

Производная и ее применение

ГБОУ НПО Профессиональный лицей № 80

Преподаватель математики

Савицкая Г.И.



Содержание:

Справочные сведения:

Геометрический смысл производной слайды 3-6

Задание 1 слайд 7

Задание 2 слайд 8

- Уравнение касательной к графику функции.
Справочные сведения слайд 9
- Задача 1 слайд 10-11
- Задача 2 слайд 12-13
- Задача 3 слайд 14-15
- Слайд 16. Справочные сведения. Применение производной к исследованию функции. Монотонность, экстремумы.
- Слайд 17. Наибольшее и наименьшее значение.
- Слайд 18. Задание исследование функции по графику.
- Слайд 19. Проверь себя!



Справочный материал

- Определение производной

$$V_{\text{мгновенная}} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Физический смысл производной

$$V_{\text{средняя скорость}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$



Справочные сведения

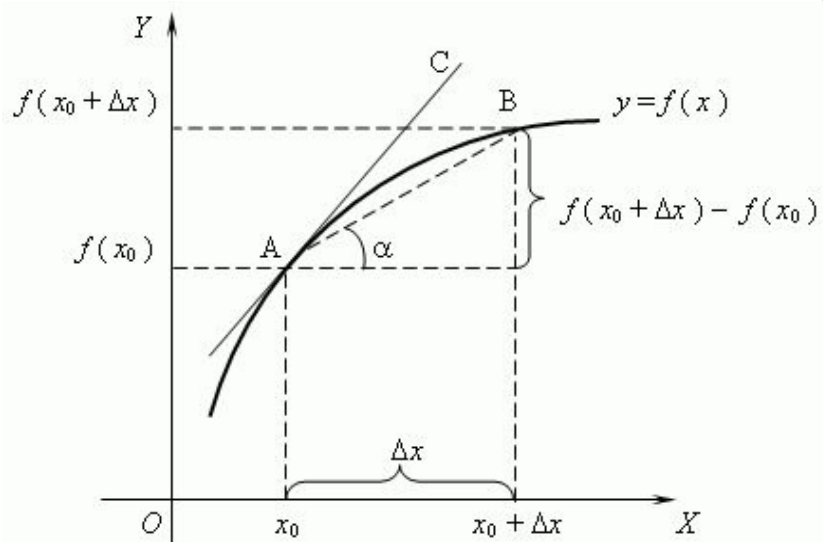
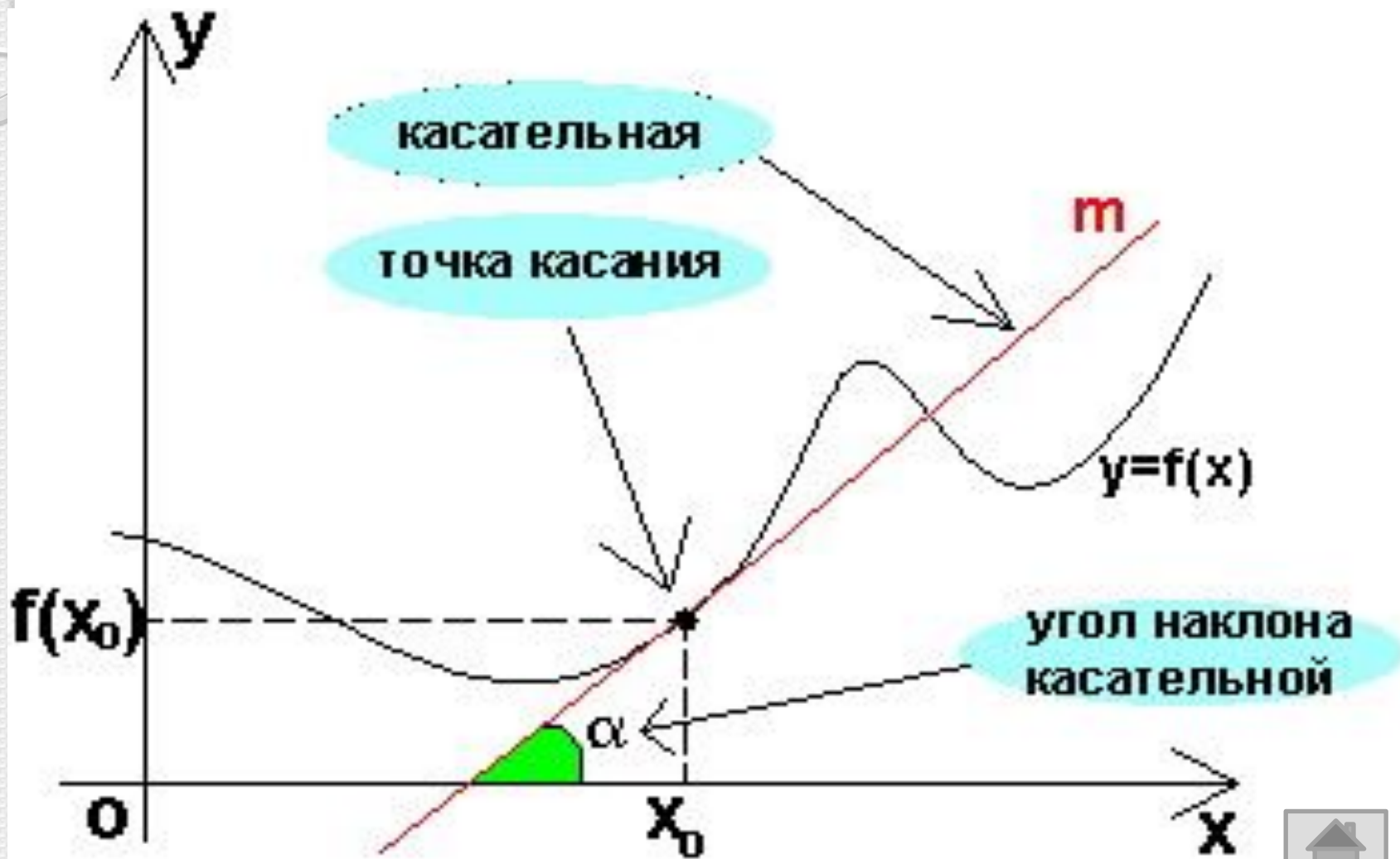


Рис. 1

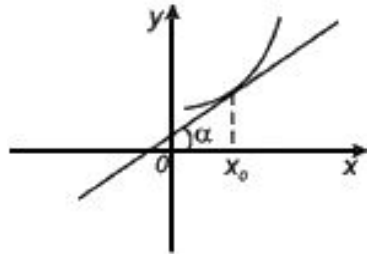


Справочные сведения



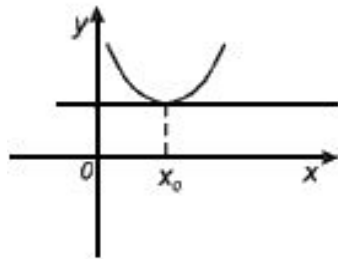
Справочные сведения

Производная в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

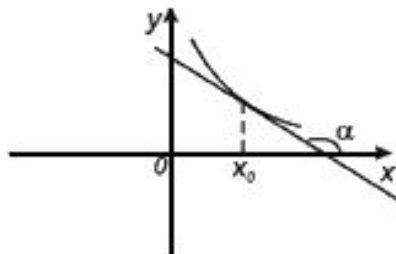


$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$

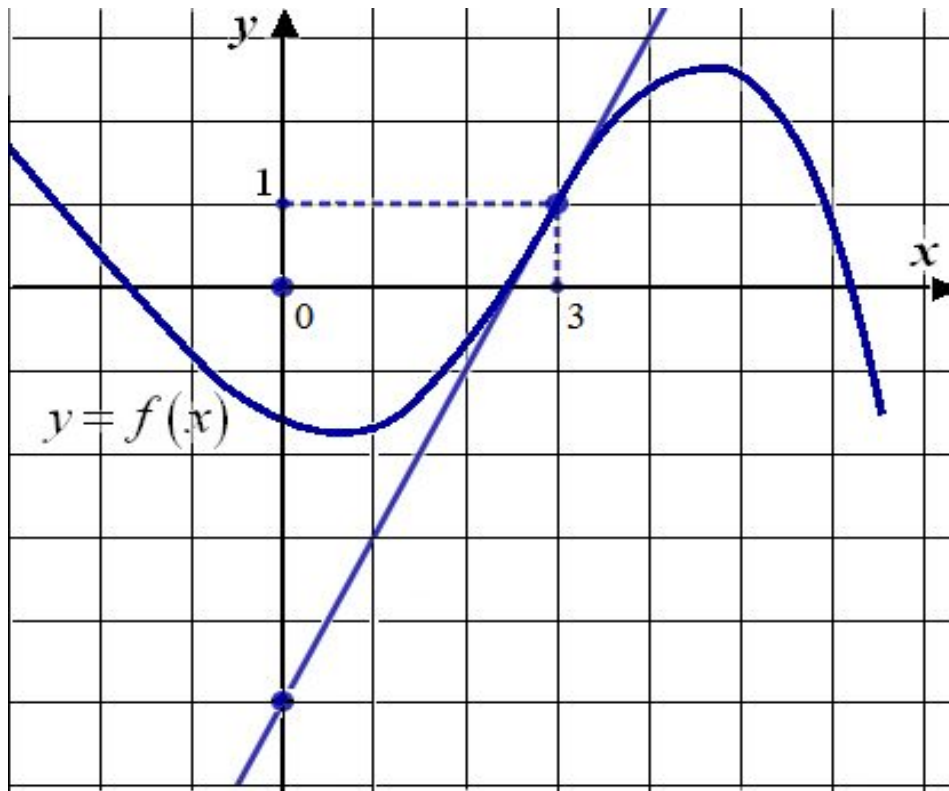


$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$



Задание 1

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

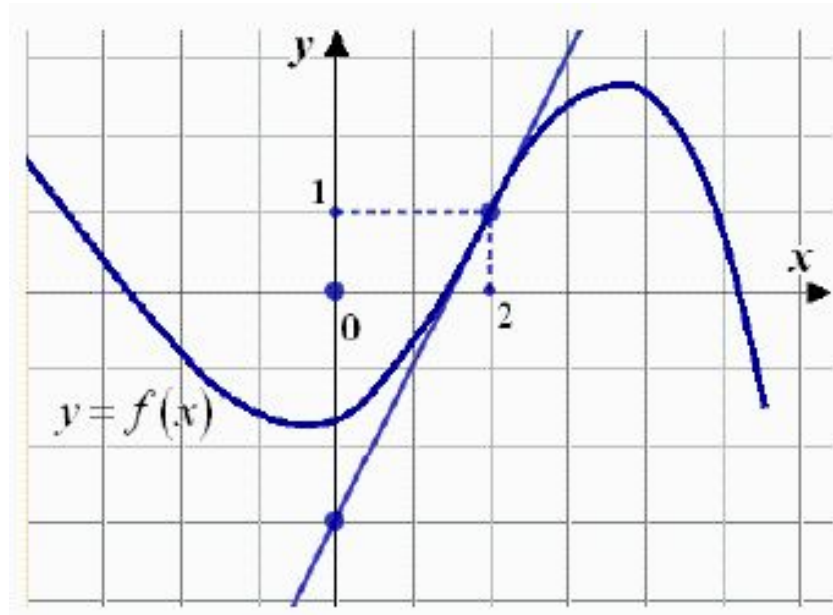


Проверь себя!

● Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 2$



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 2. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 2$.



$$f'(x) = k = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$



Проверь себя!

● Ответ:

$$\bullet f'(x) = k = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$





- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



ЗАДАНИЕ 1.

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке $M(3; -2)$.

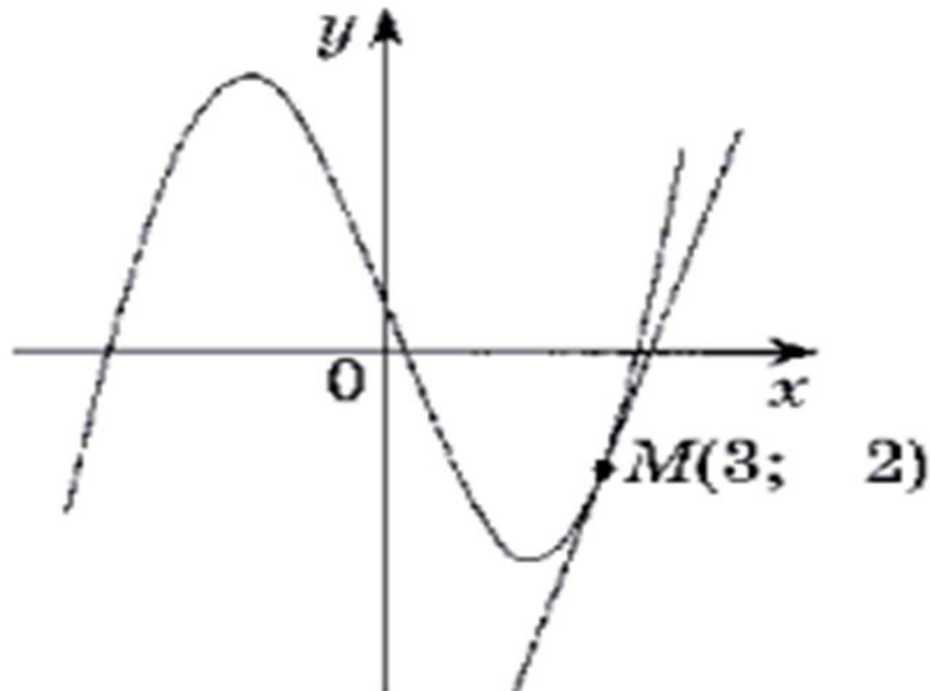


Рис. 1



Проверь решение!

Решение

Точка $M(3; -2)$ является точкой касания,

$x = 3$ – абсцисса точки касания.

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 4 \cdot 3 = 1; \quad f(3) = -2.$$

$$f'(x) = x^2 - 4; \quad f'(3) = 5.$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -2 + 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 17$$

уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

в точке $M(3; -2)$



Задание 2

Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = -x^2 - 4x + 2$, проходящих через точку $M(-3; 6)$.

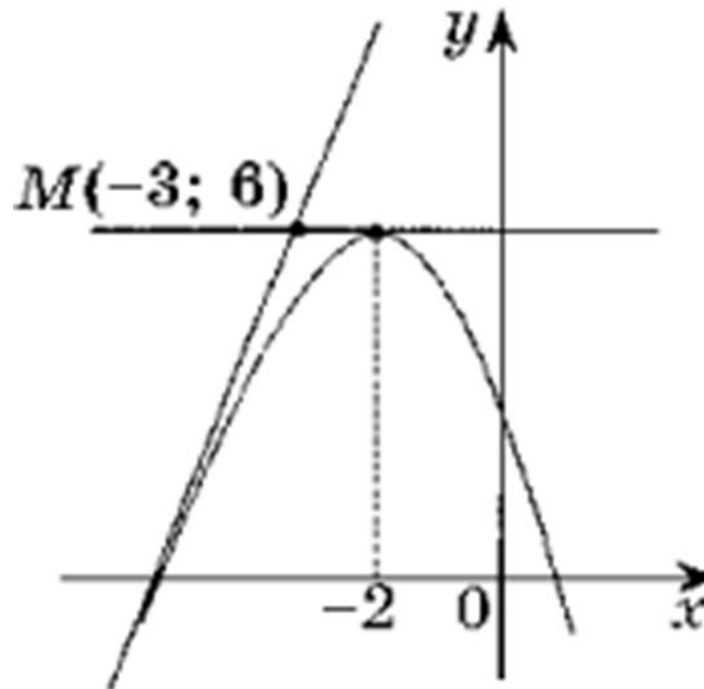


Рис. 2



Проверь решение!

Решение.

Точка $M(-3; 6)$ не является точкой касания.

Пусть $A(x_1; y_1)$ точка касания

$$f(x_1) = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2.$$

$$f'(x_1) = -2x_1 - 4,$$

$$y = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2 - 2(x_1 + 2)(x - x_1) \text{ - уравнение касательной.}$$

Касательная проходит через точку $M(-3; 6)$, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$$6 = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2 - 2(x_1 + 2)(-3 - x_1)$$

Выполнив преобразования, получаем квадратное уравнение

$$(x_1)^2 - 6x_1 + 8 = 0$$

$$x_1 = -4, x_1 = -2.$$

Если $x_1 = -4$, то уравнение касательной имеет вид $y = 4x + 18$.

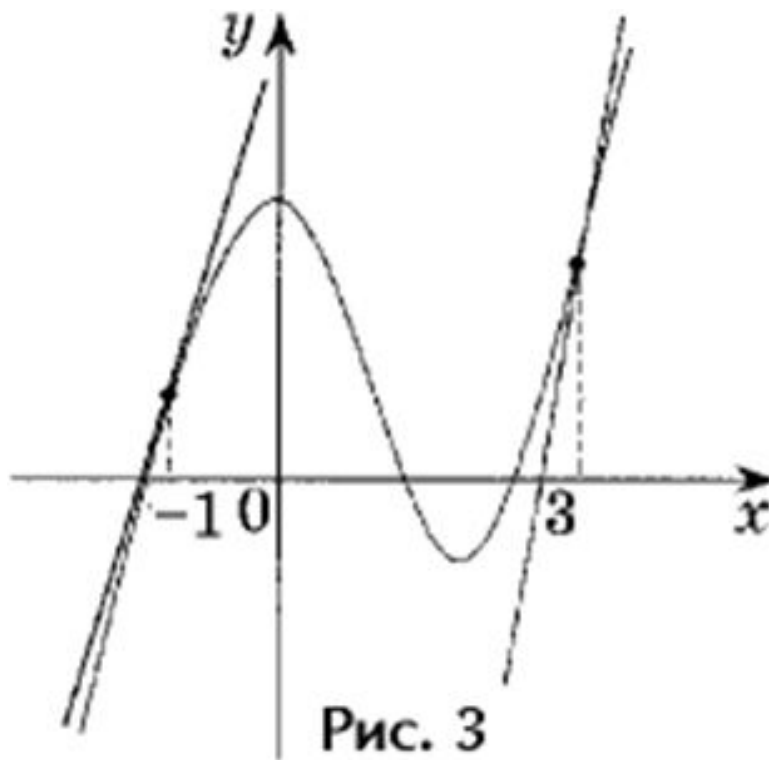
Если $x_1 = -2$, то уравнение касательной имеет вид $y = 6$.



Задание 3

Напишите уравнения всех касательных к графику функции

$y = x^3 - 3x^2 + 3$, параллельных прямой $y = 9x + 1$.



Проверь решение!

● Решение.

x_0 – абсцисса точки касания.

$$f(x_0) = x_0^3 - 3x_0^2 + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$ Но, с другой стороны,

$$f'(x_0) = 9 \text{ (условие параллельности).}$$

Значит, надо решить уравнение $3x_0^2 - 6x_0 = 9$

Его корни $x_0 = -1$, $x_0 = 3$

1. $x_0 = -1$; $f(-1) = -1$; $f'(-1) = 9$; $y = -1 + 9(x + 1)$;

$y = 9x + 8$ – уравнение касательной;

2. $x_0 = 3$; $f(3) = 3$; $f'(3) = 9$; $y = 3 + 9(x - 3)$;

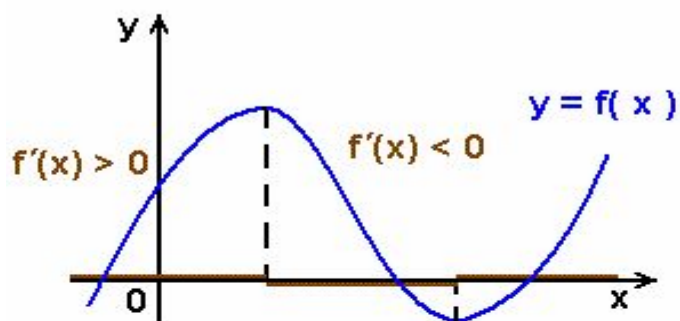
$y = 9x - 24$ – уравнение касательной.



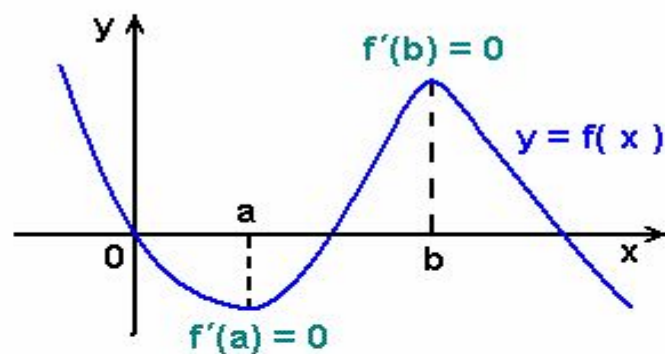
Справочные сведения:

Применение производной к исследованию функций

Достаточный признак возрастания (убывания) функции



Необходимые условия существования экстремума

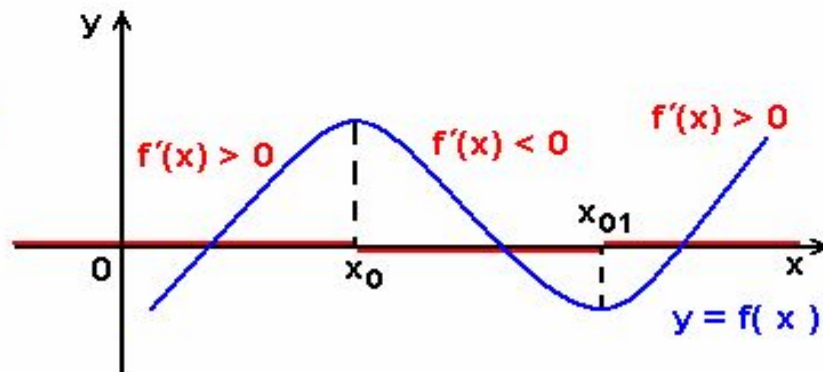


Достаточные условия существования экстремума

$f(x)$ непрерывна в т. x_0 и x_{01}

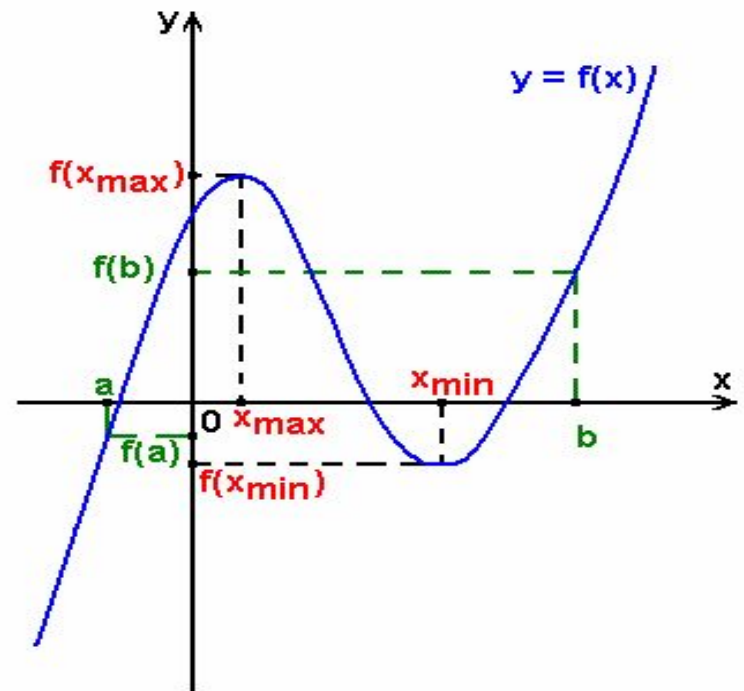
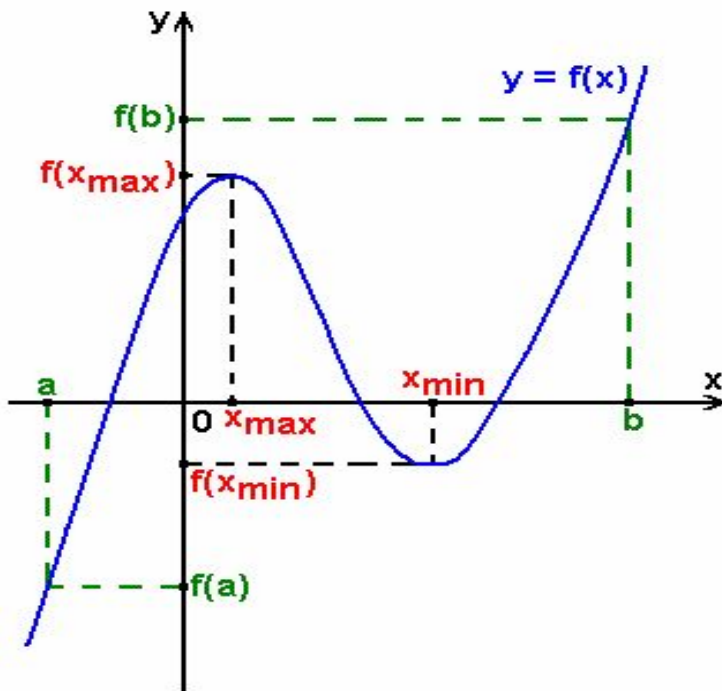
x_0 - точка максимума

x_{01} - точка минимума

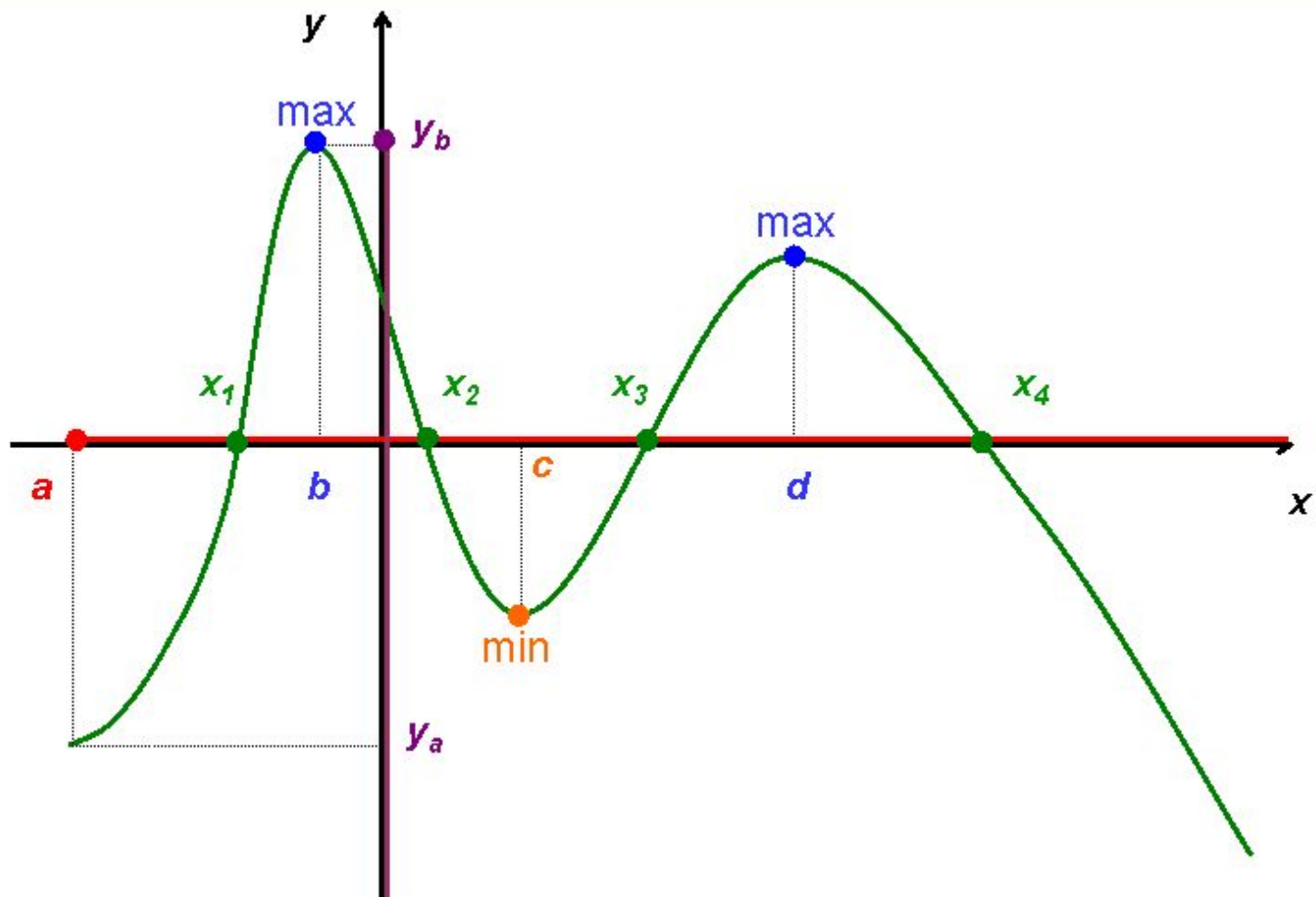


Справочные сведения:

Наибольшее и наименьшее значение функции



Исследуйте функцию по графику:



Проверь себя!

Область определения: $D(f) : x \in [a, \infty)$

Множество значений: $E(f) : y \in (-\infty; y_b]$

Корни функции: $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Критические точки максимум: $x \in \{b, d\}$

 минимум: $x = c$

Промежутки возрастания: $x \in [a, b] \cup [c, d]$

Промежутки убывания: $x \in [b, c] \cup [d, \infty)$

Положительные значения: $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$

Отрицательные значения: $x \in (a, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, \infty)$

