

Преобразование иррациональных выражений.

Повторение:

1) Имеет ли смысл выражение:

$$\sqrt{20} \quad \sqrt[3]{-7} \quad \sqrt[6]{(-13)^4} \quad ?$$

2) Докажите, что:

• $\sqrt[3]{125} = 5$ т. к. $5^3 = 125$

• $\sqrt[8]{0} = 0$ т. к. $0^8 = 0$

• $\sqrt[6]{1} \neq -1$ т. к. $(-1)^6 = 1$

степени из 1.

Арифметический корень n-ой степени.

Арифметический корень n-ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = 1\frac{1}{3}$$



$$-2\sqrt[5]{32} = -4$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = -2$$

$$0,7\sqrt[4]{81} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = -3,9$$

§ 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ



Вы научитесь применять свойства корня n -й степени для преобразования иррациональных выражений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, корень n -й степени, иррациональное выражение, свойства, преобразование

вы знаете:

Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n -й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 21 \cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10 \cdot 3 = 12 + \sqrt{6}$.

Ответ: $12 + \sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$
 $= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n -й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n -й степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27 + 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 5)^2$; $27 - 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 5)^2$. Отсюда
 $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} = |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| =$
 $= \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10.$

Ответ: 10.

ПРИМЕР

4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат:
 $(\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}})^2 = 29 - 12\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{(29 - 12\sqrt{5})(29 + 12\sqrt{5})} + 29 + 12\sqrt{5} =$
 $= 58 - 2\sqrt{841 - 144 \cdot 5} = 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 22 = 36.$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} > \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом.
 $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{29 - 2 \cdot 6\sqrt{5}} = \sqrt{29 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + 3^2} =$
 $= \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = |2\sqrt{5} - 3| = 2\sqrt{5} - 3.$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} -$
 $-\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 3 - (2\sqrt{5} + 3) = -6.$

Ответ: -6.

ПРИМЕР

5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + 8}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 8}} \text{ при } x = 3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2}; +\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|}.$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x - 2\sqrt{2} > 0$, $x + 2\sqrt{2} > 0$, поэтому можно записать, что $|x - 2\sqrt{2}| =$
 $= x - 2\sqrt{2}$ и $|x + 2\sqrt{2}| = x + 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{x - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.
$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1 - 2\sqrt{x})} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right) \left(\frac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4} \right)^{-1}$$

при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a .

Решение.
$$\begin{aligned} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right) \left(\frac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4} \right)^{-1} &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4})^2}{a^2 - (a^2 - 4)} \times \\ &= \frac{4}{a^2 - a^2 + 4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или $a < -2$.

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } & \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \\ & = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.
$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1-2\sqrt{x})} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right) \left(\frac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4} \right)^{-1}$$

при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a .

Решение.
$$\begin{aligned} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right) \left(\frac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4} \right)^{-1} &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4})^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4})^2}{a^2 - (a^2 - 4)} \times \\ &= \frac{4}{a^2 - a^2 + 4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ введения новой переменной.

ПРИМЕР

9. Докажите тождество при допустимых значениях переменной:

$$\sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right)^2 - 8\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + 48} = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

Решение. Введем обозначение $a + \frac{2}{a} = t$. Тогда $a^2 + \frac{4}{a^2} = t^2 - 4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{(t^2 - 4)^2 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 8t^2 + 16 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 16t^2 + 64} = \sqrt{(t^2 - 8)^2} = |t^2 - 8|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left|\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 8\right| = \left|a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} - 8\right| = \left|a^2 - 4 + \frac{4}{a^2}\right| = \left|\left(a - \frac{2}{a}\right)^2\right| = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a - \frac{2}{a}\right)^2$.




Вы научитесь преобразовывать иррациональные выражения, содержащие корень вида $\sqrt{A + \sqrt{B}}$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем* (сложным радикалом). Сложный корень $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (2)$$

 Доказательство равенства (2) выполните самостоятельно.

ПРИМЕР

10. Вычислим значение выражения: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения:

$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, где $A = 3$, $B = 8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Ответ: $\sqrt{2} + 1$.

Упражнения

А

Выполните действия (11.1—11.2):

$$11.1.1) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}};$$

$$2) \frac{11 + \sqrt{21}}{11 - \sqrt{21}} + \frac{11 - \sqrt{21}}{11 + \sqrt{21}};$$

$$3) \frac{1}{11 - 2\sqrt{30}} - \frac{1}{11 + 2\sqrt{30}};$$

$$4) \frac{5}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{5}{3 - 2\sqrt{2}}.$$

$$11.2.1) \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}};$$

$$2) \sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt[4]{4 - \sqrt{15}};$$

$$3) (\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28};$$

$$4) (3\sqrt{5} + \sqrt{15})^2 - 10\sqrt{27}.$$

11.3. Используя формулы сложных корней, упростите выражение:

$$1) \sqrt{5 + \sqrt{24}};$$

$$2) \sqrt{6 - \sqrt{20}};$$

$$3) \sqrt{7 - \sqrt{13}};$$

$$4) \sqrt{8 + \sqrt{28}};$$

$$5) \sqrt{8 - 2\sqrt{15}};$$

$$6) \sqrt{6 + 3\sqrt{3}};$$

$$7) \sqrt{10 - 2\sqrt{21}};$$

$$8) \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}.$$

$$11.4. \text{ Упростите выражение: } \left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} - 3} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + 3} \right) : \frac{2m}{m - 6\sqrt{m} + 9}.$$