Модуль действительного числа.
Решение уравнений с модулем

Понятие модуля

***Абсолютной величиной* (модулем) действительного числа *а* называется само число *а*, если оно *неотрицательное*, и число, противоположное *а*, если *а* –*отрицательное*.**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \geq 1{,}5; \\ -2x + 3, & \text{если } x < 1{,}5. \end{cases}$$

Свойства модуля

$1^\circ \quad |a| = |-a|$

$2^\circ \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$3^\circ \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \text{где} \quad b \neq 0$

$4^\circ \quad |a + b| = |a| + |b|, \quad \text{если} \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$

$5^\circ \quad |a| + |b| = a + b, \quad \text{если} \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$

Свойства модуля

$6^\circ \quad |a - b| = |a| + |b|, \quad \text{если} \quad ab \le 0$

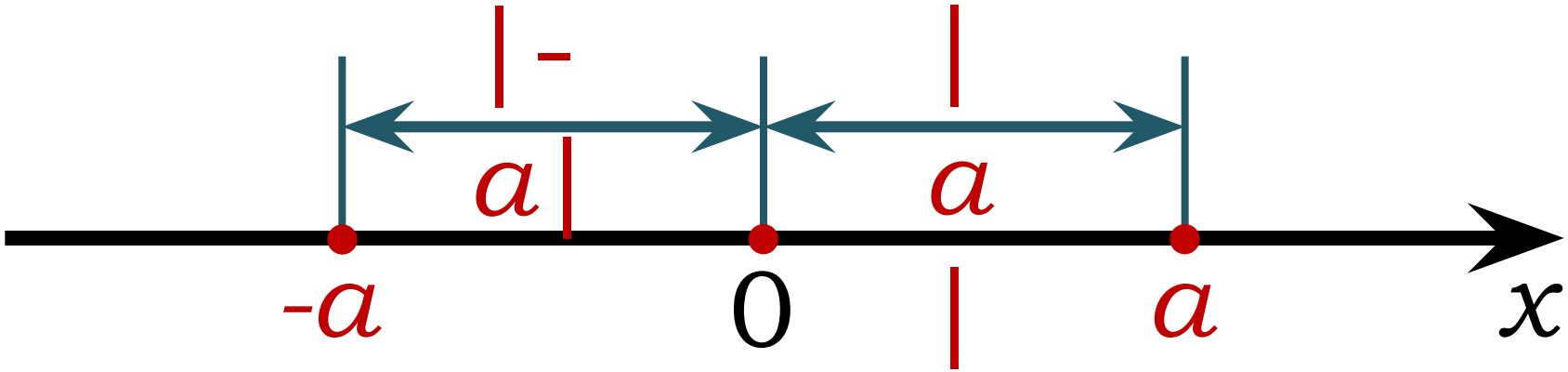
$7^\circ \quad |a|^2 = a^2$

$8^\circ \quad |a| - |b| \ge 0, \quad \text{если} \quad a^2 - b^2 \ge 0$

$9^\circ \quad \sqrt{a^2} = |a|$

$10^\circ \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

Геометрическая интерпретация модуля



Это расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число.

Примеры

Раскрыть модули:

1) $|p-3|$;

2) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$;

3) $|\sqrt{5}-2|$;

4) $|1-\sqrt{2}|$;

5) $|x^2|$;

6) $|x^4+1|$;

7) $\sqrt{(a-3)^2}$, $a \geq 3$;

8) $\sqrt{(b-4)^2}$, $b < 4$;

9) $\sqrt{m^2-2m+1}$, $m < 1$.

Решение уравнений вида

$|f(x)| = a$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

Пример: $|x - 8| = 5$

$$\left[\begin{array}{l} x - 8 = 5, \\ x - 8 = -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 13, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: **3; 13.**

Решение уравнений вида

$|f(x)| = a$

$\lvert 2x - 3 \rvert = 4$	$x_1 = 3{,}5;\ x_2 = -0{,}5$
$\lvert 5x + 6 \rvert = 7$	$x_1 = 0{,}2;\ x_2 = -2{,}6$
$\lvert 9 - 3x \rvert = 6$	$x_1 = 1;\ x_2 = 5$
$\lvert 4x + 2 \rvert = -1$	$x \in \varnothing$
$\lvert 8 - 2x \rvert = 0$	$x = 4$
$\lvert 10x + 3 \rvert = 16$	$x_1 = 1{,}3;\ x_2 = -1{,}9$
$\lvert 24 - 3x \rvert = 12$	$x_1 = 12;\ x_2 = 4$
$\lvert 2x + 30 \rvert = 48$	$x_1 = 9;\ x_2 = -39$

Решение уравнений вида

$|f(x)| = g(x)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

или

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

Пример: $|3x - 10| = x - 2$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x - 10 = x - 2,\\ x - 2 \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3x - 10 = -(x - 2),\\ x - 2 \geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x = 8,\\ x \geq 2;\end{cases}\\ \begin{cases}4x = 12,\\ x \geq 2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 4,\\ x = 3.\end{array}\right.$$

Ответ: **3; 4.**

Решение уравнений вида

$|f(x)| = |g(x)|$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

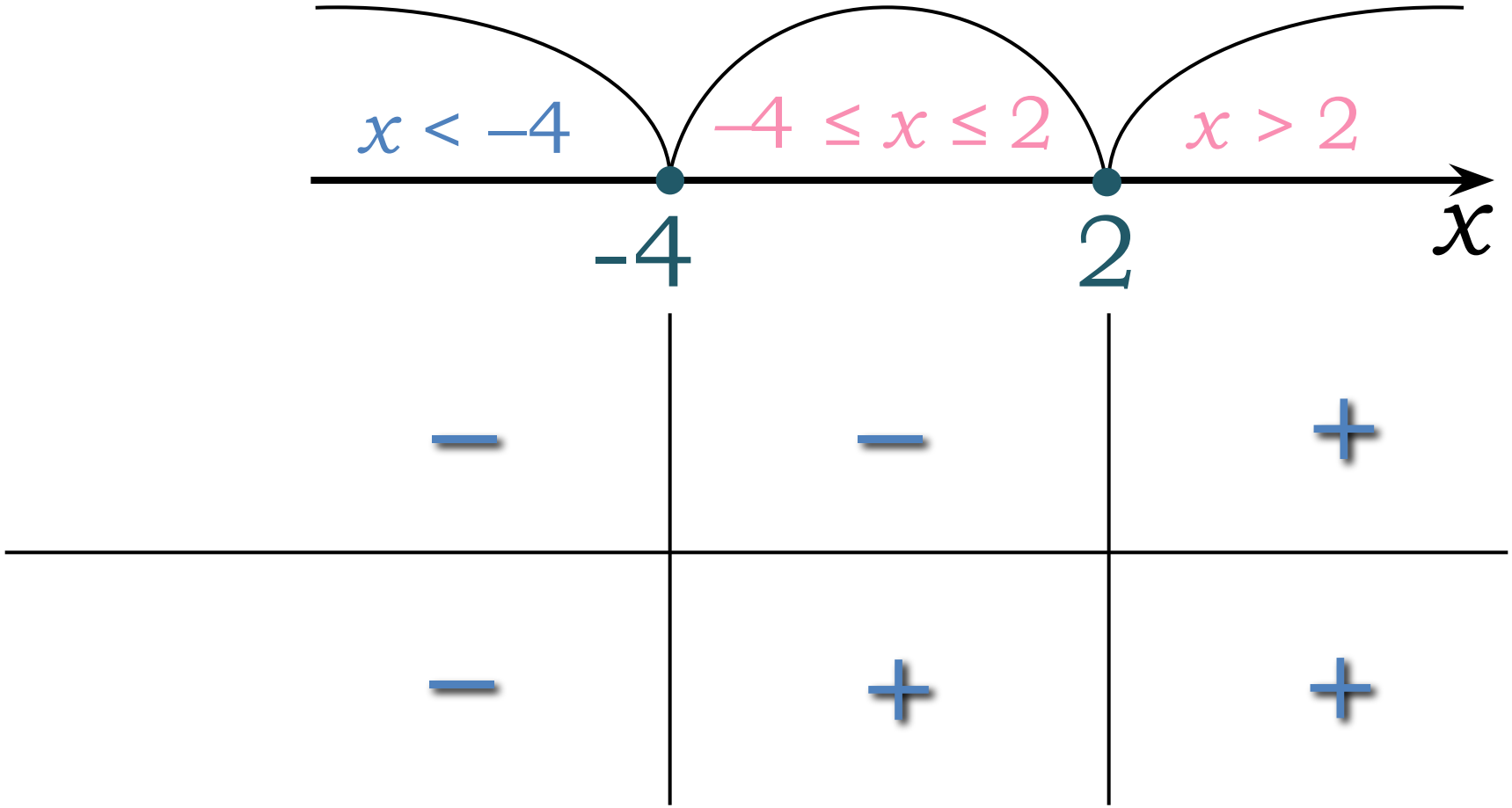
Пример: $|x - 2| = |3 - x|$

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 3 - x, \\ x - 2 = -3 + x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 5, \\ -2 = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}5, \\ x \in \varnothing; \end{array}\right.$$

Ответ: **2,5.**

Решить уравнение

$$2|x-2| - 3|x+4| = 1$$



Решить уравнение

$2|x-2|-3|x+4|=1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-4,\\ 2(-x+2)-3(-x-4)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}-4\le x\le 2,\\ 2(-x+2)-3(x+4)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ 2(x-2)-3(x+4)=1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-4,\\ x=-15;\end{cases}\\ \begin{cases}-4\le x\le 2,\\ x=-1{,}8;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x=-17.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: **–15; –1,8.**

Примеры
(решить самостоятельно)

1) $|x^2 + 3x| = 2(x + 1)$
2) $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$
3) $|2x + 8| - |x - 5| = 12$

1) <u>*Ответ:*</u> $1; (-5 + \sqrt{17})/2.$
2) <u>*Ответ:*</u> $1; 3.$
3) <u>*Ответ:*</u> $[2; +\infty)$

Домашняя работа

§5 читать, №5.1, 5.11(А), 5.13-5.15