Модуль действительного числа.
Решение уравнений с модулем

Понятие модуля

***Абсолютной величиной* (модулем) действительного числа *а* называется само число *а*, если оно *неотрицательное*, и число, противоположное *а*, если *а* –*отрицательное*.**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x \geq 1{,}5; \\ -2x+3, & \text{если } x < 1{,}5. \end{cases}$$

Свойства модуля

$1^\circ \quad |a| = |-a|$

$2^\circ \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$3^\circ \quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},$ где $b \neq 0$

$4^\circ \quad |a + b| = |a| + |b|,$ если $a \geq 0,\ b \geq 0$

$5^\circ \quad |a| + |b| = a + b,$ если $a \geq 0,\ b \geq 0$

Свойства модуля

$6^\circ \quad |a - b| = |a| + |b|, \quad \textit{если} \quad ab \leq 0$

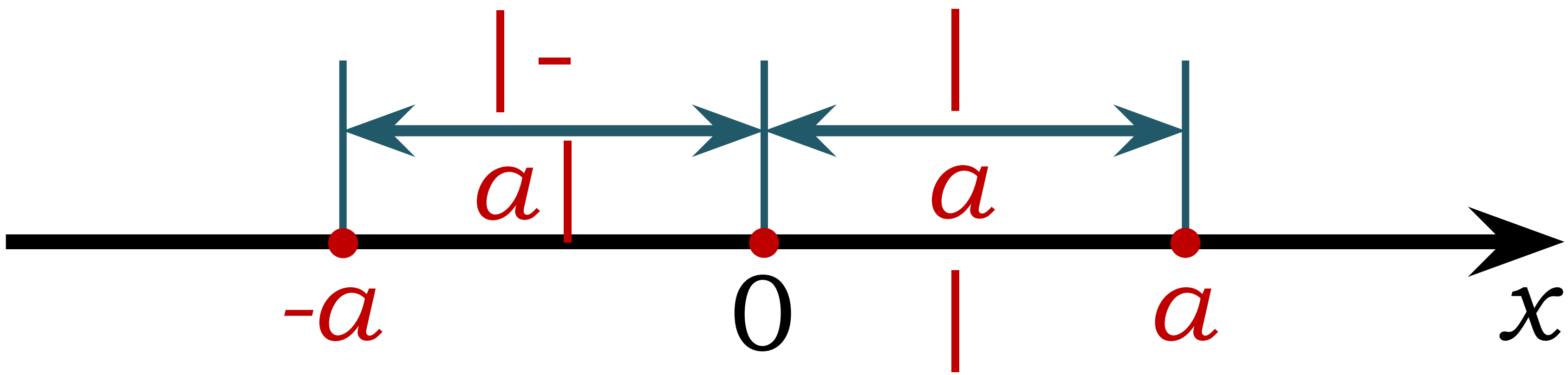
$7^\circ \quad |a|^2 = a^2$

$8^\circ \quad |a| - |b| \geq 0, \quad \textit{если} \quad a^2 - b^2 \geq 0$

$9^\circ \quad \sqrt{a^2} = |a|$

$10^\circ \quad |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

Геометрическая интерпретация модуля



Это ***расстояние*** *от начала отсчета до точки, изображающей число.*

Примеры

Раскрыть модули:

1) $|p-3|$;

2) $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$;

3) $|\sqrt{5}-2|$;

4) $|1-\sqrt{2}|$;

5) $|x^2|$;

6) $|x^4+1|$;

7) $\sqrt{(a-3)^2}, \quad a \geq 3$;

8) $\sqrt{(b-4)^2}, \quad b < 4$;

9) $\sqrt{m^2-2m+1}, \quad m < 1$.

Решение уравнений вида
$|f(x)| = a$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

Пример: $|x - 8| = 5$

$$\left[\begin{array}{l} x - 8 = 5, \\ x - 8 = -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 13, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

***Ответ*: 3; 13.**

Решение уравнений вида

$|f(x)| = a$

$|2x - 3| = 4$ $\quad x_1 = 3{,}5; \; x_2 = -0{,}5$

$|5x + 6| = 7$ $\quad x_1 = 0{,}2; \; x_2 = -2{,}6$

$|9 - 3x| = 6$ $\quad x_1 = 1; \; x_2 = 5$

$|4x + 2| = -1$ $\quad x \in \varnothing$

$|8 - 2x| = 0$ $\quad x = 4$

$|10x + 3| = 16$ $\quad x_1 = 1{,}3; \; x_2 = -1{,}9$

$|24 - 3x| = 12$ $\quad x_1 = 12; \; x_2 = 4$

$|2x + 30| = 48$ $\quad x_1 = 9; \; x_2 = -39$

Решение уравнений вида
$|f(x)| = g(x)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

или

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

Пример: $|3x-10| = x-2$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-10=x-2,\\ x-2\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-10=-(x-2),\\ x-2\geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=8,\\ x\geq 2;\end{cases}\\ \begin{cases}4x=12,\\ x\geq 2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: **3; 4.**

Решение уравнений вида
$|f(x)| = |g(x)|$

$$\left[\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ f(x) &= -g(x). \end{aligned}\right.$$

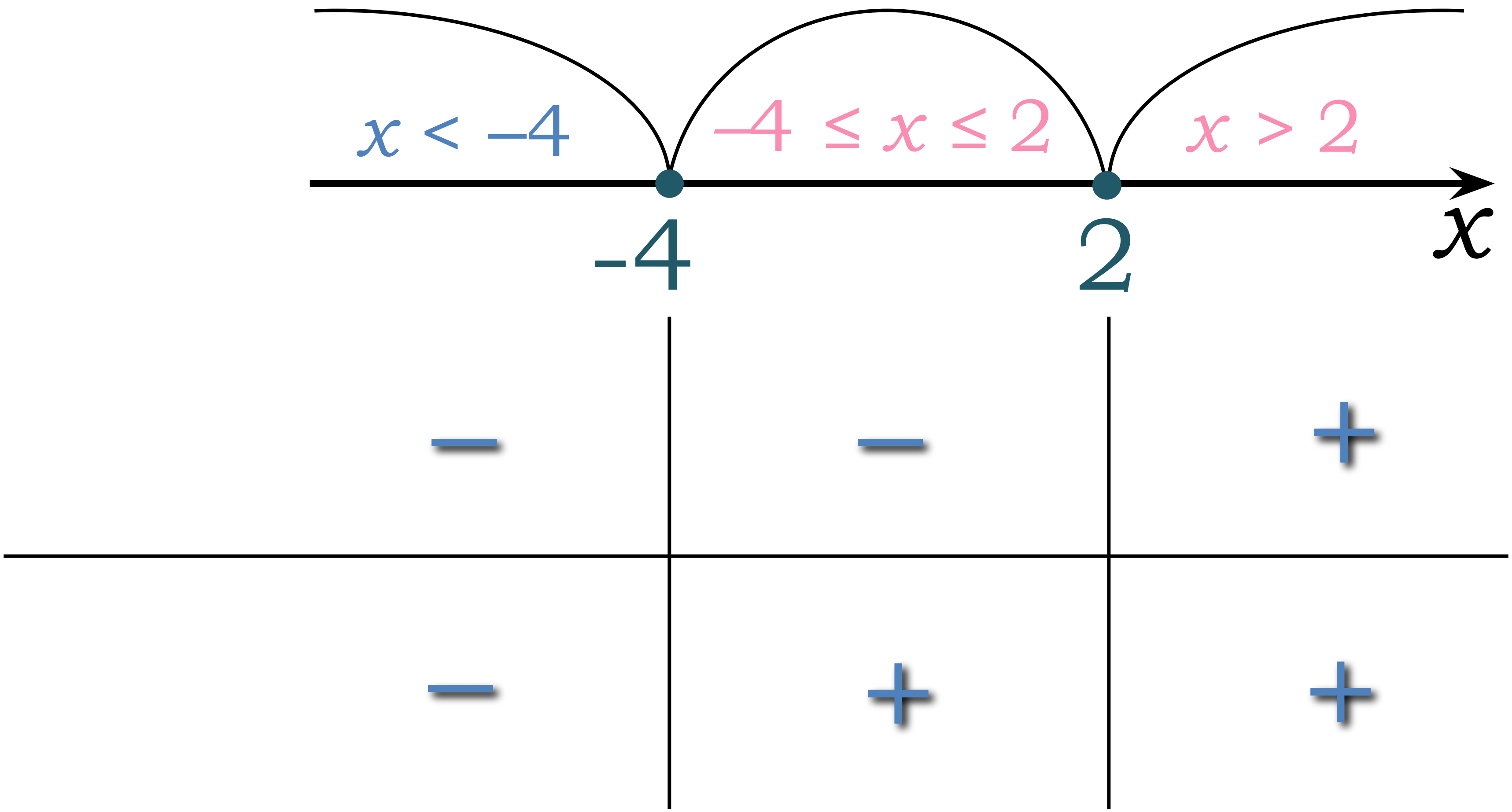
Пример: $|x-2| = |3-x|$

$$\left[\begin{aligned} x-2 &= 3-x, \\ x-2 &= -3+x; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 2x &= 5, \\ -2 &= -3; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 2{,}5, \\ x &\in \varnothing; \end{aligned}\right.$$

Ответ: **2,5.**

Решить уравнение

$$2|x-2|-3|x+4|=1$$



Решить уравнение

$2|x-2|-3|x+4|=1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4, \\ 2(-x+2)-3(-x-4)=1; \end{cases} \\ \begin{cases} -4\le x\le 2, \\ 2(-x+2)-3(x+4)=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ 2(x-2)-3(x+4)=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4, \\ x=-15; \end{cases} \\ \begin{cases} -4\le x\le 2, \\ x=-1{,}8; \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x=-17. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>*Ответ*</u>**:** ***–15; –1,8.***

Примеры
(решить самостоятельно)

1) $|x^2 + 3x| = 2(x + 1)$
2) $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$
3) $|2x + 8| - |x - 5| = 12$

1) *Ответ:* $1; (-5 + \sqrt{17})/2$.
2) *Ответ:* $1; 3$.
3) *Ответ:* $[2; +\infty)$

Домашняя работа

§5 читать, №5.1, 5.11(А), 5.13-5.15