Производная и ее применение

ГБОУ НПО Профессиональный лицей № 80

Преподаватель математики

Савицкая Г.И.

Содержание:

Справочный материал

- Определение производной

$$V_{\text{мгновенная}} = f^{|}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Физический смысл производной

$$\boldsymbol{V}_{\text{средняя скорость}} = \frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})}{\Delta\boldsymbol{t}}$$

Справочные сведения

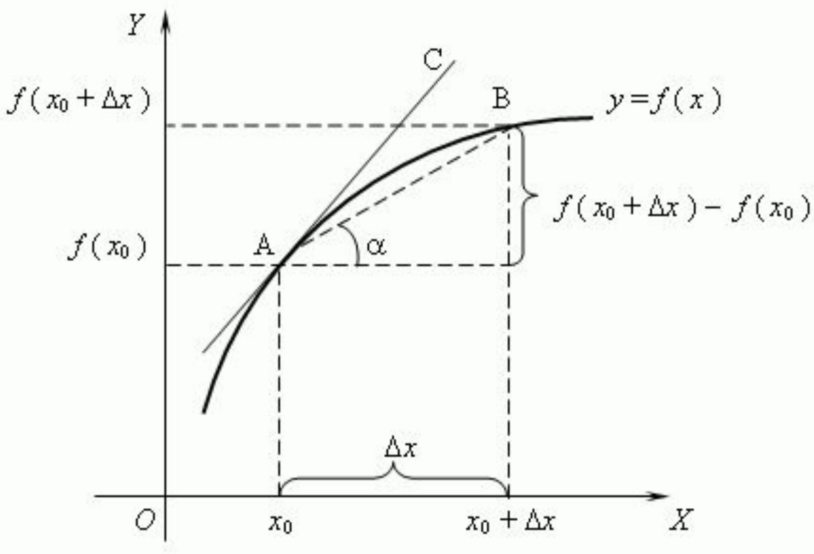
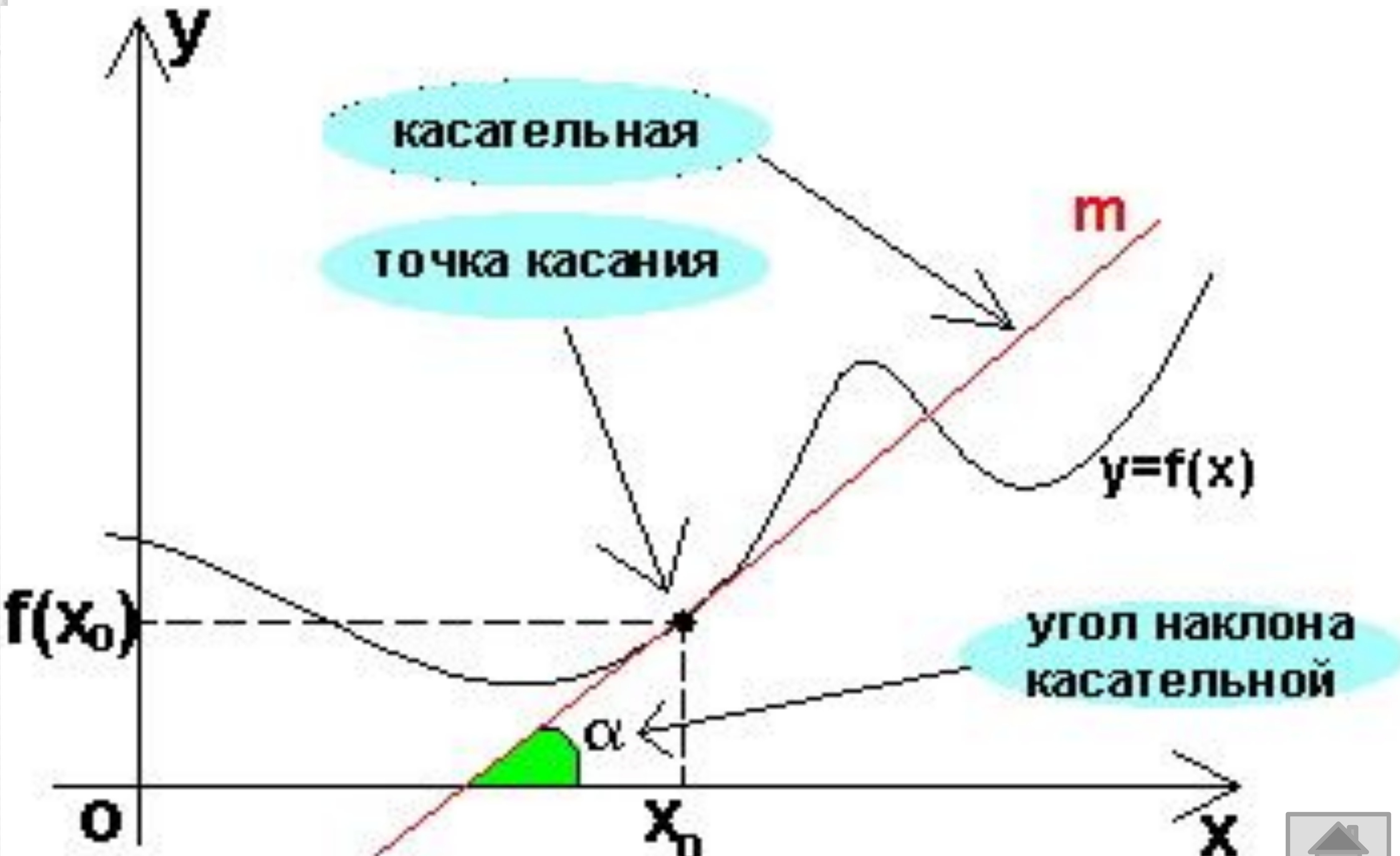


Рис. 1

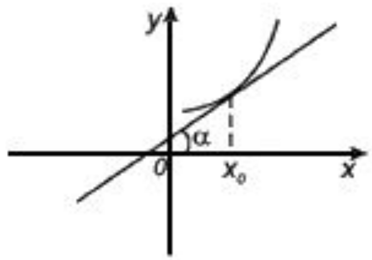
Справочные сведения



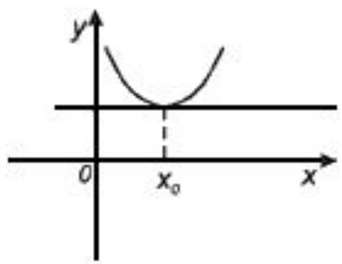
Справочные сведения

Производная в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в этой точке.

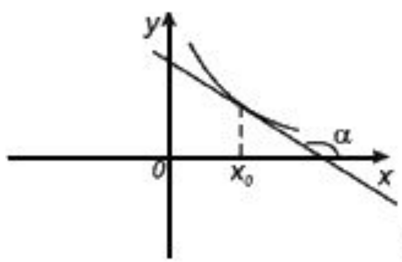
$$f^{/}(x) = tg\,\alpha$$



$$f'(x_0) = tg\alpha > 0$$



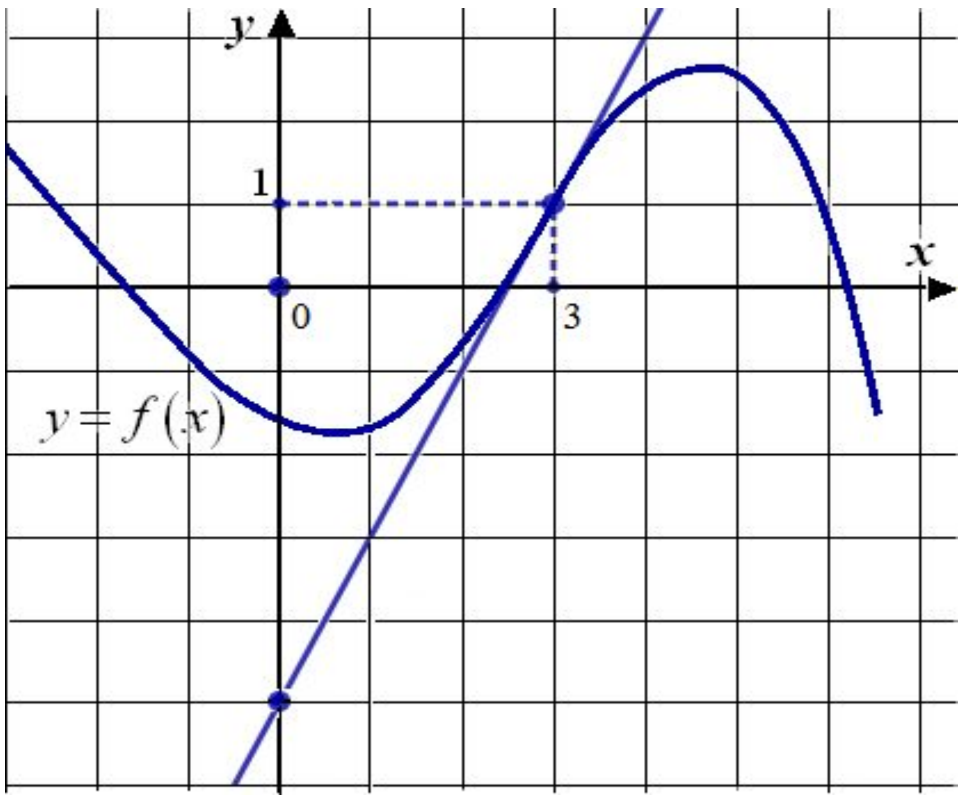
$$f'(x_0) = tg\alpha = 0$$



$$f'(x_0) = tg\alpha < 0$$

Задание1

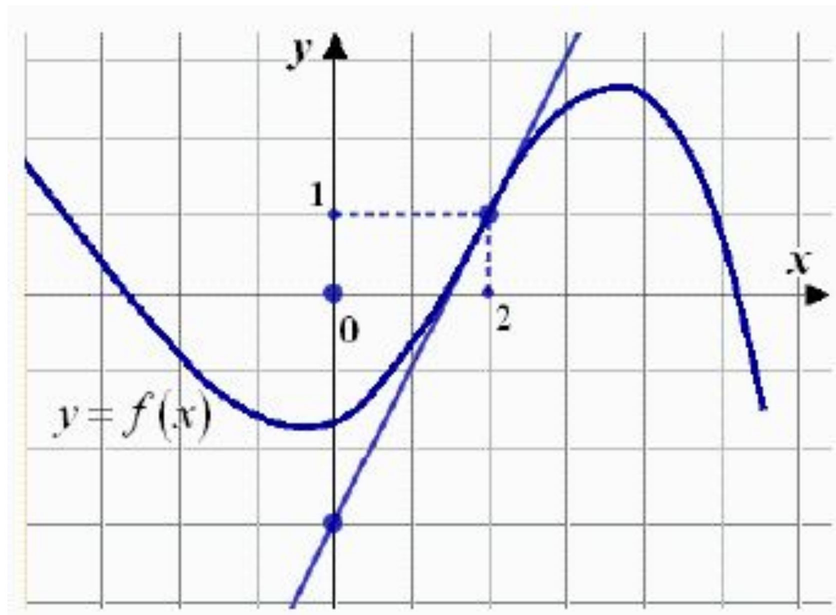
На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке x = 3.



Проверь себя!

- Ответ: $tg\alpha = 2$

На рисунке изображен график функции y = f (x) и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 2. Найдите значение производной этой функции в точке x = 2.



- $f^{|}(x) = k = \frac{1-(-3)}{2-0} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$

Проверь себя!

- Ответ:

  - $f^{|}(x) = k = \frac{1-(-3)}{2-0} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$

- $y = f(x_o) + f^{|}(x_o) + (x - x_o)$

ЗАДАНИЕ1.

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке М(3; –2).

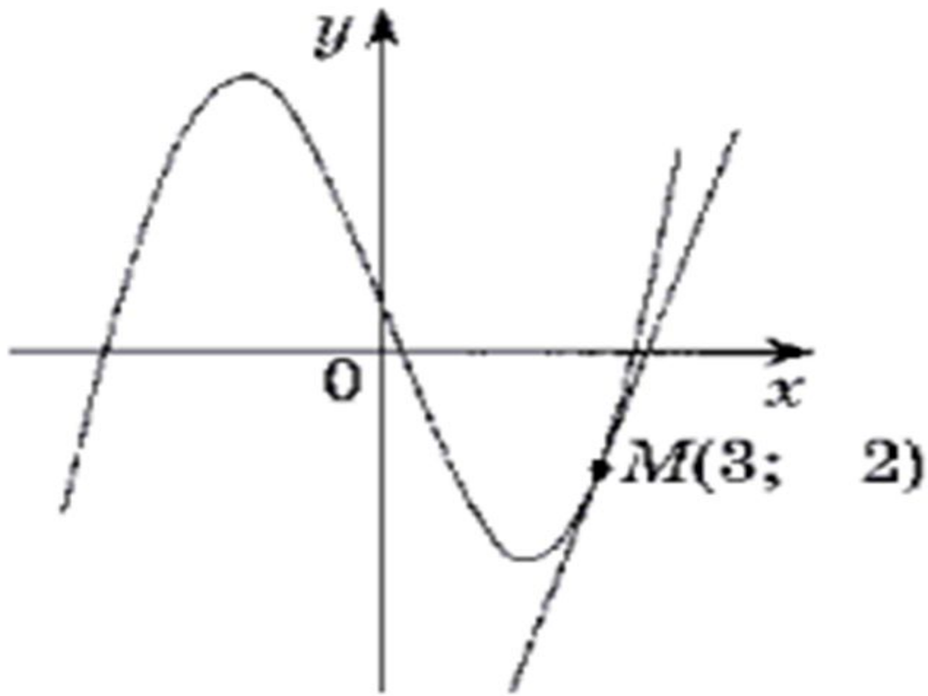


Рис. 1

Проверь решение!

Решение

Точка M(3; – 2) является точкой касания,

$x = 3$ – абсцисса точки касания.

$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 4 \cdot x = 1$; f(3) = – 2.

$f'(x) = x^2 - 4$; $f'(3) = 5$.

$y = f(x_o) + f^{|}(x_o) + (x - x_o)$

$y = -2 + 5(x - 3)$

$y = 5x - 17$

уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

в точке M(3;-2)

Задание 2

Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = -x^2 - 4x + 2$, проходящих через точку $M(-3; 6)$.

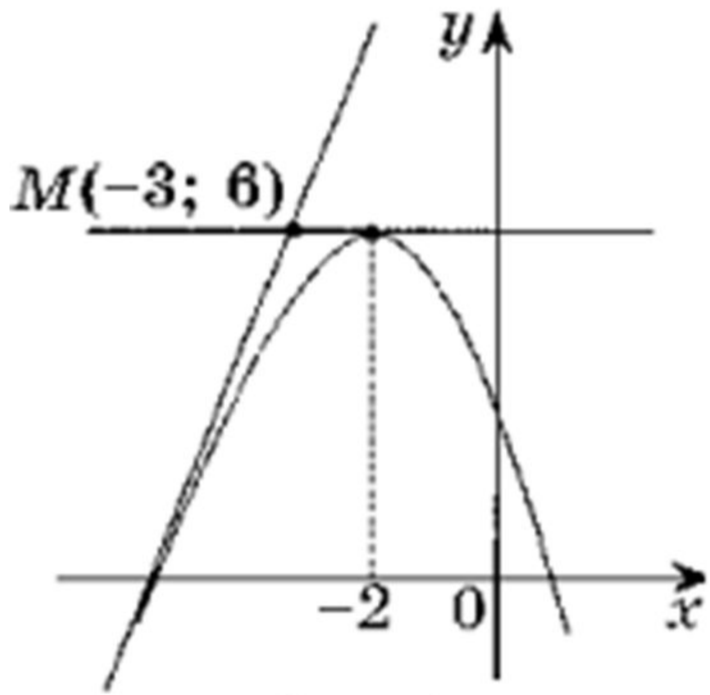


Рис. 2

Проверь решение!

Решение.

Точка М(– 3; 6) не является точкой касания.

Пусть $A(x_1 : y_1)$ точка касания

$f(x_1) = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2.$

$f'(x_1) = -2x_1 - 4,$

$y = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2 - 2(x_1 + 2)(x - x_1)$ – уравнение касательной.

Касательная проходит через точку М(– 3; 6), следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$6 = -(x_1)^2 - 4x_1 + 2 - 2(x_1 + 2)(-3 - x_1)$

Выполнив преобразования , получаем квадратное уравнение

$(x_1)^2 - 6x_1 + 8 = 0$

$x_1 = -4,\ x_1 = -2.$

Если $x_1 = -4$, то уравнение касательной имеет вид $y = 4x + 18$.

Если $x_1 = -2$, то уравнение касательной имеет вид $y = 6$.

Задание 3

Напишите уравнения всех касательных к графику функции

$y = x^3 - 3x^2 + 3$, параллельных прямой $y = 9x + 1$.

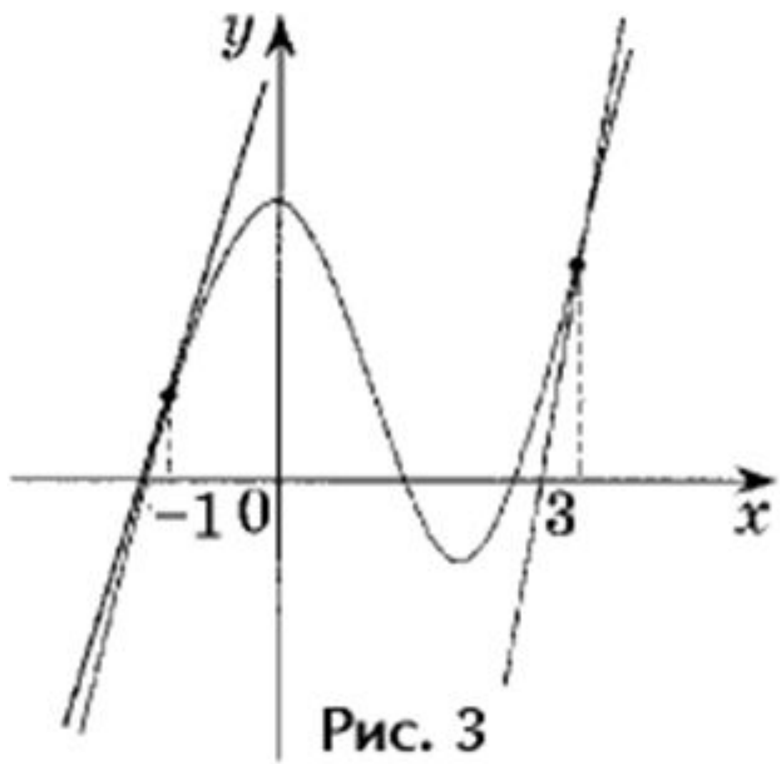


Рис. 3

Проверь решение!

- Решение.

x_0 – абсцисса точки касания.

$f(x_{0)} = x_0{}^3 - 3x_0{}^2 + 3$

$f^{|}(x) = 3x^2 - 6x$

$f^{|}(x_{0)} = 3x_0{}^2 - 6x_0$ Но, с другой стороны,

$f'(x_0) = 9$ (условие параллельности).

Значит, надо решить уравнение $3x_0{}^2 - 6x_0 = 9$

Его корни $x_0 = -1$, $x_0 = 3$

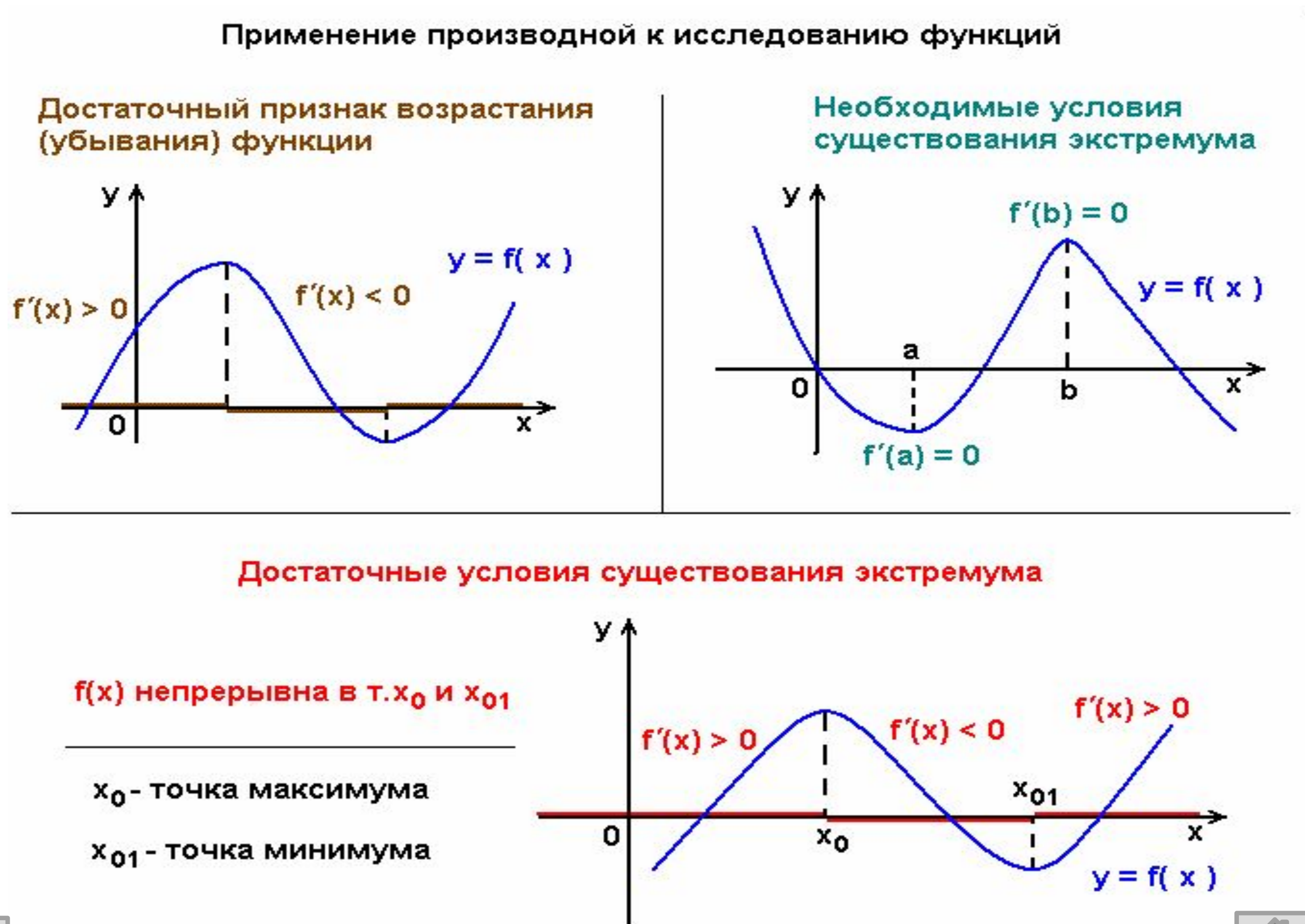
1. $x_0 = -1$; $f(-1) = -1$; $f'(-1) = 9$; $y = -1 + 9(x + 1)$;

$y = 9x + 8$ – уравнение касательной;

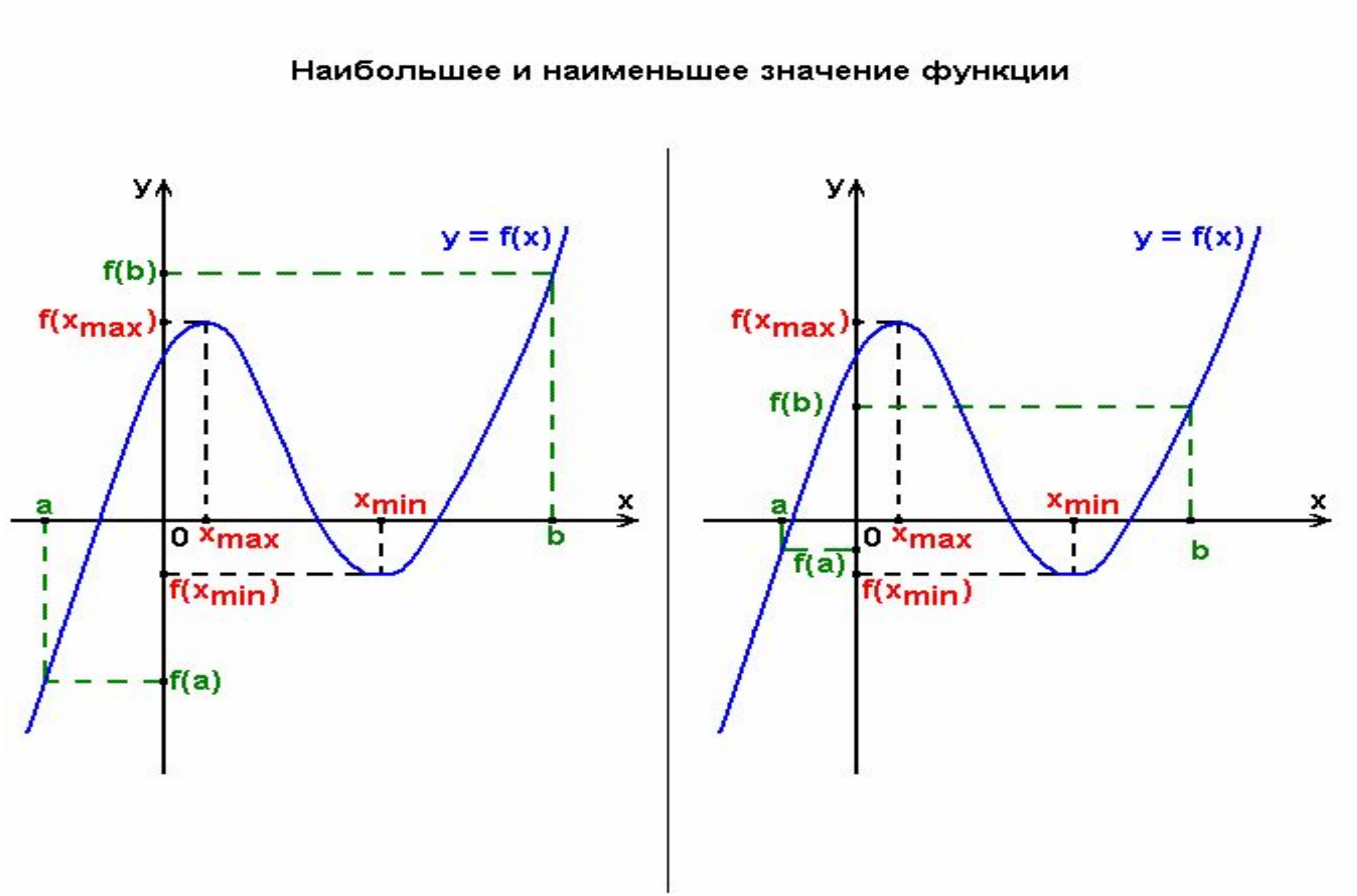
2. $x_0 = 3$; $f(3) = 3$; $f'(3) = 9$; $y = 3 + 9(x - 3)$;

$y = 9x - 24$ – уравнение касательной.

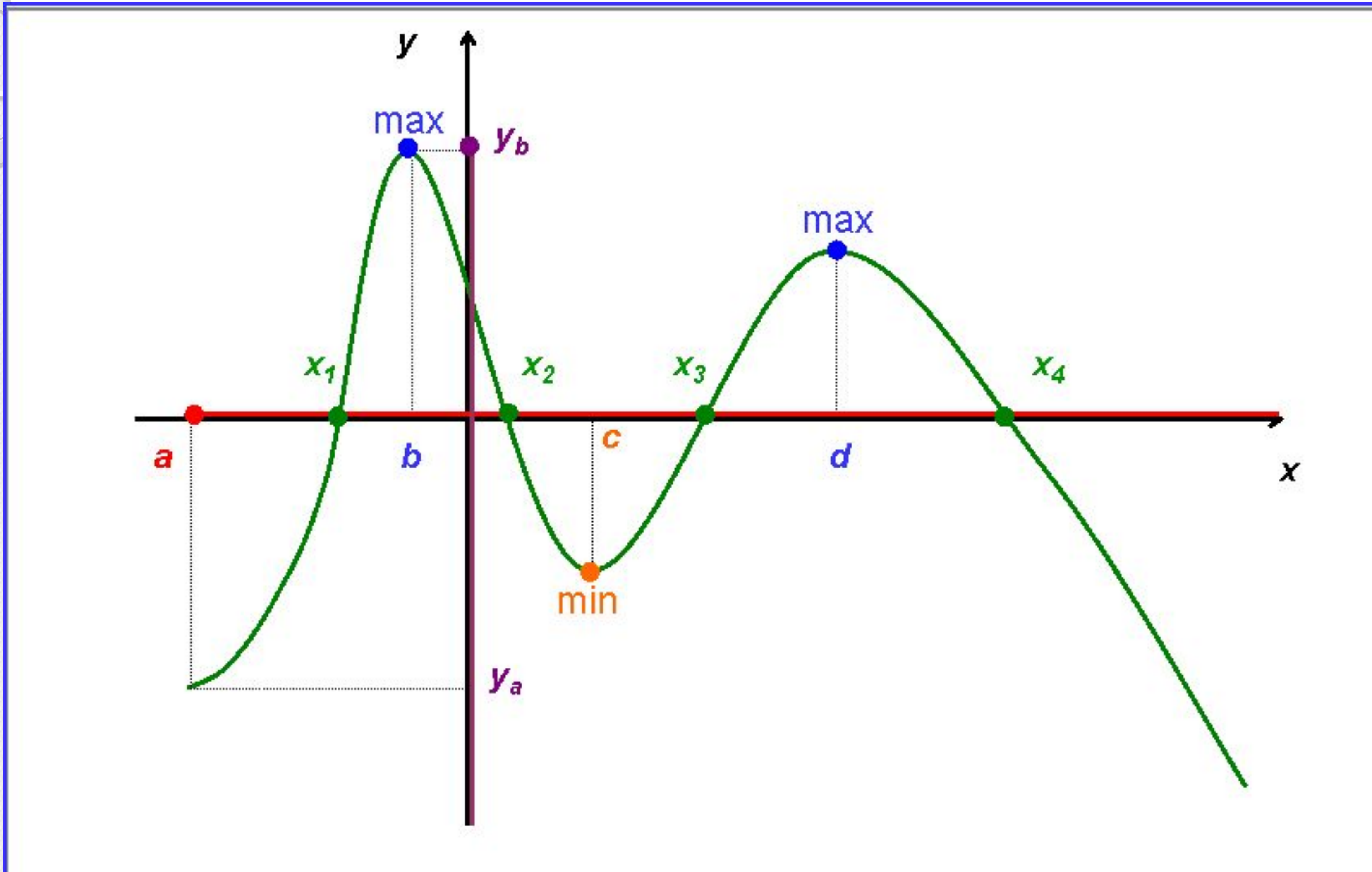
Справочные сведения:



Справочные сведения:



Исследуйте функцию по графику:



Проверь себя!

Область определения: $D(f): x \in [a;\infty)$

Множество значений: $E(f): y \in (-\infty; y_b]$

Корни функции: $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Критические точки максимум: $x \in \{b, d\}$

минимум: $x = c$

Промежутки возрастания: $x \in [a, b] \cup [c, d]$

Промежутки убывания: $x \in [b, c] \cup [d, \infty)$

Положительные значения: $x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$

Отрицательные значения: $x \in (a, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, \infty)$