

# Вписанная и описанная окружности

8 класс

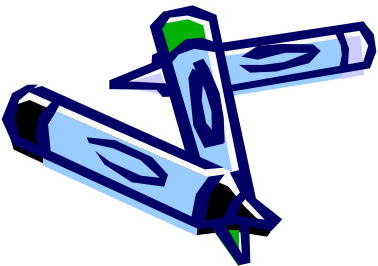
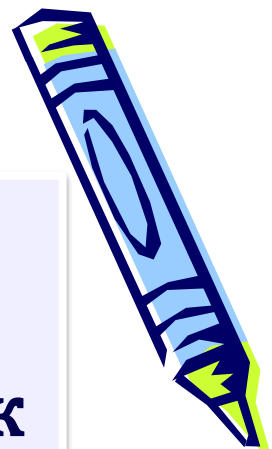
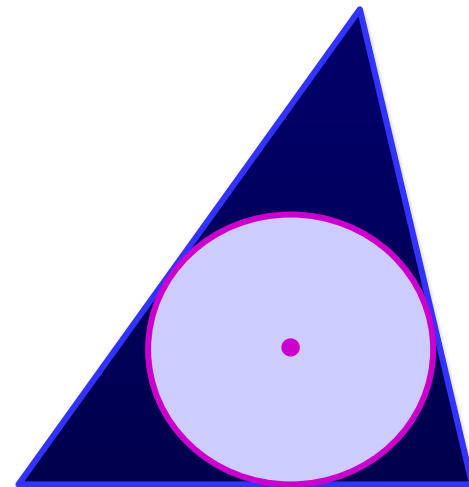
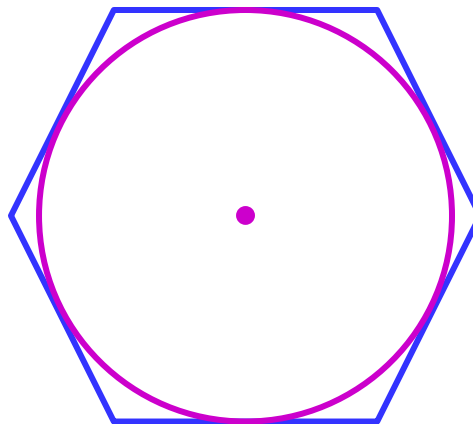
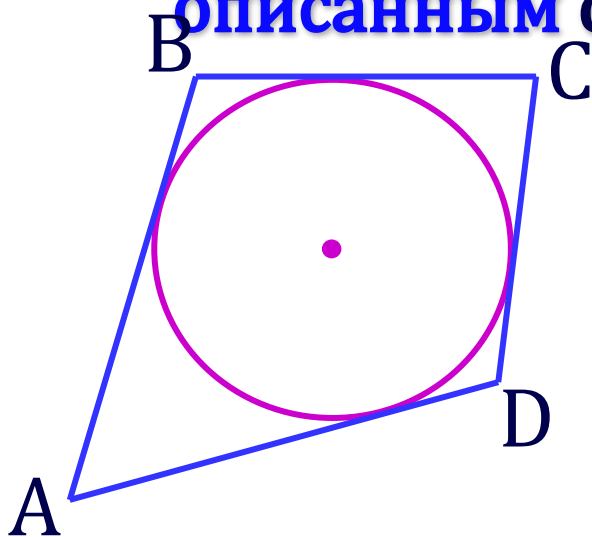


# Вписанная окружность

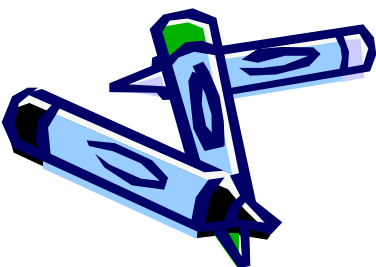
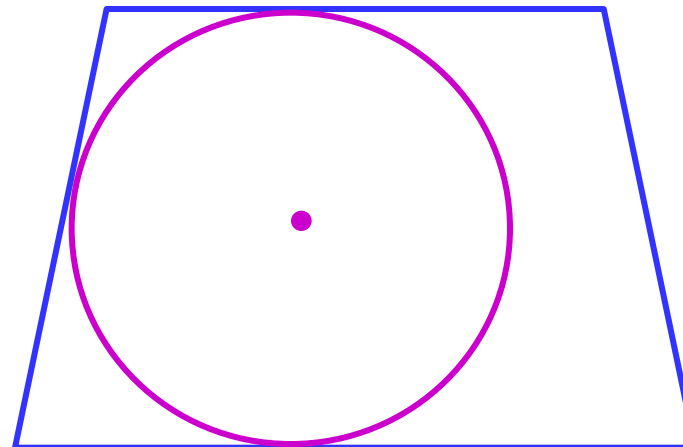
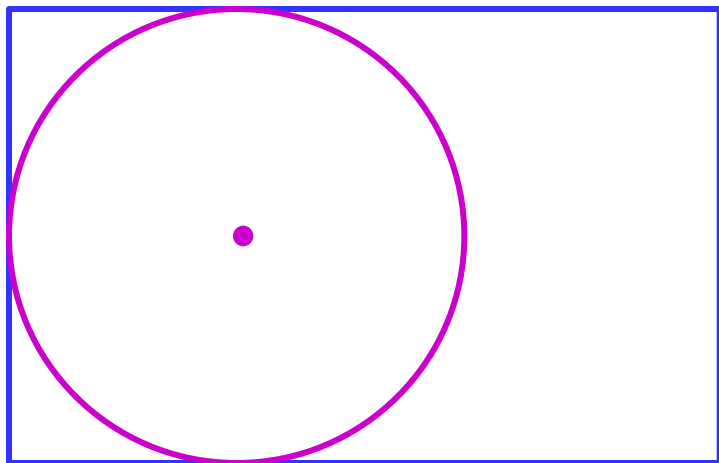
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник

– **описанным** около этой окружности.

окр. $(O;r)$  вписана в ABCD

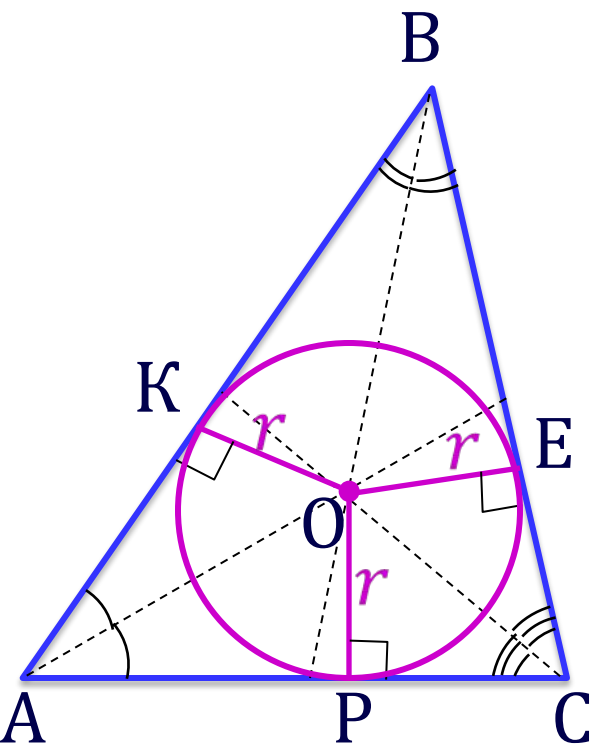


Не во всякий многоугольник можно  
вписать окружность.



# ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно **вписать** окружность и притом только одну.



Дано:  $\triangle ABC$

Доказать: существует окр.  $(O;r)$ ,  
вписанная в треугольник

Доказательство:

Проведём биссектрисы, которые пересекаются в одной точке –  $O$ .

$OK = OE = OP$ , где  $OK \perp AB$ ,  $OE \perp BC$ ,  $OP \perp AC$ ,  
по свойству биссектрис.

$O$  равноудалена от сторон  $\triangle ABC$ .

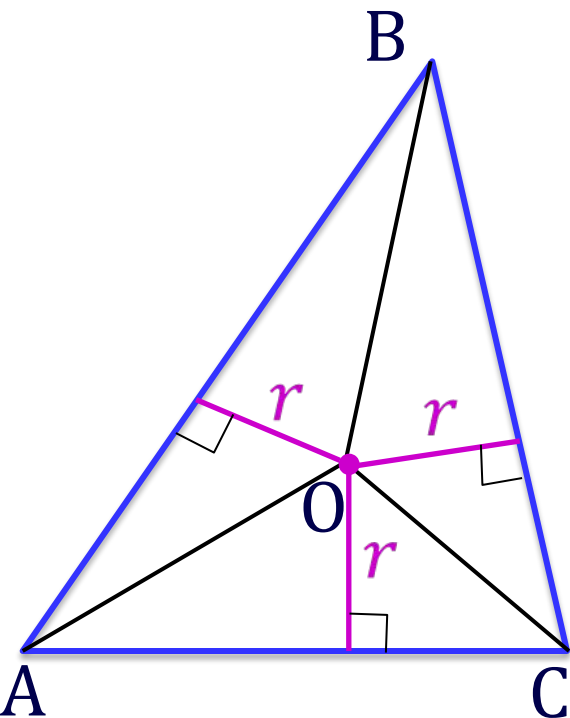
$O$  – центр окружности,  $OK$ ,  $OE$ ,  $OP$  радиусы.

Значит, окружность вписана в  $\triangle ABC$ .

**Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис.**

# Площадь треугольника

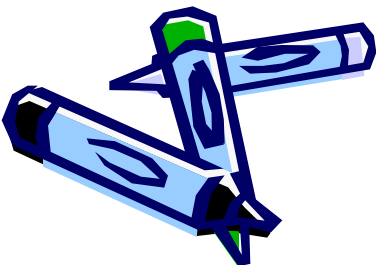
Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.



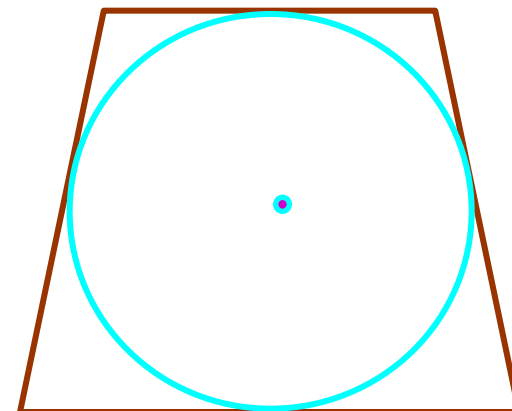
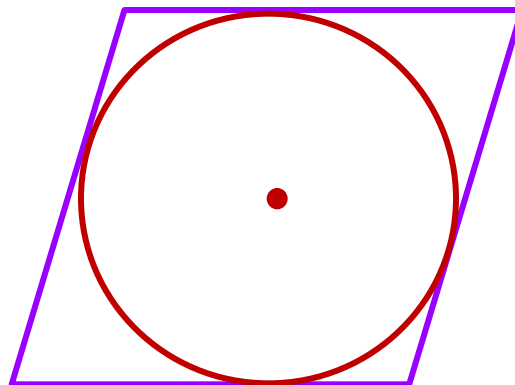
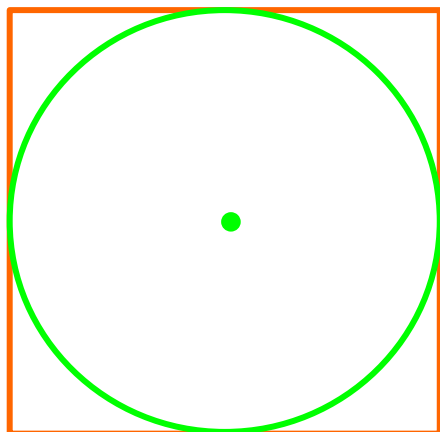
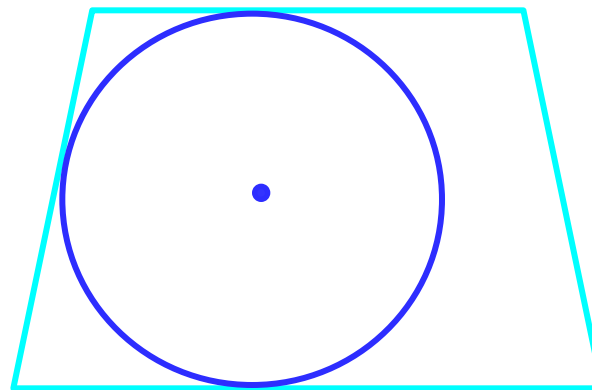
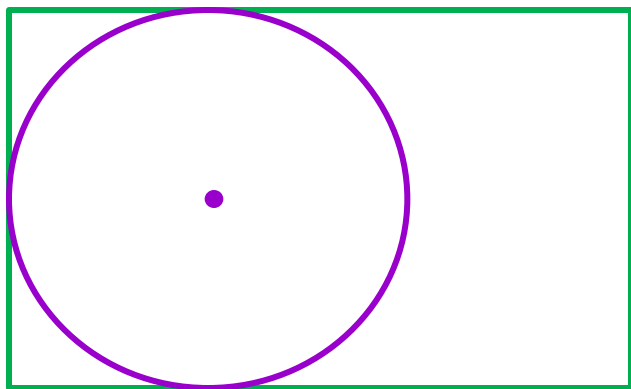
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r = p \cdot r \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = p \cdot r$$

$$r = \frac{S}{p}$$

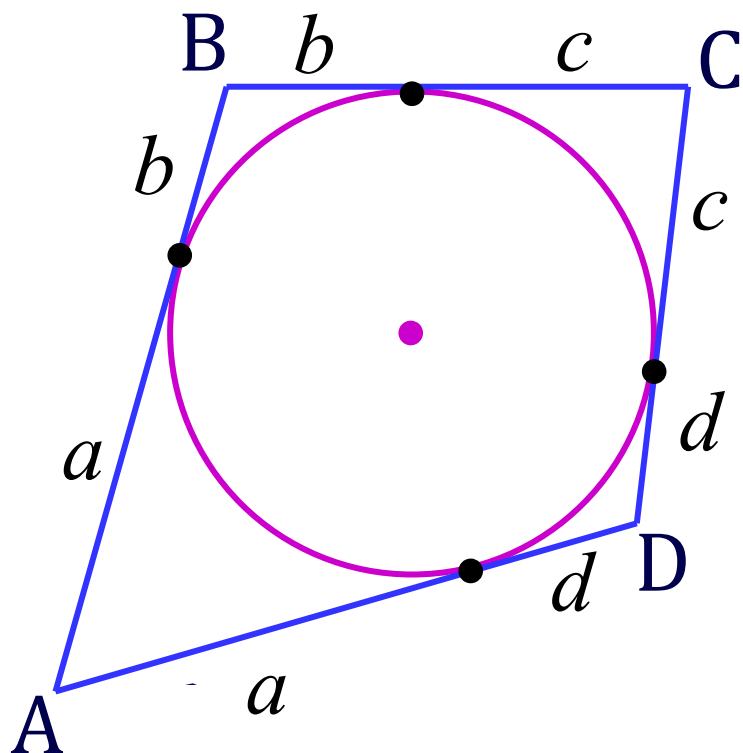


Не во всякий четырёхугольник можно  
вписать окружность.



# ТЕОРЕМА

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.



Дано: окр.( $O;r$ ) вписана в  $ABCD$

Доказать:  $AB + CD = BC + AD$

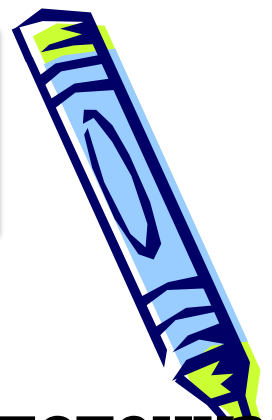
Доказательство: обозначим равные отрезки касательных буквами:  
 $a, b, c, d$

$$\left. \begin{array}{l} AB + CD = a + b + c + d \\ BC + AD = a + b + c + d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$AB + CD = BC + AD$$

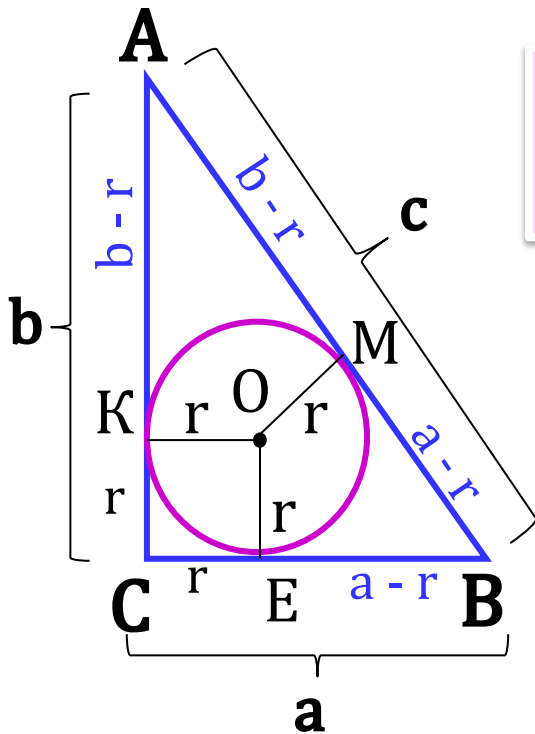
Доказательство обратной теоремы см. № 724 в учебнике.

# Формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

а, b- катеты, с - гипотенуза



Доказательство:

АС, ВС, АВ – касательные и

СКОЕ – квадрат, значит, СК = СЕ = r

По свойству касательных:

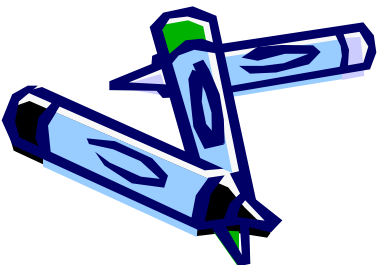
$$BE = BM = a - r$$

$$AK = AM = b - r$$

$$AB = AM + BM$$

$$c = b - r + a - r$$

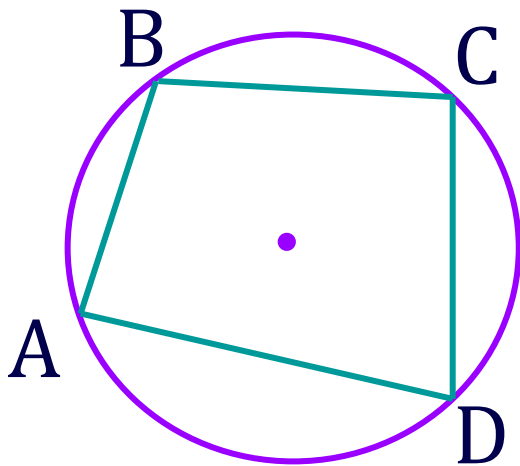
$$2r = a + b - c \Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2}$$



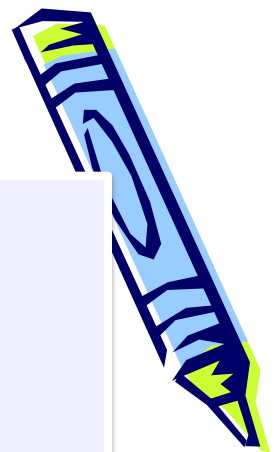
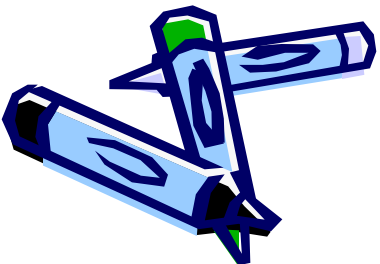
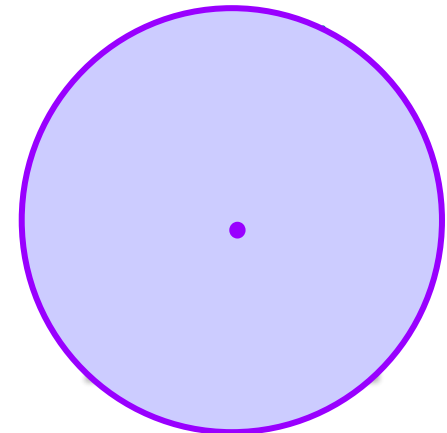
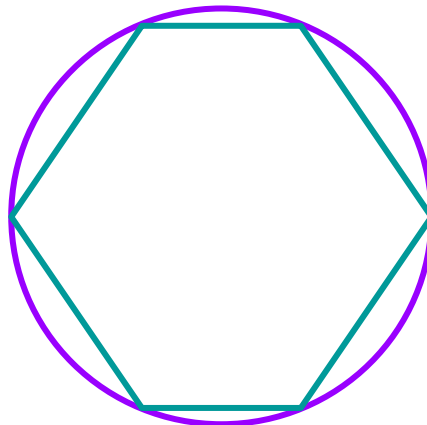


# Описанная окружность

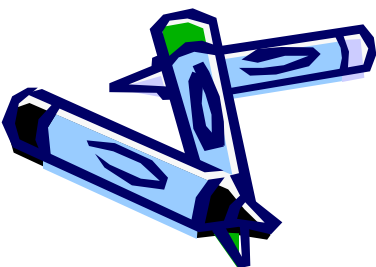
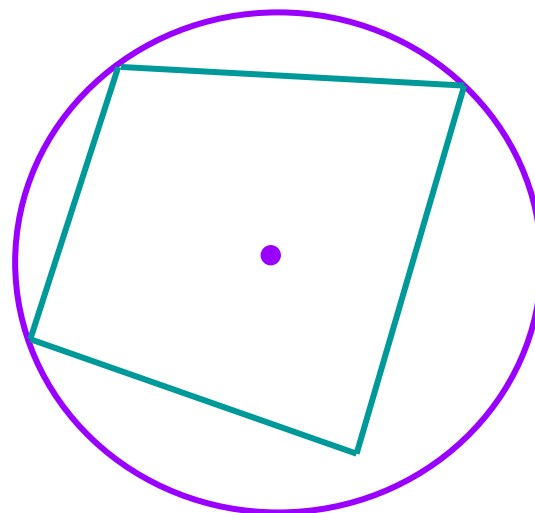
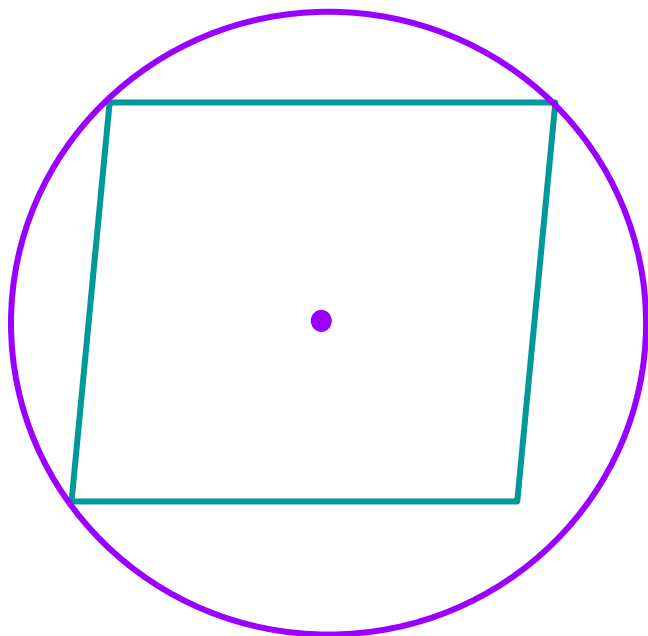
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник – **вписанным** в эту окружность.



окр.  $(O; R)$  описана около ABCD

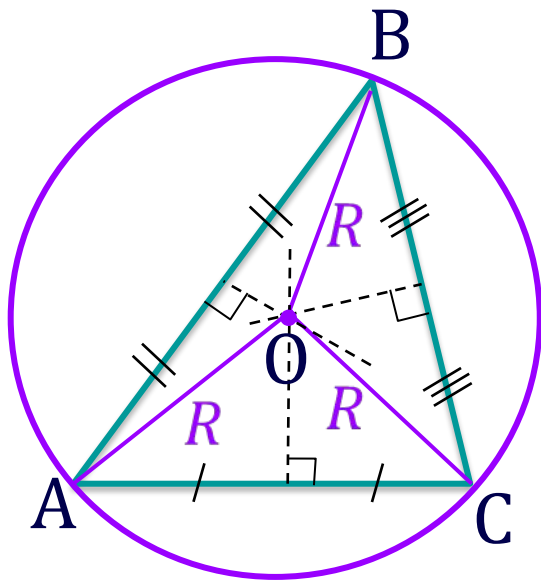


Не около всякого **многоугольника** можно  
описать **окружность**.



# ТЕОРЕМА

Около любого **треугольника** можно **описать окружность** и притом **только одну.**



Дано:  $\triangle ABC$

Доказать: существует окр.  $(O; R)$ , описанная около треугольника

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры  $OA = OB = OC$ , по свойству серединных перпендикуляров.

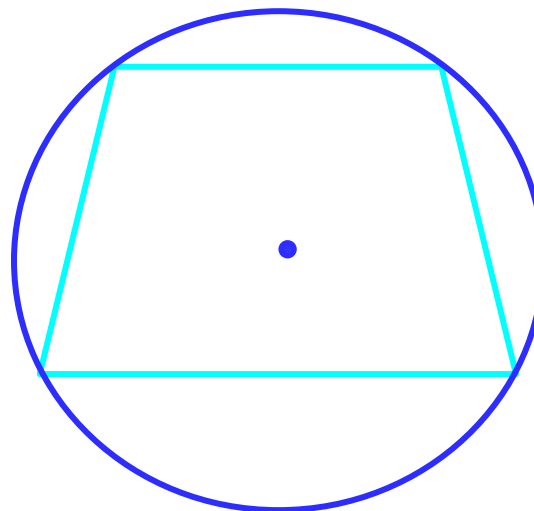
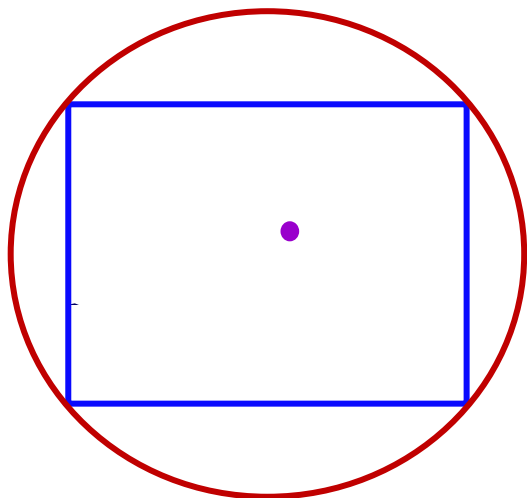
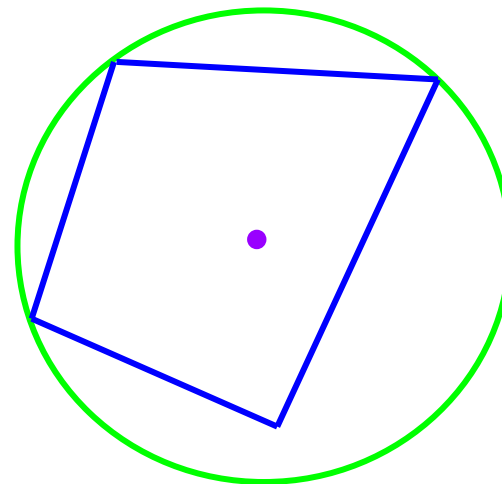
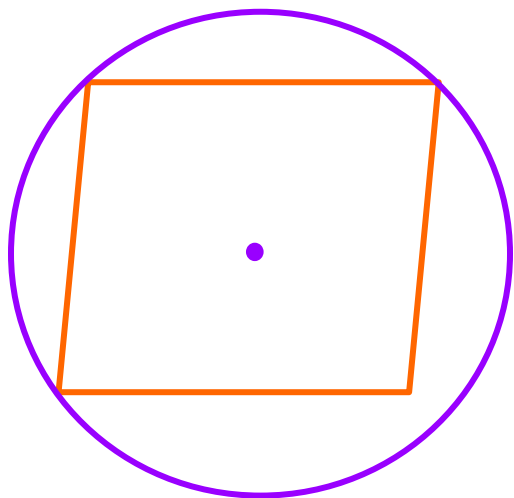
$O$  равноудалена от вершин  $\triangle ABC$ .

$O$  – центр окружности,  $OA, OB, OC$  – радиусы.

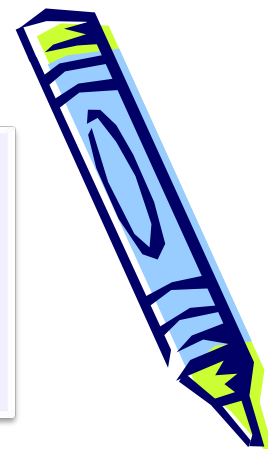
Значит, окружность описана около  $\triangle ABC$ .

**Центр описанной окружности** - точка пересечения **серединных перпендикуляров.**

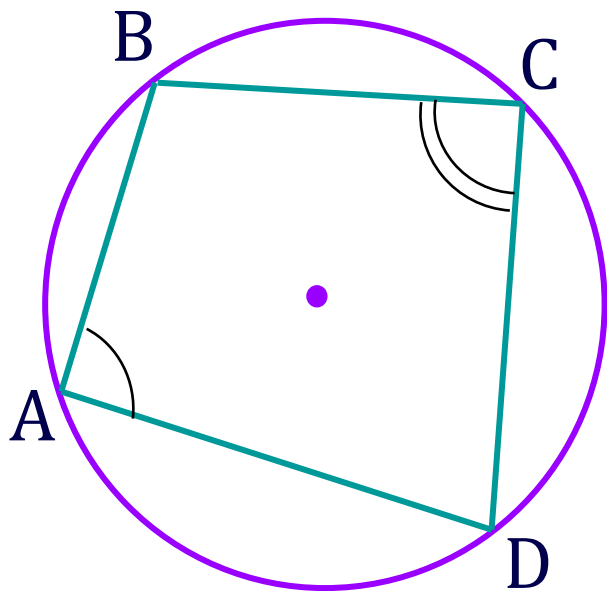
Не около всякого **четырёхугольника**  
можно описать **окружность**.



# ТЕОРЕМА



Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны  $180^{\circ}$ .



Дано: окр.(O;R) описанна около четырехугольник ABCD

Доказать:  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^{\circ}$

Доказательство:

$\angle A$  и  $\angle C$  вписанные  $\Rightarrow$

$$\angle A = \frac{1}{2} \overline{DCB}, \angle C = \frac{1}{2} \overline{BAD} \Rightarrow$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\overline{BCD} + \overline{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 360^{\circ} = 180^{\circ}$$

Доказательство обратной теоремы см. № 729 в учебнике.