АКС приКАУ
Основы высшей и дискретной математики

Тема урока: Общее уравнение прямой и плоскости

Преподаватель Аширбекова Р.Н.

Общее уравнение прямой

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и, обратно, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ *(1)* называется общим уравнением прямой, где А и В не могут быть одновременно равны нулю.

Частные случаи общего уравнения прямой

- Если $C = 0$, уравнение (1) будет иметь вид $Ax + By = 0$ (рис.1), и прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты начала координат $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют этому уравнению.
- Если в общем уравнении прямой (1) $B = 0$, то уравнение примет вид $Ax + C = 0$ (рис.2), или $x = -\frac{C}{A}$.Уравнение не содержит переменной y, а определяемая этим уравнением прямая параллельна оси Oy.
- Если в общем уравнении прямой (1) $A = 0$, то это уравнение примет вид $By + C = 0$ (рис.3), или $x = -\frac{C}{B}$.Уравнение не содержит переменной x, а определяемая им прямая параллельна оси Ox.

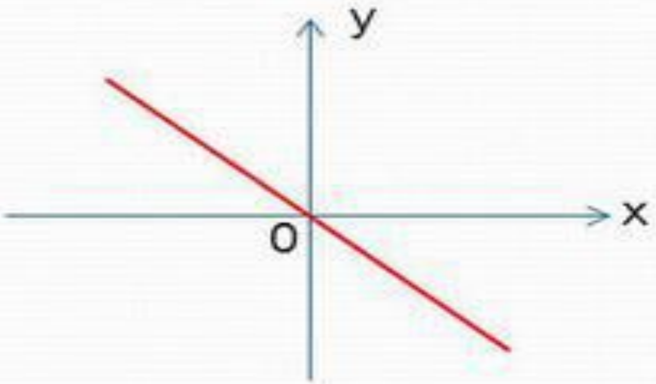

Рис. 1

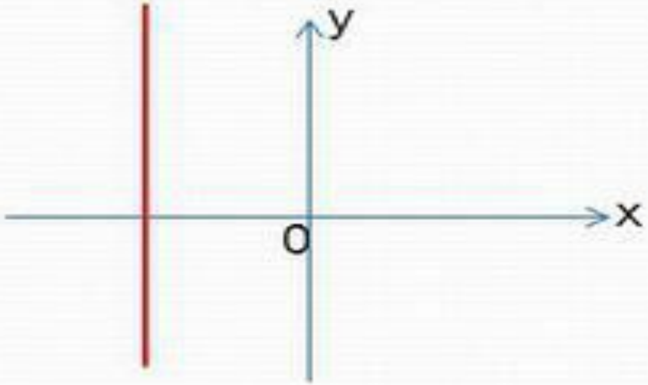

Рис. 2

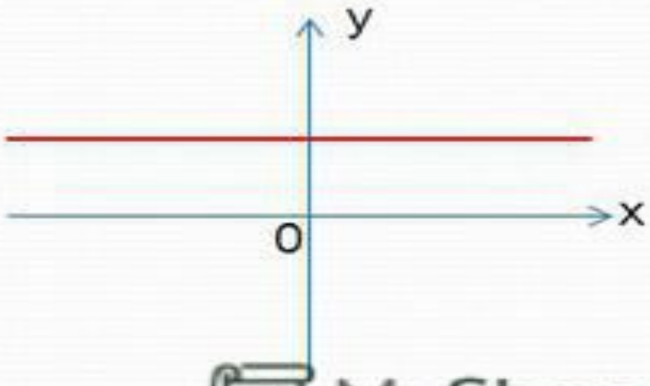

Рис. 3

Частные случаи общего уравнения прямой

- При $C = 0$ и $A = 0$ уравнение (1) принимает вид $By = 0$, или $y = 0$. Это уравнение оси Ox (рис. 4).
- При $C = 0$ и $B = 0$ уравнение(1) запишется в виде $Ax = 0$ или $x = 0$. Это уравнение оси Oy (рис. 5).

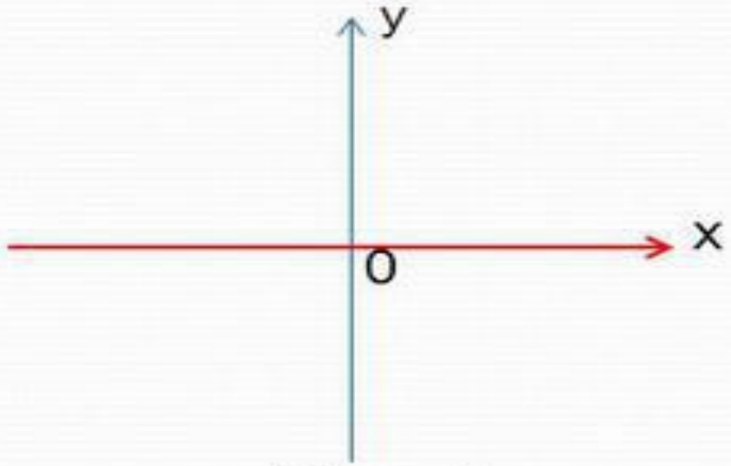

Рис. 4

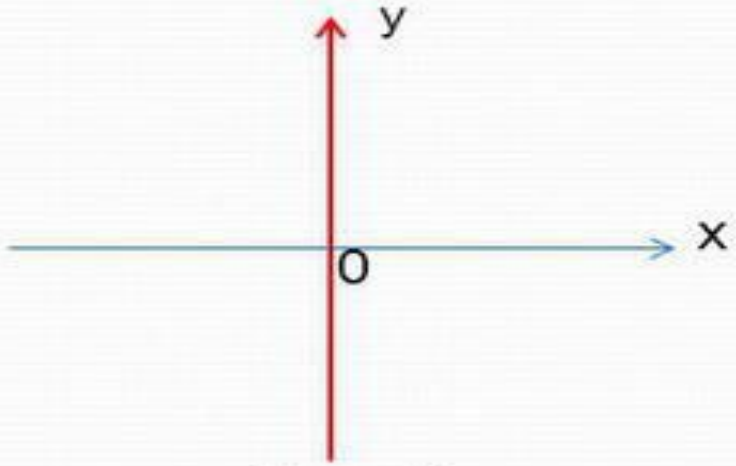

Рис. 5

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угол α, определяемый, как показано на рис.6, называется углом наклона прямой к оси Ох. Тангенс угла наклона прямой к оси Ох называется угловым коэффициентом прямой; его обычно обозначают буквой k: $k = tg\alpha$

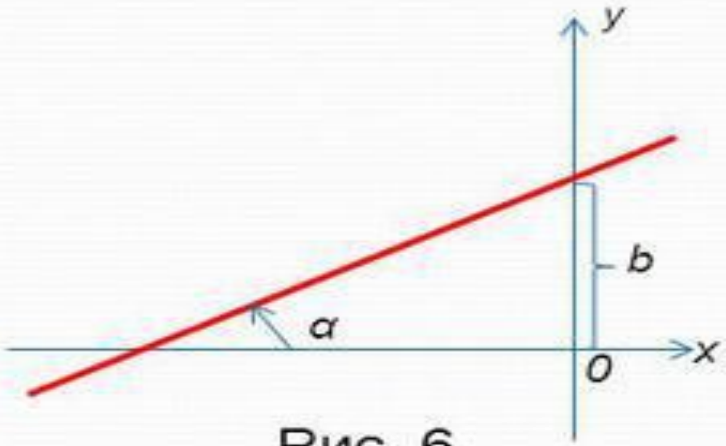

Рис. 6

Уравнение $y=kx+b$ (2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом; k - угловой коэффициент, b - величина отрезка, который отсекает прямая на оси Оу, считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением, то ее угловой коэффициент определяется по формуле $k = -\frac{A}{B}$

Угол между двумя прямыми

Пусть две пересекающиеся в точке *M* прямые L_1 и L_2 определяются соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.Найдем тангенс угла φ между этими прямыми (рис. 7).

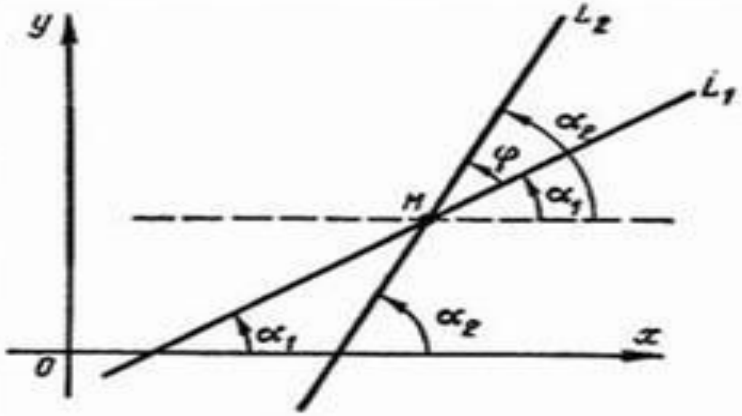

Рис. 7

Данные прямые не перпендикулярны друг другу, так как иначе tgφ не существовал бы.

Пусть прямая L_1 образует с осью абсцисс угол α_1 , а прямая L_2 — угол α_2 .Проведя через точку M, в которой пересекаются прямые L_1 и L_2 , прямую, параллельную оси 0x, увидим, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.Следовательно,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 * tg\alpha_2}$$

Но $tg\alpha_1 = k_1$ а $tg\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Условия параллельности двух прямых

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2$$

Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условия перпендикулярности двух прямых

В случае, когда прямые заданы уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k = -\frac{1}{k_1}$$

Это условие может быть записано также в виде

$$k_1 k_2 = -1$$

Если уравнения прямых заданы в общем виде $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ (3), то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Координаты точки пересечения двух прямых находят, решая систему уравнений (3). Прямые (3) пересекаются в том и только в том случае, когда

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k,

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, которая называется центром пучка.

Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется пучком прямых, а общая их точка — центром пучка.

Если в уравнении (4) под k будем понимать величину, принимающую всевозможные числовые значения, то это уравнение будет определять совокупность прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, т. е. пучок прямых с центром в точке $A(x_1, y_1)$ (в формуле (4) можно записать уравнение любой из прямых пучка, кроме одной — параллельной оси Oy).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Напишем уравнение (4) пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Из этого пучка нам следует выбрать прямую, проходящую через точку $M_2(x_2; y_2)$. Угловой коэффициент k этой прямой должен быть таким, чтобы координаты точки $M_2(x_2; y_2)$ удовлетворяли уравнению (4), т. е. чтобы имело место равенство $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Из этого условия мы находим угловой коэффициент искомой прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

и подставляем его в уравнение (4) $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Это уравнение обычно записывают в следующей симметричной форме:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Мы получили уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая ,отсекающая на оси абсцисс отрезок, равный ,а на оси ординат – от резок, равный .Точки пересечения прямой с осями координат: *A(a;0)* и *B(0;b)* .Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

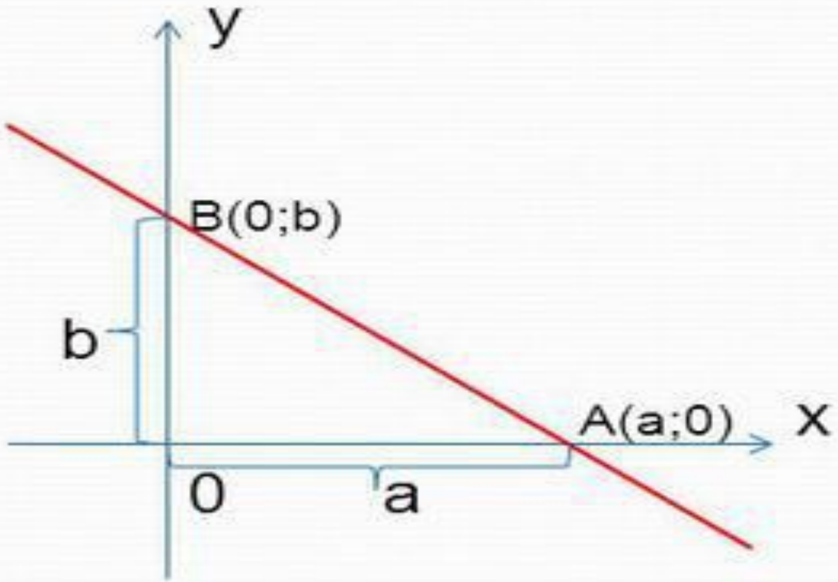

Рис. 9

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0};\ \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b};\ \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b};$$

Итак, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Уравнения прямой на плоскости

Пусть на плоскости заданы точка $\boldsymbol{M_0(x_0; y_o)}$ и вектор $\overline{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B})$. Необходимо построить уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0}$, перпендикулярно вектору $\overline{\boldsymbol{n}}$. Вектор $\overline{\boldsymbol{n}}$ называют вектором *нормали* прямой.

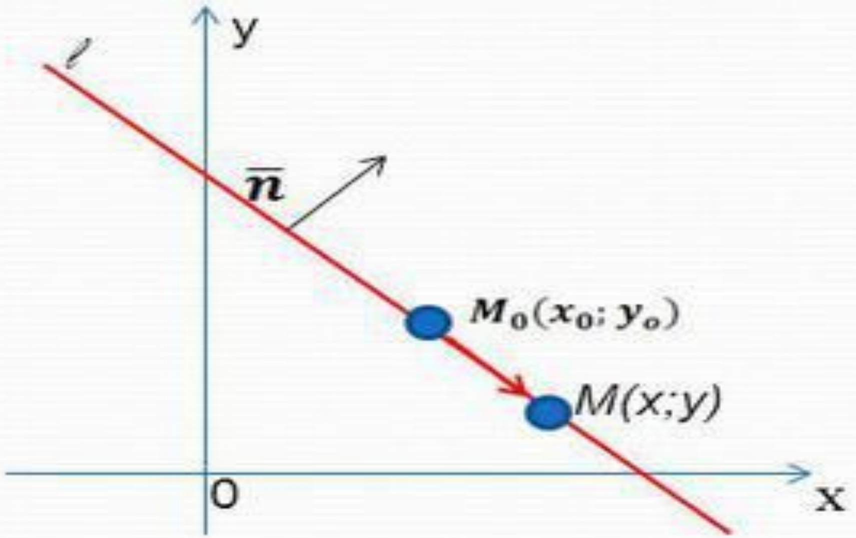

Рис. 10

Выберем на прямой произвольную точку M=(x;y) и построим вектор $\overline{\boldsymbol{M_0M}}$. Так как $\overline{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) \perp \ell$, то, используя свойство скалярного произведения, можем записать:

$$\overline{\boldsymbol{M_0M}} * \overline{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) * (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) =$$
$$= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) = \boldsymbol{0} \quad (5)$$

Из (5) получаем уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0} \perp$ вектору $\overline{\boldsymbol{n}}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) = \boldsymbol{0}$$

Уравнения прямой на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой. Найдем уравнение прямой с направляющим вектором $\overline{s}(m;n)$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_o)$. Пусть M=(x;y) – произвольная точка на искомой прямой ℓ.

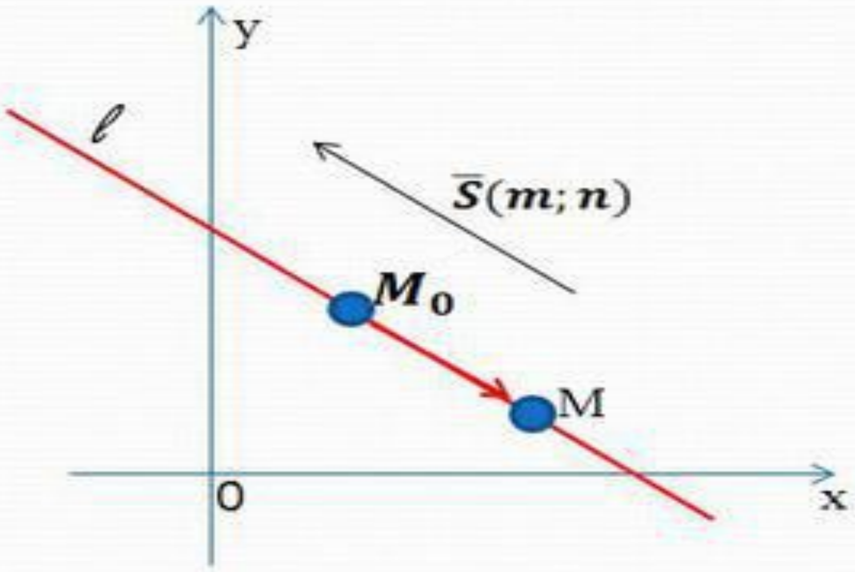

Рис. 11

Введем в рассмотрение вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$.

Условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{s}$ записывается как пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \quad (6)$$

Уравнение прямой, записанное в виде (6), называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости

Уравнения прямой на плоскости

Параметрическое уравнение очень легко получается из канонического уравнения (6). Если мы равенство двух отношений приравняем к некоторому значению *t*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t$$

Легко увидеть, что из двойного равенства получаем:

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \qquad x - x_0 = mt; \qquad \frac{y - y_0}{n} = t, \qquad y - y_0 = nt;$$

Перенесем x_0 и y_0 в правые части уравнений, где *x* и *y* будут находиться как:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \qquad (7)$$

Система уравнений (7) называется параметрическим уравнением прямой, где *t* – параметр. Особенность этого типа уравнения в том, что прямая задается двумя уравнениями.

Уравнения прямой на плоскости

Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0;y_o)$ и $M_1(x_1;y_1)$. Для этого достаточно взять в качестве направляющего вектора вектор $\overline{M_0M_1} = (\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}; \mathbf{y_1} - \mathbf{y_0})$.

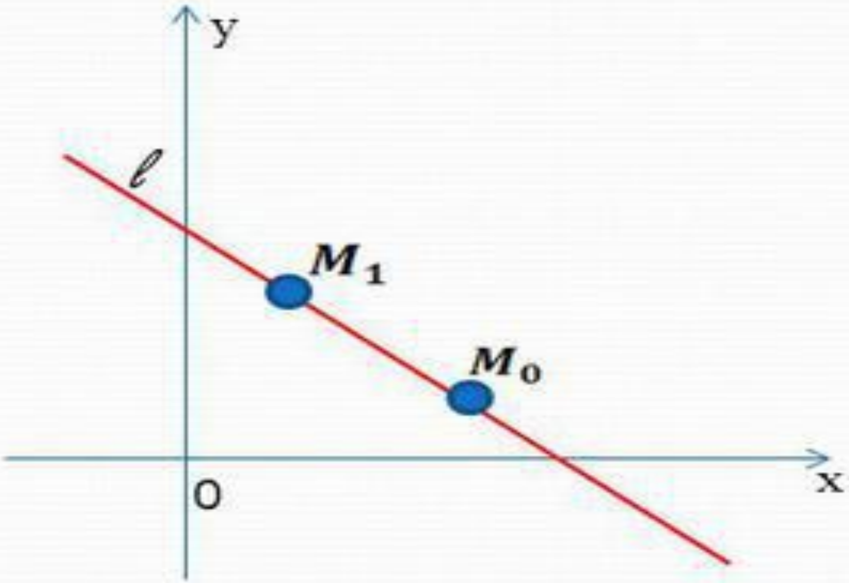

Рис.12

Тогда искомое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (8)$$

Уравнения прямой на плоскости

Пример 1. Дано общее уравнение прямой $2x\text{-}3y\text{+}1\text{=}0$. Проходит ли эта прямая через точки $M_1(4;3)$ и $M_2(-2;2)$.

Решение. Подставим координаты точки M_1 в уравнение прямой:
$2*4-3*3+1=0 \Leftrightarrow \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$. При этом мы получили тождество, следовательно, точка $M_1(4;3)$ лежит на прямой.

Подставляем координаты точки M_2: $2*(-2)-3*2+1=0 \Leftrightarrow \mathbf{-9} \equiv \mathbf{0}$. Получаем неверное равенство, поэтому точка $M_2(-2;2)$ не лежит на прямой.

Ответ: прямая проходит через точку M_1 и не походит через точку M_2.

Пример 2. Составьте общее уравнение прямой, которая в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости проходит через две точки $M_1(1;1)$ и $M_2(4;2)$.

Решение. Сначала напишем каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Оно имеет вид

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1}$$

Теперь приведем полученное уравнение к требуемому виду:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow 1(x-1) = 3(y-1) \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$$

Ответ: $x\text{-}3y\text{+}2\text{=}0$

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ *(9)*, где *A*, *B*, *C* и *D* – некоторые действительные числа, причем *A*, *B* и *C* одновременно не равны нулю, определяет плоскость в заданной прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве, и всякая плоскость в прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве определяется уравнением вида *(9)* при некотором наборе чисел *A*, *B*, *C* и *D*.

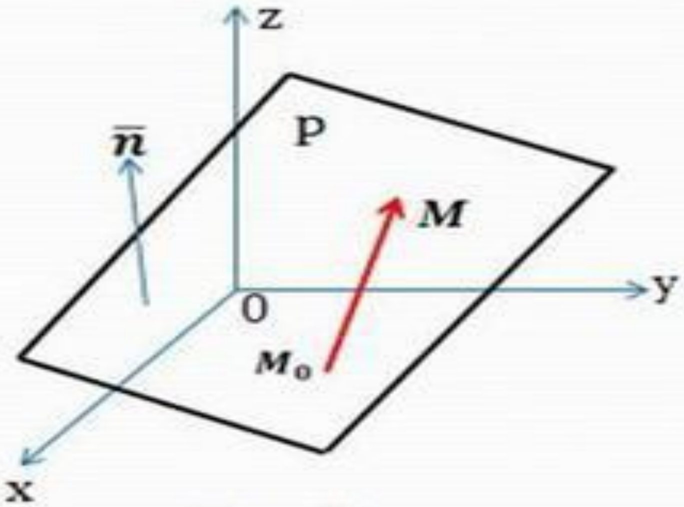

Рис.13

Чтобы получить общее уравнение плоскости, разберём плоскость, проходящую через заданную точку.

Пусть *P* произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется *вектором нормали* к этой плоскости.

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Если известна какая-нибудь точка $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ плоскости *P* и какой-нибудь вектор $\overline{n} = (A; B; C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение плоскости, заданной этими условиями, возьмём на плоскости *P* произвольную точку *M* с переменными координатами *x*, *y*, *z*. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\overline{n}$ (рис. 13), а для этого, согласно условию перпендикулярности векторов, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т.е. $\overline{n} * \overline{M_0M} = 0$

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Вектор $\overline{n} = (A; B; C)$ задан по условию. Координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.Теперь, используя формулу скалярного произведения векторов $\overline{a} * \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, выразим скалярное произведение $\overline{n} * \overline{M_0M} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (10)$$

Так как точка *M(x; y; z)* выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости *P*.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (2; -3; 1)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n} = (5; 1; -4)$

Решение. Используя формулу (10), имеем:

$$5(x - 2) + 1(y + 3) - 4(z - 1) = 0\ ;\ 5x + y - 4z - 3 = 0$$

Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат *x, y, z* произвольной точки плоскости.

Итак, уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости.*

Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве

Если две плоскости в пространстве имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой находятся все общие точки этих плоскостей. Таким образом, прямую линию в пространстве можно задать, указав две плоскости, пересекающиеся по этой прямой.

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная система координат *Oxyz* и известно, что прямая ***a*** является линией пересечения двух плоскостей α и β, которым отвечают общие уравнения плоскости вида

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (11)$$

соответственно. Так как прямая ***a*** представляет собой множество всех общих точек плоскостей α и β, то координаты любой точки прямой **a** будут удовлетворять одновременно и уравнениям (11), координаты никаких других точек не будут удовлетворять одновременно обоим уравнениям плоскостей. Следовательно, прямая в пространстве в прямоугольной системе координат *Oxyz* может быть задана системой из уравнений двух пересекающихся плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

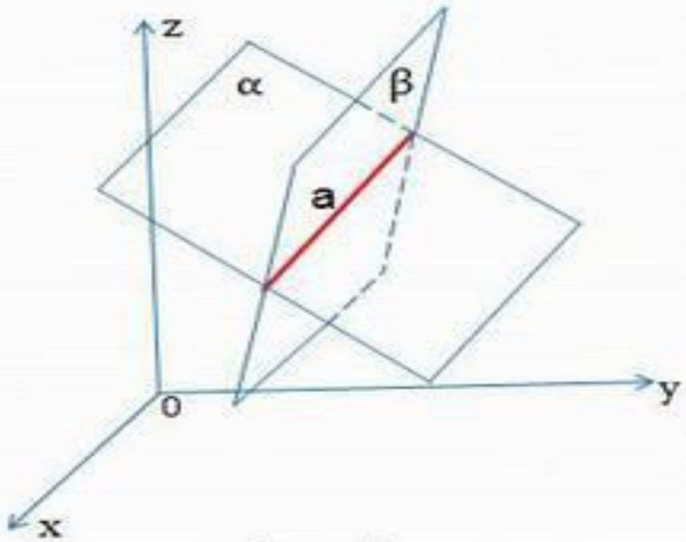

Рис.14

Уравнения прямой в пространстве

Пусть дана точка $\boldsymbol{M_0} = (\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0}; \boldsymbol{z_0})$ и направляющий вектор $\overline{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{m}; \boldsymbol{n}; \boldsymbol{p})$. Составить в векторном виде уравнение прямой линии, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0}$ в направлении вектора $\overline{\boldsymbol{n}}$. Пусть *M(x;y;z)* – текущая точка Обозначим через $\overline{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ радиус вектор точки *M, а через* $\overline{\boldsymbol{r_0}}(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0}; \boldsymbol{z_0})$ радиус вектор $\boldsymbol{M_0}$. Разность этих двух векторов $\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r_0}} = \boldsymbol{t} * \overline{\boldsymbol{n}}$ будет комплонарна вектору $\overline{\boldsymbol{n}}$, а t – некоторое число.

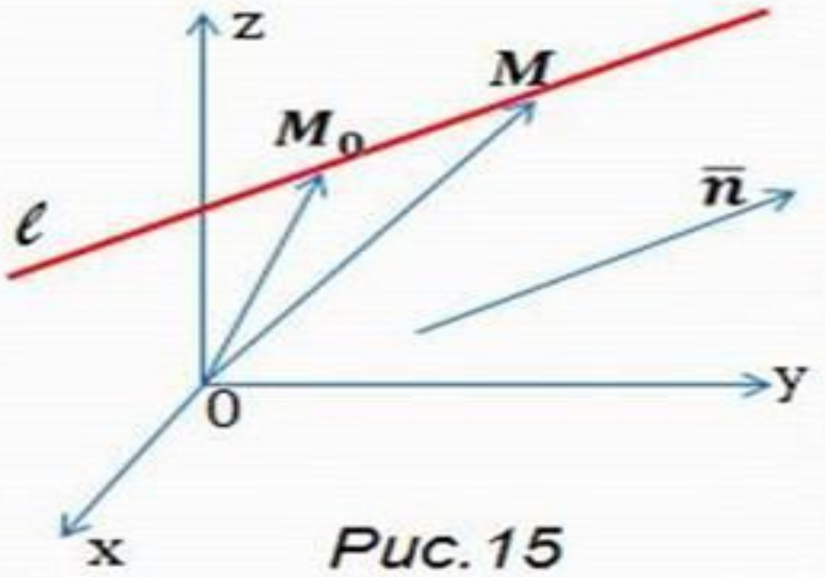

Рис.15

$$\overline{\boldsymbol{r}} - \overline{\boldsymbol{r_0}} = \boldsymbol{t}\overline{\boldsymbol{n}} \text{ или } \overline{\boldsymbol{r}} = \overline{\boldsymbol{r_0}} + \boldsymbol{t}\overline{\boldsymbol{n}} \quad (13)$$

Векторно – параметрическое уравнение прямой в пространстве.

Уравнения прямой в пространстве

Координатная форма записи уравнения (13) называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (14)$$

где x, y, z – это координаты радиус вектора $\overline{r}, x_0; y_0; z_0$ координаты $\overline{r_0}$, m, n, t – координаты направляющего вектора $\overline{n}$.

Уравнения прямой в пространстве

Если известны координаты точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $\overline{n} = (m; n; p)$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (15)$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве.

Если прямая проходит через две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, такие что $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ и $z_1 \neq z_2$ то уравнение прямой можно найти используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (16)$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки в пространстве.

Уравнения прямой в пространстве

Пример 1.Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно:

а) вектору $\overline{n}(2,-3,5)$;

б) оси OX;

Решение.

а) Воспользуемся формулой уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ - каноническое уравнение прямой L, которая

проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\overline{n}=(m;n;p)$.

Таким образом

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-(-3)}{5}\Rightarrow\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

Ответ: $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$

Уравнения прямой в пространстве

б) Ось OX имеет направляющий вектор *i=(1,0,0)*. Таким образом, ищем уравнение прямой проходящей точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно вектору *i(1,0,0)*: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-(-3)}{0} \Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$

Ответ: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$

Пример 2. Напишите параметрические уравнения прямой в прямоугольной системе координат *Oxyz* в трехмерном пространстве, если прямая проходит через точку $M_0(2;5;-6)$ параллельно координатной оси *Oy*

Решение. Так как прямая, уравнения которой нам требуется написать, параллельна оси ординат, то ее направляющим вектором можно взять координатный вектор . Теперь записываем искомые параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 2 + 0 * t \\ y = 5 + 1 * t \\ z = -6 + 0 * t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + t \\ z = -6 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + t \\ z = -6 \end{cases}$

Уравнения плоскости в пространстве

Пусть заданы два вектора $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\overline{b} = (b_1; b_2; b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки *M(x, y, z)*, принадлежащей плоскости, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ должны быть компланарны.

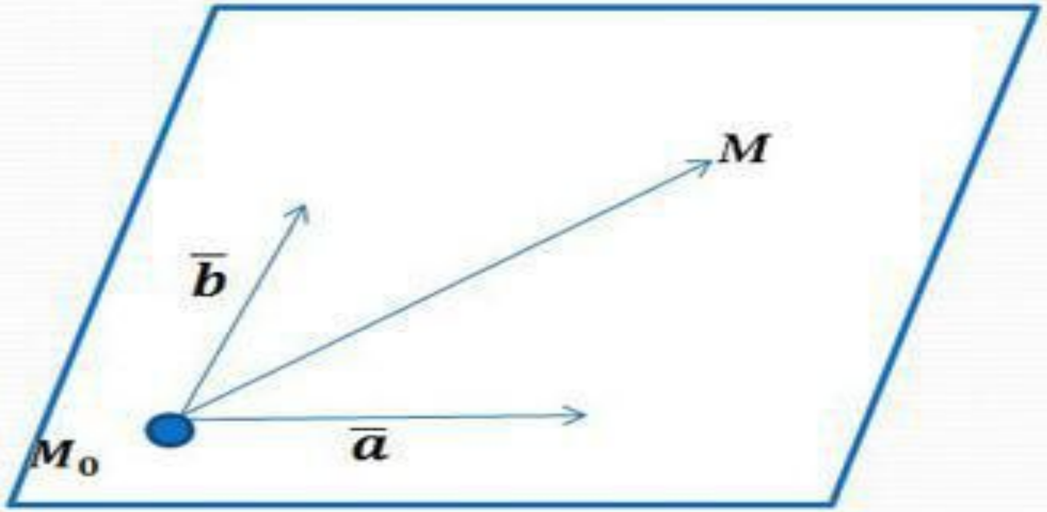

Рис.16

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

Уравнения плоскости в пространстве

Если в общем уравнении Ax + By + Cz + D = 0 поделить обе части на (-D)

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z-1=0$$

заменив $-\frac{D}{A}=a$, $-\frac{D}{B}=b$, $-\frac{D}{C}=c$, получим *уравнение плоскости в отрезках:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (18)$$

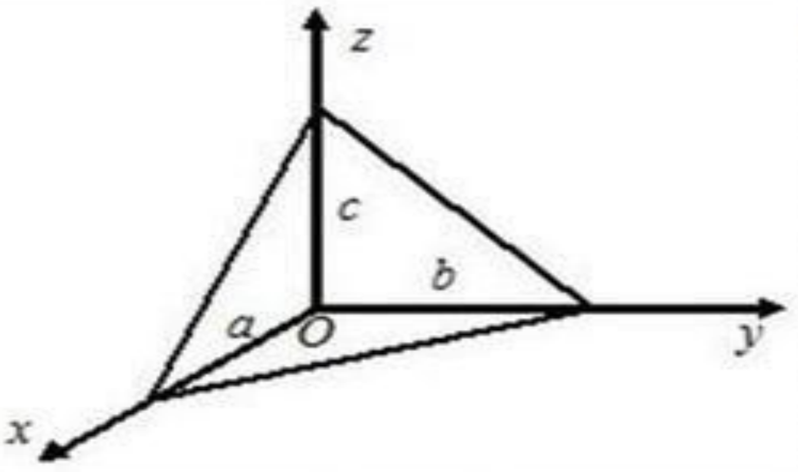

Рис.17

Числа *a*, *b*, *c* являются точками пересечения плоскости соответственно с осями *x*, *y*, *z*.

Уравнения плоскости в пространстве

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы:

, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$

$\overline{M_2M} = (x - x_2; y - y_2; z - z_2)$

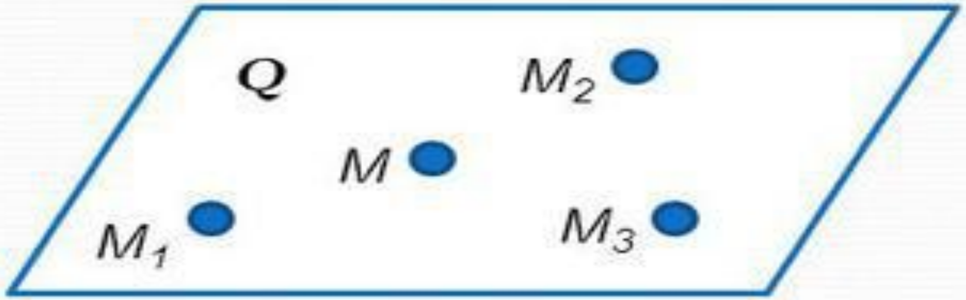

Рис.18

Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем $\overline{M_1M} * \overline{M_1M_2} * \overline{M_1M_3} = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

Уравнение (19) есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Уравнения плоскости в пространстве

Пример 1. Заданы плоскость P: $-2x+y-z+1=0$ и точка $M(1,1,1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M параллельно плоскости P.

Решение. Так как плоскости P и P' параллельны, то нормальный вектор для плоскости P будет также нормальным вектором для плоскости P'. Из уравнения плоскости получаем $\overline{n}=(-2,1,-1)$.

Далее запишем уравнение плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A;B;C)$.

$$-2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow -2x+y-z+2=0$$

Ответ: $-2x+y-z+2=0$

Уравнения плоскости в пространстве

Пример 2. В координатном пространстве (в прямоугольной системе координат) заданы точки *K(2;3;4)*, *L(6;-3;4)*, *M(-4;6;-4)*. Требуется:
а) составить общее уравнение плоскости треугольника ;
б) составить уравнение в "отрезках" для плоскости треугольника ;

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 6-2 & -3-3 & 4-4 \\ -4-2 & 6-3 & -4-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 4 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель и приводя подобные члены, получаем

$$48(x-2) + 32(y-3) - 24(z-4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 3z - 12 = 0$$

Ответ: $6x + 4y - 3z - 12 = 0$

б) Переносим свободный член общего уравнения плоскости (см. пункт "а") в правую часть и делим уравнение на 12.

Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1$