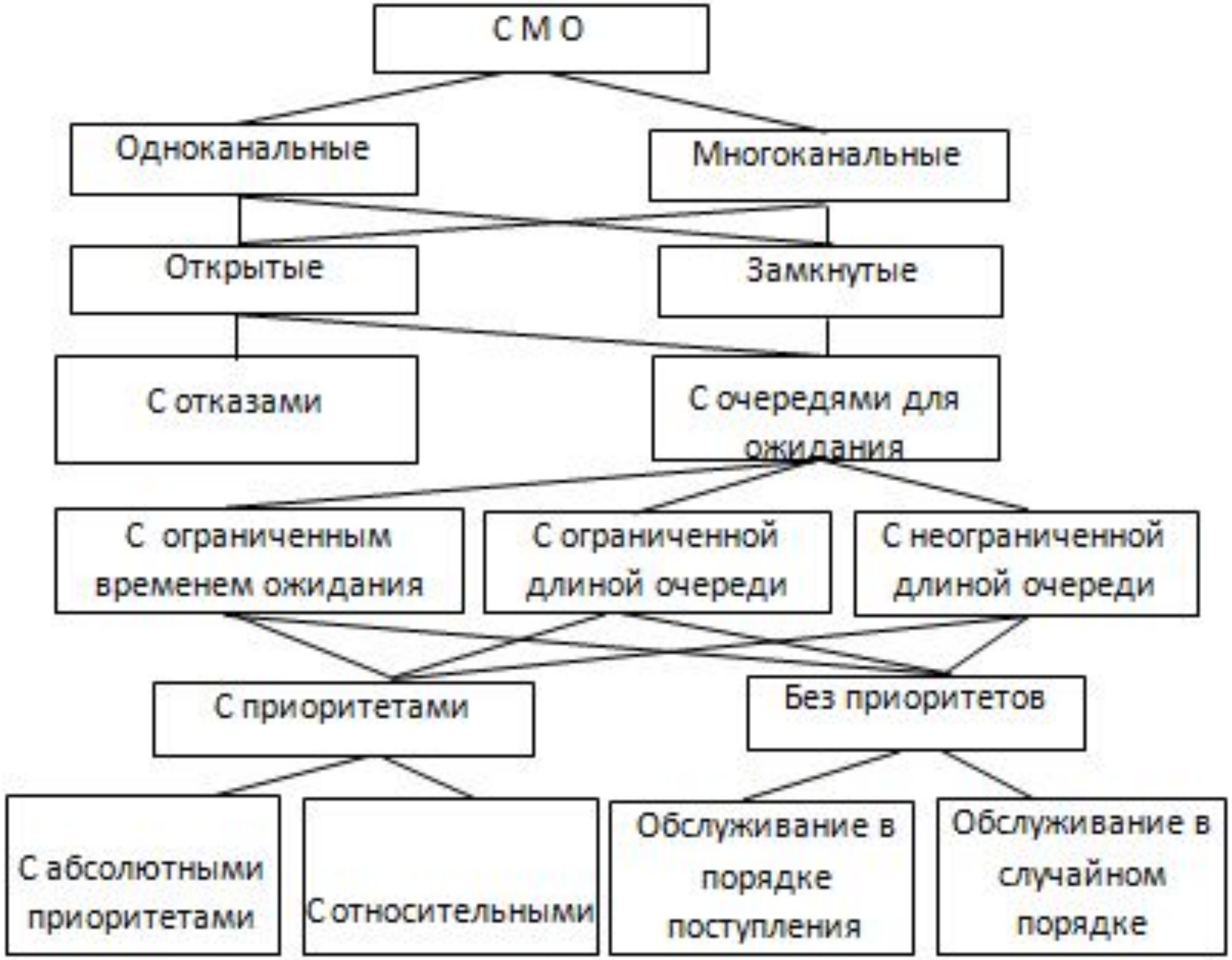
Тема. Системы массового обслуживания

1. **Основные понятия. Классификация СМО**
2. Потоки событий
3. Характеристики СМО
4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний
5. Процесс гибели и размножения

Классификация СМО



3. Характеристики СМО

– среднее число заявок А, обслуживаемых СМО в единицу времени, или *абсолютная пропускная способность* СМО;

– вероятность обслуживания заявки Q или *относительная пропускная способность* СМО; $Q = A/\lambda$;

– вероятность отказа $P_{отк}$, т.е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена и получит отказ; $P_{отк} = 1 - Q$;

– среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) $\bar{z}$;

– среднее число заявок в очереди $\bar{r}$;

– среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) $\bar{t}_{сист}$;

– среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$;

– среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

СМО называется открытой, если интенсивность поступающего на нее потока заявок не зависит от состояния самой СМО. Для любой открытой СМО в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью *формулы Литтла:*

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda \,,$$

где λ – интенсивность потока заявок.

Аналогичная формула (называемая также формулой Литтла) связывает среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ и среднее число $\bar{r}$ заявок в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda \,.$$

Аналогично универсальное значение для открытых СМО имеет формула, выражающая среднее число занятых каналов $\bar{k}$ через абсолютную пропускную способность А:

$$\bar{k} = \text{А}/\mu \,,$$

где $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$ – интенсивность потока обслуживания.

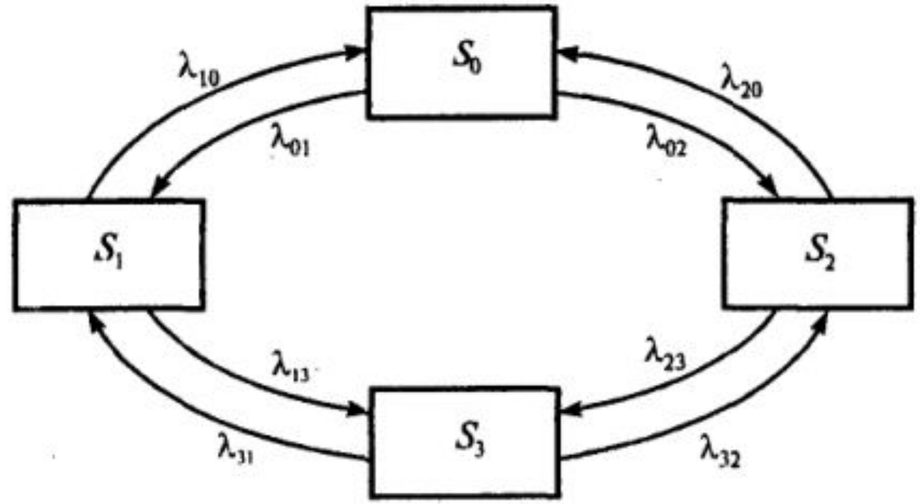
4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

Сформулируем правило составления уравнений Колмогорова. *В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).*

Пример



$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t)=1.$$

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_2 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3. \end{cases}$$

Система уравнений для нахождения предельных вероятностей

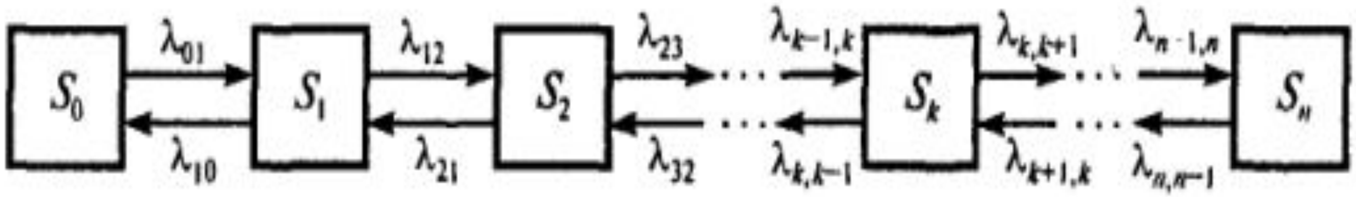
$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases}$$

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как *функции времени*. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в *предельном стационарном режиме*, т.е. при $t \to \infty$, которые называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют*.

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*. Например, если предельная вероятность состояния S_0, т.е. $p_0=0,5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

5. Процесс гибели и размножения



$$\begin{cases} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k+1}p_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n+1}p_n. \end{cases}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0.$$

5.1. **Простейшая СМО с отказами** (задача Эрланга).

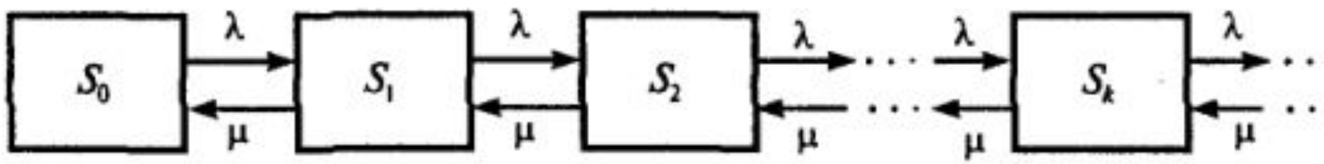
На *n*-канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность потора обслуживания μ. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди оно совпадает с числом занятых каналов):

- S_0 – СМО свободна;
- S_1 – занят один канал, остальные свободны;
- ...;
- S_k – занято *k* каналов, остальные свободны ($1 \le k \le n$);
- …;
- S_n – заняты все *n* каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \text{ где } \rho = \lambda/\mu$$

5.2. СМО с неограниченной очередью



Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = 1 - \rho\,; \quad p_k = \rho^k (1 - \rho), \quad (k = 1, 2 \ldots),$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

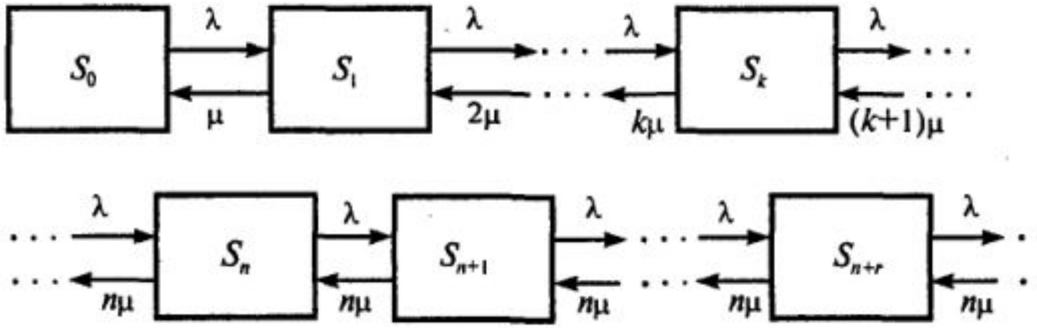
Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda\,; \quad Q = 1\,; \quad P_{отк} = 0\,;$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1-\rho}\,; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}\,; \quad \bar{t}_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}\,; \quad \bar{t}_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}\,;$$

$$\bar{k} = \lambda/\mu = \rho\,.$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью



Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\frac{1}{1-\chi}\right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \quad (1 \le k \le n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \quad (r \ge 1).$$

С помощью функций $P(m,a)$ и $R(m,a)$ эти формулы могут быть приведены к виду

$$p_k = \frac{P(k,\rho)}{R(n,\rho) + P(n,\rho)/(1-\chi)}, \quad (k = 0, \ldots, n);$$

$$p_{n+r} = \chi^r p_n, \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}p_0}{n \cdot n!(1-\chi)^2} = \frac{\chi p_n}{(1-\chi)^2};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho;$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda.$$

5.3. Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди

Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\frac{1-\chi^m}{1-\chi}\right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \quad (1 \le k \le n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \quad (1 \le r \le m),$$

где $\chi = \rho/n = \lambda/(n\mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda(1-p_{n+m}); \quad Q = 1-p_{n+m}; \quad P_{отк} = p_{n+m};$$

$$\bar{k} = \rho(1-p_{n+m});$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}p_0}{n \cdot n!}\frac{1-(m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k};$$

$$\bar{t}_{сист} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda.$$