Преобразование иррациональных выражений.

Повторение:

1) Имеет ли смысл выражение:

$$\sqrt{20} \qquad \sqrt[3]{-7} \qquad \sqrt[6]{-16} \qquad \sqrt[6]{(-2)^4}$$

?

2) Докажите, что:

$\sqrt[3]{125} = 5$ ***т. к.*** $5^3 = 125$

$\sqrt[8]{0} = 0$ ***т. к.*** $0^8 = 0$

$\sqrt[6]{1} \neq -1$ ***т. к.*** $(-1)^6 = 1$

степени из 1.

Арифметический корень n-ой степени.

Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа а называется неотрицательное число, n-я степень которого равна а

Вычислите!

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = 1\frac{1}{3}$$

$$-2\sqrt[5]{32} = -4$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = -2$$

$$0{,}7\sqrt[4]{81} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = -3{,}9$$

§ 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вы научитесь применять свойства корня n-й степени для преобразования иррациональных выражений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ
Степень, корень n-й степени, иррациональное выражение, свойства, преобразование

ВЫ ЗНАЕТЕ: Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n-й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})=3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}-$
$-2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}=21\cdot 2-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-10\cdot 3=12+\sqrt{6}$.

Ответ: $12+\sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}}-x\sqrt[3]{b}\right):\sqrt[3]{bx}=2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}}:\sqrt[3]{bx}-x\sqrt[3]{b}:\sqrt[3]{bx}=$
$=2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b^2x}}-x\sqrt[3]{\dfrac{b}{bx}}=2a\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx}-\sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n-й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n-й степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР 3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$. Отсюда $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+5)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}=|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-5|=$
$=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$

Ответ: 10.

ПРИМЕР 4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат:
$\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})}+29+12\sqrt{5}=$
$=58-2\sqrt{841-144\cdot 5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом.
$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}+3^2}=$
$=\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}=|2\sqrt{5}-3|=2\sqrt{5}-3.$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-$
$-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6.$

Ответ: -6.

ПРИМЕР 5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}\ \text{при}\ x=3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2};+\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}.$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x-2\sqrt{2}>0, x+2\sqrt{2}>0$, поэтому можно записать, что $|x-2\sqrt{2}|=$ $=x-2\sqrt{2}$ и $|x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$
$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1} = 2.$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1-2\sqrt{x})} =$
$= \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(1-\sqrt{x})}.$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{x}(1-\sqrt{x})}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение
$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1}$ при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a.

Решение. $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1} = \frac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{a^2-(a^2-4)} \times$
$\frac{4}{a\sqrt{a^2-4}} = \frac{\left(a^2+2a\sqrt{a^2-4}+a^2-4-a^2+2a\sqrt{a^2-4}-a^2+4\right)\cdot 4}{(a^2-a^2+4)\cdot a\sqrt{a^2-4}} = \frac{4a\sqrt{a^2-4}\cdot 4}{4a\sqrt{a^2-4}} = 4,$

е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или < -2.

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 2.$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\,(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\,(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\,(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right)} =$

$= \dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}.$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2}{4}\right)^{-1}$ при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a.

Решение. $\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2}{4}\right)^{-1} = \dfrac{\left(a + \sqrt{a^2 - 4}\right)^2 - \left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right)^2}{a^2 - \left(a^2 - 4\right)} \times$

$\dfrac{4}{a\sqrt{a^2 - 4}} = \dfrac{\left(a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4} + a^2 - 4 - a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4} - a^2 + 4\right) \cdot 4}{\left(a^2 - a^2 + 4\right) \cdot a\sqrt{a^2 - 4}} = \dfrac{4a\sqrt{a^2 - 4} \cdot 4}{4a\sqrt{a^2 - 4}} = 4,$

е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или < -2.

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной*.

ПРИМЕР

9. Докажите тождество при допустимых значениях переменной: $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Решение. Введем обозначение $a+\frac{2}{a}=t$. Тогда $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{\left(t^2-4\right)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{\left(t^2-8\right)^2}=\left|t^2-8\right|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

! Вы научитесь преобразовывать иррациональные выражения, содержащие корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем* (*сложным радикалом*). Сложный корень $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \quad (1)$$

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \qquad (2)$$

Доказательство равенства (2) выполните самостоятельно.

ПРИМЕР

10. Вычислим значение выражения: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения: $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, где $A = 3$, $B = 8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Ответ: $\sqrt{2} + 1$.

Упражнения

А

Выполните действия (**11.1—11.2**):

11.1. 1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}-\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{5}{3+2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2-10\sqrt{27}$.

11.3. Используя формулы сложных корней, упростите выражение:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\dfrac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$.