Преобразование иррациональных выражений.

Повторение:

1) Имеет ли смысл выражение:

$$\sqrt{20} \qquad \sqrt[3]{-7} \qquad \sqrt[6]{(-13)^4} \qquad \sqrt[6]{(-6)}$$

?

2) Докажите, что:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{т. к.} \quad 5^3 = 125$$

$$\sqrt[8]{0} = 0 \quad \text{т. к.} \quad 0^8 = 0$$

$$\sqrt[6]{1} \neq -1 \quad \text{т. к.} \quad (-1)^6 = 1$$

степени из 1.

Арифметический корень n-ой степени.

Вычислите!

Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа а называется неотрицательное число, n-я степень которого равна а

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = 1\frac{1}{3}$$

$$-2\sqrt[5]{32} = -4$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} = -2$$

$$0,7\sqrt[4]{81} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = -3,9$$

§ 11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вы научитесь применять свойства корня n-й степени для преобразования иррациональных выражений.

КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ

Степень, корень n-й степени, иррациональное выражение, свойства, преобразование

ВЫ ЗНАЕТЕ: Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n-й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 21 \cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10 \cdot 3 = 12 + \sqrt{6}$.

Ответ: $12 + \sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$

$= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n-й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n-й степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР 3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$. Отсюда $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+5)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}=|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-5|=$ $=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$

Ответ: 10.

ПРИМЕР 4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат: $\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})}+29+12\sqrt{5}=$ $=58-2\sqrt{841-144\cdot5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом. $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}+3^2}=$ $=\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}=|2\sqrt{5}-3|=2\sqrt{5}-3.$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-$ $-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6.$

Ответ: -6.

ПРИМЕР 5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}} \text{ при } x=3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2};+\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}.$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x-2\sqrt{2}>0$, $x+2\sqrt{2}>0$, поэтому можно записать, что $|x-2\sqrt{2}|=$ $=x-2\sqrt{2}$ и $|x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 2.$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x+1-2\sqrt{x}\right)} =$

$= \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}.$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1}$ при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a.

Решение. $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a}-2\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1} = \dfrac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{a^2-\left(a^2-4\right)} \times$

$\dfrac{4}{a\sqrt{a^2-4}} = \dfrac{\left(a^2+2a\sqrt{a^2-4}+a^2-4-a^2+2a\sqrt{a^2-4}-a^2+4\right)\cdot 4}{\left(a^2-a^2+4\right)\cdot a\sqrt{a^2-4}} = \dfrac{4a\sqrt{a^2-4}\cdot 4}{4a\sqrt{a^2-4}} = 4,$

е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или < -2

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} =$

$= \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2.$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x + 1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right)} =$

$= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}.$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}$.

ПРИМЕР

8. Докажем, что выражение

$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2}{4}\right)^{-1}$ при допустимых значениях a не зависит от значения переменной a.

Решение. $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2}{4}\right)^{-1} = \frac{\left(a + \sqrt{a^2 - 4}\right)^2 - \left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right)^2}{a^2 - \left(a^2 - 4\right)} \times$

$\frac{4}{a\sqrt{a^2 - 4}} = \frac{\left(a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4} + a^2 - 4 - a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4} - a^2 + 4\right) \cdot 4}{\left(a^2 - a^2 + 4\right) \cdot a\sqrt{a^2 - 4}} = \frac{4a\sqrt{a^2 - 4} \cdot 4}{4a\sqrt{a^2 - 4}} = 4,$

е. выражение действительно не зависит от значения переменной $a > 2$ или < -2.

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной.*

ПРИМЕР **9.** Докажите тождество при допустимых значениях переменной: $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Решение. Введем обозначение $a+\frac{2}{a}=t$. Тогда $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{\left(t^2-4\right)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{\left(t^2-8\right)^2}=\left|t^2-8\right|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

! Вы научитесь преобразовывать иррациональные выражения, содержащие корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем* (*сложным радикалом*). Сложный корень $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (2)$$

Доказательство равенства (2) выполните самостоятельно.

ПРИМЕР

10. Вычислим значение выражения: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения: $2\sqrt{2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3+\sqrt{8}}$, где $A=3$, $B=8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$$

Ответ: $\sqrt{2}+1$.

Упражнения

А

Выполните действия (**11.1—11.2**):

11.1. 1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}-\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{5}{3+2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2-10\sqrt{27}$.

11.3. Используя формулы сложных корней, упростите выражение:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\dfrac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$.