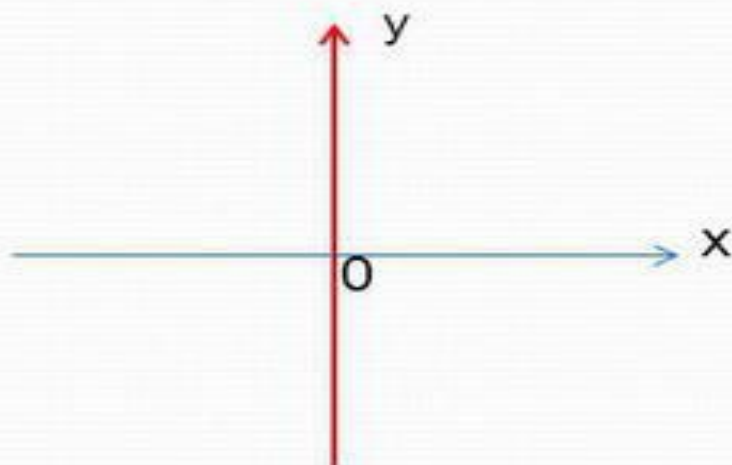


Рис. 5

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угол α , определяемый, как показано на рис.6, называется углом наклона прямой к оси Ox . Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом прямой; его обычно обозначают буквой k :

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

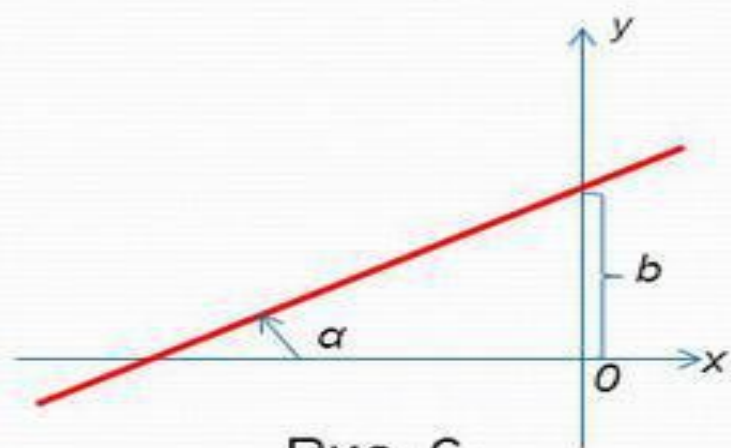


Рис. 6

Уравнение $y=kx+b$ (2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом; k - угловой коэффициент, b - величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy , считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением, то ее угловой коэффициент определяется по формуле $k = -\frac{A}{B}$

Угол между двумя прямыми

Пусть две пересекающиеся в точке M прямые L_1 и L_2 определяются соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Найдем тангенс угла φ между этими прямыми (рис. 7).

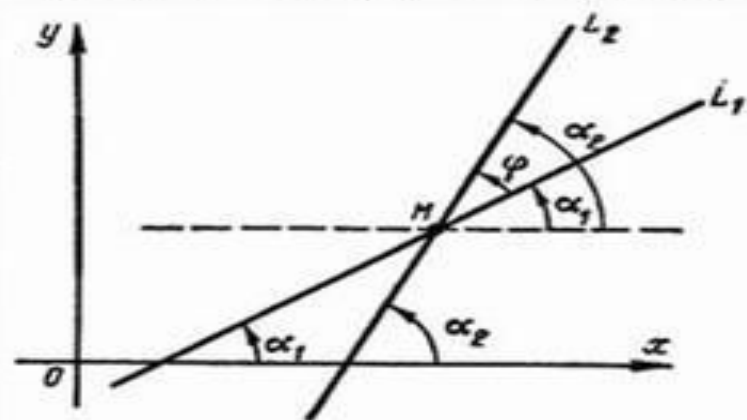


Рис. 7

Данные прямые не перпендикулярны друг другу, так как иначе $\operatorname{tg}\varphi$ не существовал бы.

Пусть прямая L_1 образует с осью абсцисс угол α_1 , а прямая L_2 — угол α_2 . Проведя через точку M , в которой пересекаются прямые L_1 и L_2 , прямую, параллельную оси Ox , увидим, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 * \operatorname{tg}\alpha_2}$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ а $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Условия параллельности двух прямых

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2$$

Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условия перпендикулярности двух прямых

В случае, когда прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Это условие может быть записано также в виде

$$k_1 k_2 = -1$$

Если уравнения прямых заданы в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (3), то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Координаты точки пересечения двух прямых находят, решая систему уравнений (3). Прямые (3) пересекаются в том и только в том случае, когда

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k ,

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, которая называется центром пучка.

Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется пучком прямых, а общая их точка — центром пучка.

Если в уравнении (4) под k будем понимать величину, принимающую всевозможные числовые значения, то это уравнение будет определять совокупность прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, т. е. пучок прямых с центром в точке $A(x_1, y_1)$ (в формуле (4) можно записать уравнение любой из прямых пучка, кроме одной — параллельной оси Oy).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Напишем уравнение (4) пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Из этого пучка нам следует выбрать прямую, проходящую через точку $M_2(x_2; y_2)$. Угловым коэффициентом k этой прямой должен быть такой, чтобы координаты точки $M_2(x_2; y_2)$ удовлетворяли уравнению (4), т. е. чтобы имело место равенство $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Из этого условия мы находим угловым коэффициентом искомой прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

и подставляем его в уравнение (4) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Это уравнение обычно записывают в следующей симметричной форме:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая, отсекающая на оси абсцисс отрезок, равный a , а на оси ординат – отрезок, равный b . Точки пересечения прямой с осями координат: $A(a;0)$ и $B(0;b)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

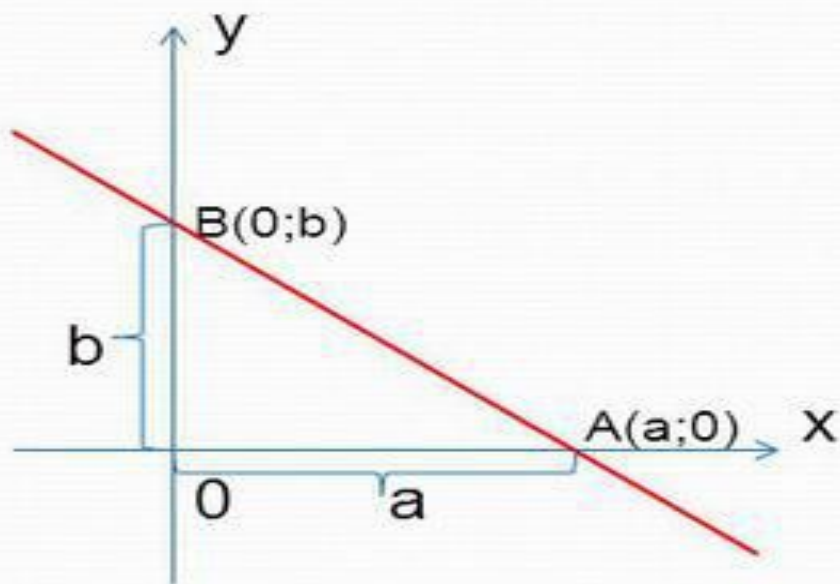


Рис. 9

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}, \frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}; \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b};$$

Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнения прямой на плоскости

Пусть на плоскости заданы точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{n} = (A; B)$. Необходимо построить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 , перпендикулярно вектору \vec{n} . Вектор \vec{n} называют вектором *нормали* прямой.

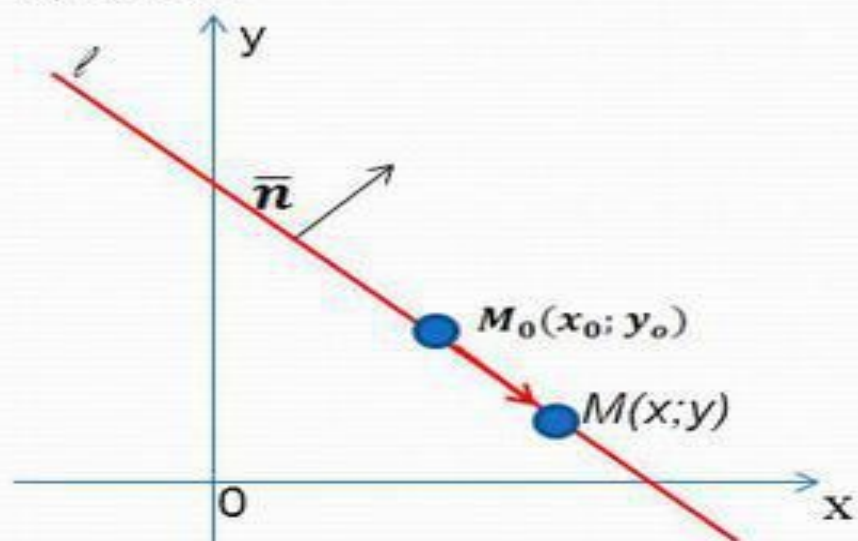


Рис. 10

Выберем на прямой произвольную точку $M=(x; y)$ и построим вектор $\overline{M_0M}$. Так как $\vec{n} = (A; B) \perp l$, то, используя свойство скалярного произведения, можем записать:

$$\begin{aligned} \overline{M_0M} * \vec{n} &= (x - x_0; y - y_0) * (A; B) = \\ &= A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Из (5) получаем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 \perp$ вектору \vec{n}

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Уравнения прямой на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой. Найдем уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{S}(m; n)$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка на искомой прямой ℓ .

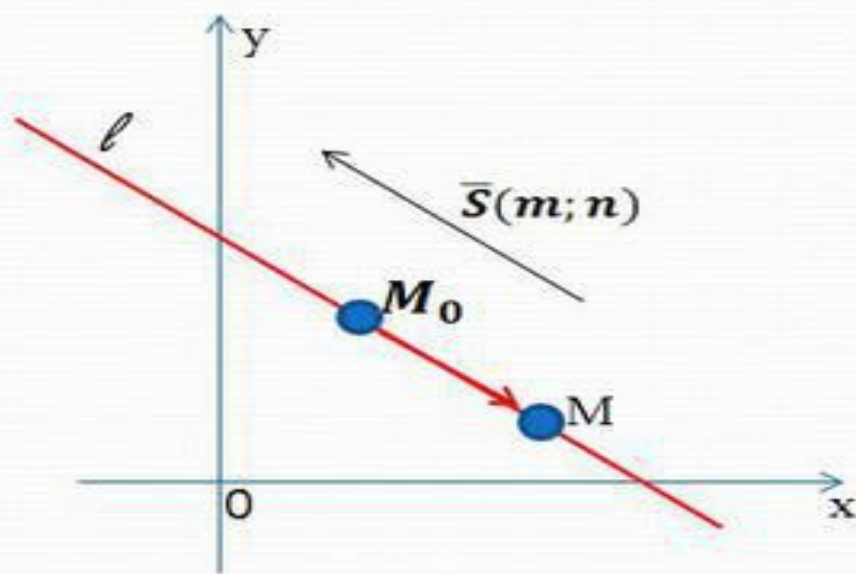


Рис. 11

Введем в рассмотрение вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и \vec{S} записывается как пропорциональность их координат:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (6)$$

Уравнение прямой, записанное в виде (6), называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости

Уравнения прямой на плоскости

Параметрическое уравнение очень легко получается из канонического уравнения (6). Если мы равенство двух отношений приравняем к некоторому значению t :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t$$

Легко увидеть, что из двойного равенства получаем:

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad x - x_0 = mt; \quad \frac{y - y_0}{n} = t, \quad y - y_0 = nt;$$

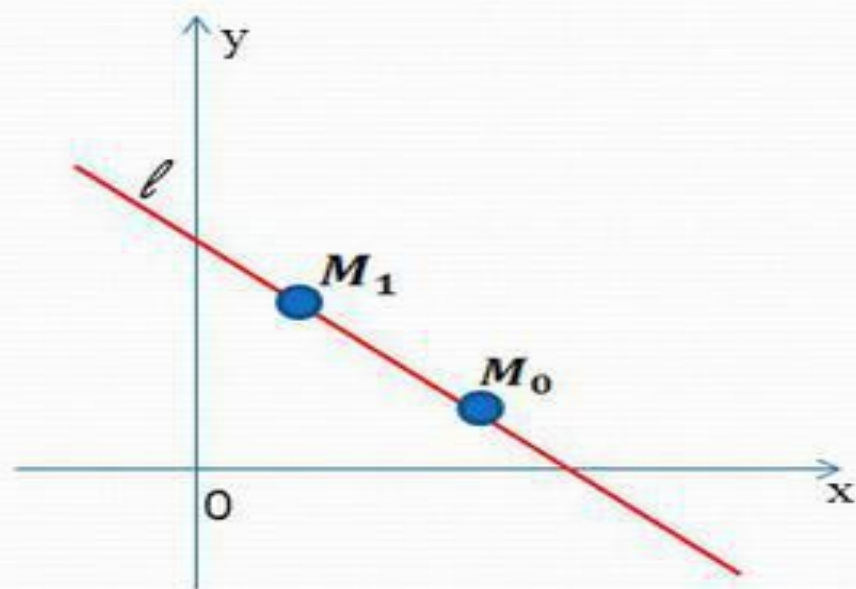
Перенесем x_0 и y_0 в правые части уравнений, где x и y будут находиться как:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad (7)$$

Система уравнений (7) называется параметрическим уравнением прямой, где t – параметр. Особенность этого типа уравнения в том, что прямая задается двумя уравнениями.

Уравнения прямой на плоскости

Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$. Для этого достаточно взять в качестве направляющего вектора вектор $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0)$.



Тогда искомое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (8)$$

Рис.12

Уравнения прямой на плоскости

Пример 1. Дано общее уравнение прямой $2x-3y+1=0$. Проходит ли эта прямая через точки $M_1(4;3)$ и $M_2(-2;2)$.

Решение. Подставим координаты точки M_1 в уравнение прямой:
 $2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$. При этом мы получили тождество, следовательно, точка $M_1(4;3)$ лежит на прямой.

Подставляем координаты точки M_2 : $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -9 \equiv 0$. Получаем неверное равенство, поэтому точка $M_2(-2;2)$ не лежит на прямой.

Ответ: прямая проходит через точку M_1 и не проходит через точку M_2 .

Пример 2. Составьте общее уравнение прямой, которая в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости проходит через две точки $M_1(1;1)$ и $M_2(4;2)$.

Решение. Сначала напишем каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Оно имеет вид

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1}$$

Теперь приведем полученное уравнение к требуемому виду:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow 1(x-1) = 3(y-1) \Leftrightarrow x-3y+2=0$$

Ответ: $x-3y+2=0$

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ (9), где A , B , C и D – некоторые действительные числа, причем A , B и C одновременно не равны нулю, определяет плоскость в заданной прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве, и всякая плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве определяется уравнением вида (9) при некотором наборе чисел A , B , C и D .

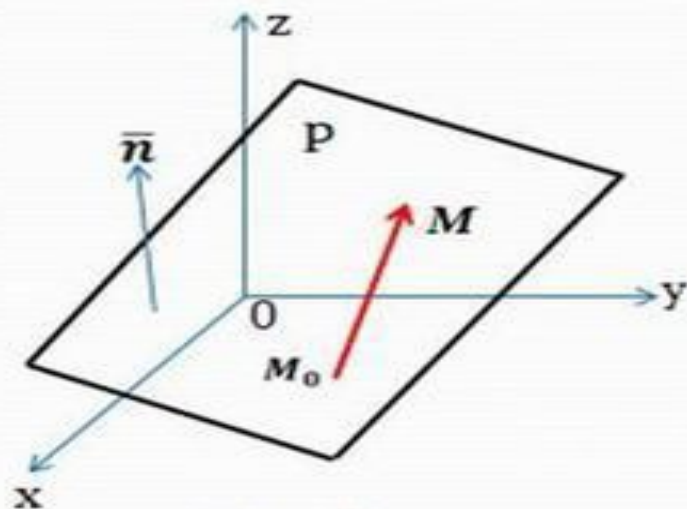


Рис.13

Чтобы получить общее уравнение плоскости, разберём плоскость, проходящую через заданную точку.

Пусть P произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется *вектором нормали* к этой плоскости.

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Если известна какая-нибудь точка $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ плоскости P и какой-нибудь вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение плоскости, заданной этими условиями, возьмём на плоскости P произвольную точку M с переменными координатами x, y, z . Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору \vec{n} (рис. 13), а для этого, согласно условию перпендикулярности векторов, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т.е. $\vec{n} * \overline{M_0M} = 0$

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ задан по условию. Координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Теперь, используя формулу скалярного произведения векторов $\vec{a} * \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, выразим скалярное произведение $\vec{n} * \overline{M_0M} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (10)$$

Так как точка $M(x; y; z)$ выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости P .

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (2; -3; 1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (5; 1; -4)$

Решение. Используя формулу (10), имеем:

$$5(x - 2) + 1(y + 3) - 4(z - 1) = 0 ; 5x + y - 4z - 3 = 0$$

Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z произвольной точки плоскости.

Итак, уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости*.

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Если две плоскости в пространстве имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой находятся все общие точки этих плоскостей. Таким образом, прямую линию в пространстве можно задать, указав две плоскости, пересекающиеся по этой прямой.

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная система координат $Oxyz$ и известно, что прямая a является линией пересечения двух плоскостей α и β , которым отвечают общие уравнения плоскости вида

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (11)$$

соответственно. Так как прямая a представляет собой множество всех общих точек плоскостей α и β , то координаты любой точки прямой a будут удовлетворять одновременно и уравнениям (11), координаты никаких других точек не будут удовлетворять одновременно обоим уравнениям плоскостей. Следовательно, прямая в пространстве в прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана системой из уравнений двух пересекающихся плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

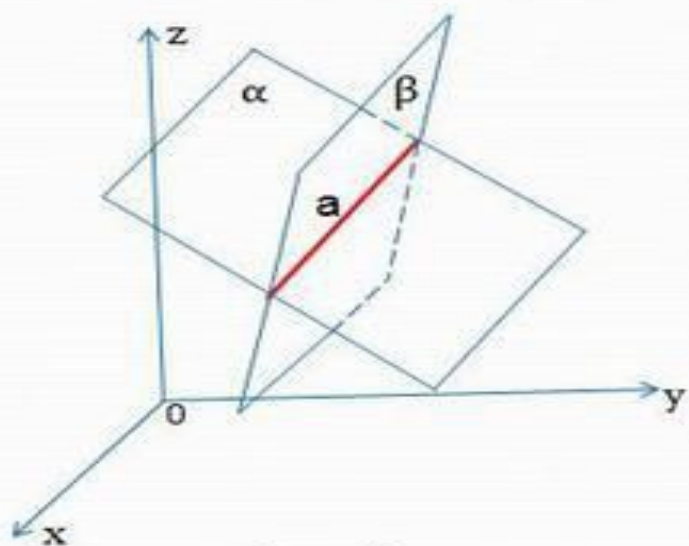


Рис. 14

Уравнения прямой в пространстве

Пусть дана точка $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ и направляющий вектор $\vec{n} = (m; n; p)$. Составить в векторном виде уравнение прямой, проходящей через точку M_0 в направлении вектора \vec{n} . Пусть $M(x; y; z)$ – текущая точка. Обозначим через $\vec{r}(x; y; z)$ радиус вектор точки M , а через $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ радиус вектор M_0 . Разность этих двух векторов $\vec{r} - \vec{r}_0 = t * \vec{n}$ будет компланарна вектору \vec{n} , а t – некоторое число.

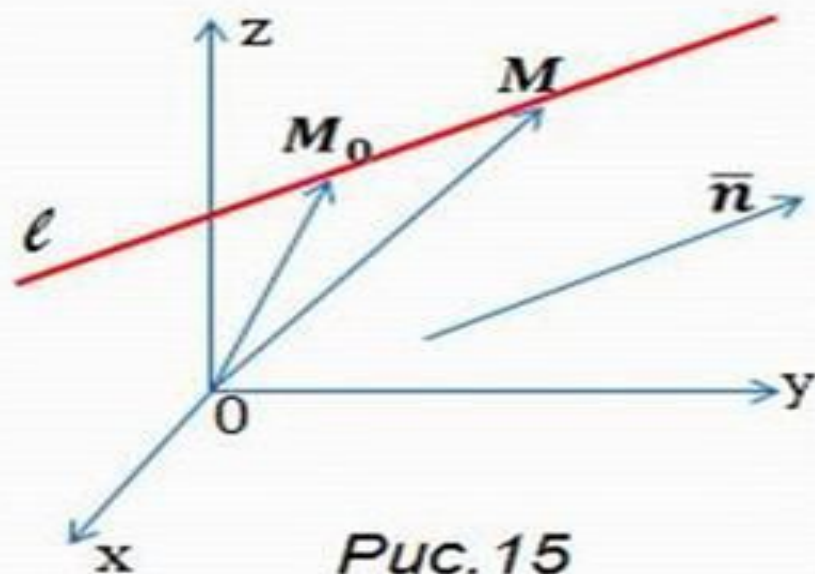


Рис. 15

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{n} \text{ или } \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{n} \quad (13)$$

Векторно – параметрическое уравнение прямой в пространстве.

Уравнения прямой в пространстве

Координатная форма записи уравнения (13) называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (14)$$

где x, y, z – это координаты радиус вектора \vec{r} , $x_0; y_0; z_0$ координаты \vec{r}_0 , m, n, t – координаты направляющего вектора \vec{n} .

Уравнения прямой в пространстве

Если известны координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $\vec{n} = (m; n; p)$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (15)$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве.

Если прямая проходит через две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, такие что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ и $z_1 \neq z_2$ то уравнение прямой можно найти используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (16)$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки в пространстве.

Уравнения прямой в пространстве

Пример 1. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 0; -3)$ параллельно:

- а) вектору $\vec{n}(2, -3, 5)$;
- б) оси OX ;

Решение.

а) Воспользуемся формулой уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \text{ каноническое уравнение прямой } L, \text{ которая}$$

проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{n} = (m; n; p)$.

Таким образом

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 0}{-3} = \frac{z - (-3)}{5} \Rightarrow \frac{x - 2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z + 3}{-1}$$

Ответ: $\frac{x - 2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z + 3}{-1}$

Уравнения прямой в пространстве

б) Ось Ox имеет направляющий вектор $i=(1,0,0)$. Таким образом, ищем уравнение прямой проходящей точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно вектору $i(1,0,0)$: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-(-3)}{0} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$

Ответ: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$

Пример 2. Напишите параметрические уравнения прямой в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве, если прямая проходит через точку $M_0(2;5;-6)$ параллельно координатной оси Oy

Решение. Так как прямая, уравнения которой нам требуется написать, параллельна оси ординат, то ее направляющим вектором можно взять координатный вектор. Теперь записываем искомые параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 2 + 0 * t \\ y = 5 + 1 * t \\ z = -6 + 0 * t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + t \\ z = -6 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + t \\ z = -6 \end{cases}$

Уравнения плоскости в пространстве

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ должны быть компланарны.

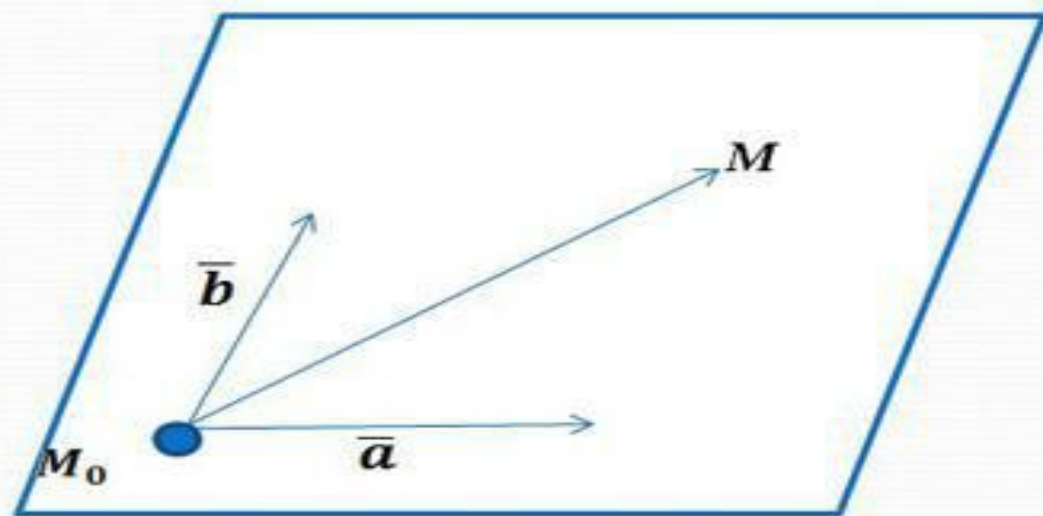


Рис.16

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

Уравнения плоскости в пространстве

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на $(-D)$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

заменив $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (18)$$

Числа a , b , c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x , y , z .

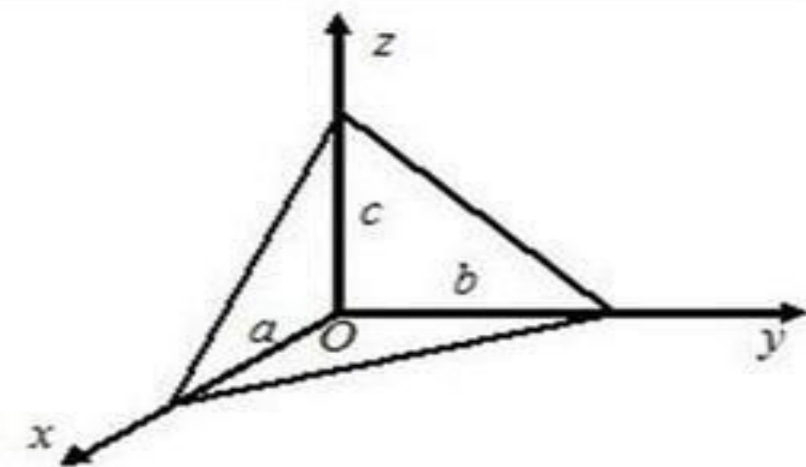


Рис.17

Уравнения плоскости в пространстве

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q , проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы:

$$\begin{aligned} \overline{M_0M} &= (x - x_0; y - y_0; z - z_0) & \overline{M_1M} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1) \\ \overline{M_2M} &= (x - x_2; y - y_2; z - z_2) \end{aligned}$$

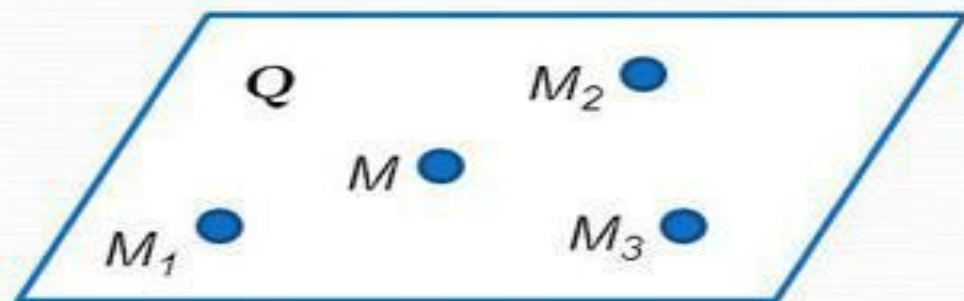


Рис. 18

Эти векторы лежат на плоскости Q , следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем $\overline{M_1M} * \overline{M_1M_2} * \overline{M_1M_3} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Уравнение (19) есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Уравнения плоскости в пространстве

Пример 1. Заданы плоскость $P: -2x + y - z + 1 = 0$ и точка $M(1, 1, 1)$.
Написать уравнение плоскости P' , проходящей через точку M параллельно плоскости P .

Решение. Так как плоскости P и P' параллельны, то нормальный вектор для плоскости P будет также нормальным вектором для плоскости P' . Из уравнения плоскости получаем $\vec{n} = (-2, 1, -1)$.

Далее запишем уравнение плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

$$-2(x - 1) + (y - 1) - (z - 1) = 0 \Rightarrow -2x + y - z + 2 = 0$$

Ответ: $-2x + y - z + 2 = 0$

Уравнения плоскости в пространстве

Пример 2. В координатном пространстве (в прямоугольной системе координат) заданы точки $K(2;3;4)$, $L(6;-3;4)$, $M(-4;6;-4)$. Требуется:

- составить общее уравнение плоскости треугольника ;
- составить уравнение в "отрезках" для плоскости треугольника ;

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 6-2 & -3-3 & 4-4 \\ -4-2 & 6-3 & -4-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 4 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получаем $48(x-2) + 32(y-3) - 24(z-4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 3z - 12 = 0$

Ответ: $6x + 4y - 3z - 12 = 0$

б) Переносим свободный член общего уравнения плоскости (см. пункт "а") в правую часть и делим уравнение на 12.

Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1$