

Тема. Системы массового обслуживания

1. Основные понятия. Классификация СМО
2. Потoki событий
3. Характеристики СМО
4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний
5. Процесс гибели и размножения

Классификация СМО



3. Характеристики СМО

- среднее число заявок A , обслуживаемых СМО в единицу времени, или *абсолютная пропускная способность* СМО;
- вероятность обслуживания заявки Q или *относительная пропускная способность* СМО; $Q = A/\lambda$;
- вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, т.е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена и получит отказ; $P_{\text{отк}} = 1 - Q$;
- среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) \bar{z} ;
- среднее число заявок в очереди \bar{r} ;
- среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) $\bar{t}_{\text{сист}}$;
- среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$;
- среднее число занятых каналов \bar{k} .

СМО называется открытой, если интенсивность поступающего на нее потока заявок не зависит от состояния самой СМО. Для любой открытой СМО в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью формулы Литтла:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda ,$$

где λ – интенсивность потока заявок.

Аналогичная формула (называемая также формулой Литтла) связывает среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ и среднее число \bar{r} заявок в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda .$$

Аналогично универсальное значение для открытых СМО имеет формула, выражающая среднее число занятых каналов \bar{k} через абсолютную пропускную способность A :

$$\bar{k} = A / \mu ,$$

где $\mu = 1/t_{\text{обсл}}$ – интенсивность потока обслуживания.

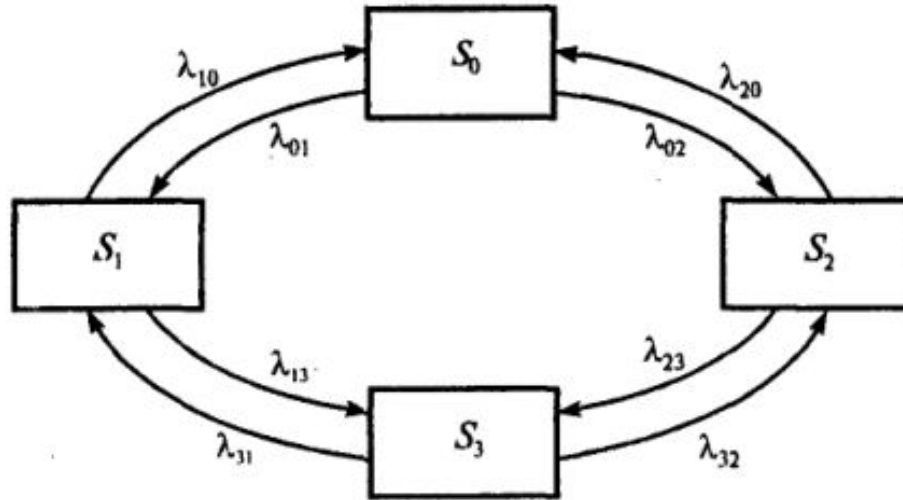
4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Вероятностью i -го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i . Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^3 p_i(t) = 1.$$

Сформулируем правило составления уравнений Колмогорова. В левой части каждого из них стоит производная вероятности i -го состояния. В правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i -го состояния).

Пример



$$\sum_{i=0}^3 p_i(t) = 1.$$

Система уравнений для
нахождения предельных
вероятностей

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0, \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3. \end{cases}$$

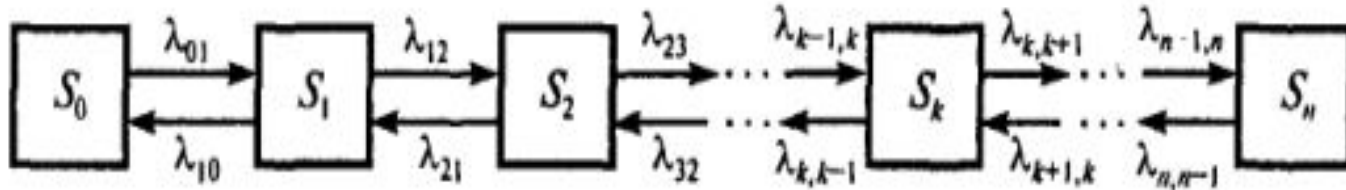
$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases}$$

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как *функции времени*. Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в *предельном стационарном режиме*, т.е. при $t \rightarrow \infty$, которые называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют*.

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*. Например, если предельная вероятность состояния S_0 , т.е. $p_0 = 0,5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0 .

5. Процесс гибели и размножения



$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1, \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2, \\ \dots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k+1} p_k, \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n+1} p_n. \end{array} \right.$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0.$$

5.1. Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга).

На n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность потока обслуживания μ .

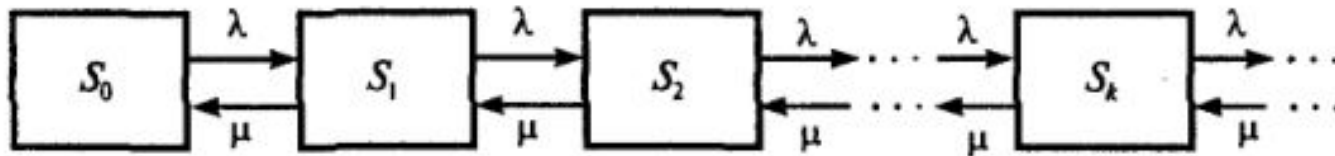
Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди оно совпадает с числом занятых каналов):

- S_0 – СМО свободна;
- S_1 – занят один канал, остальные свободны;
- ...;
- S_k – занято k каналов, остальные свободны ($1 \leq k \leq n$);
- ...;
- S_n – заняты все n каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right\}^{-1} ; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \text{где } \rho = \lambda/\mu$$

5.2. СМО с неограниченной очередью



Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = 1 - \rho; \quad p_k = \rho^k (1 - \rho), \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

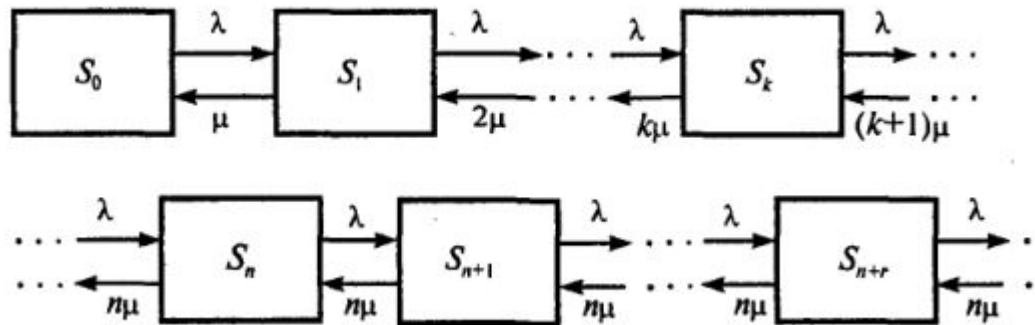
Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda; \quad Q = 1; \quad P_{\text{отк}} = 0;$$

$$\bar{z} = \frac{\rho}{1 - \rho}; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)};$$

$$\bar{k} = \lambda / \mu = \rho.$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью



Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1-\chi} \right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad (r \geq 1).$$

С помощью функций $P(m, a)$ и $R(m, a)$ эти формулы могут быть приведены к виду

$$p_k = \frac{P(k, \rho)}{R(n, \rho) + P(n, \rho)/(1-\chi)}, \quad (k = 0, \dots, n);$$

$$p_{n+r} = \chi^r p_n, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\chi)^2} = \frac{\chi p_n}{(1-\chi)^2};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho;$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda.$$

5.3. Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди

Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - \chi^m}{1 - \chi} \right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \quad (1 \leq r \leq m),$$

где $\chi = \rho/n = \lambda / (n\mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda(1 - p_{n+m}); \quad Q = 1 - p_{n+m}; \quad P_{\text{отк}} = P_{\text{отк}};$$

$$\bar{k} = \rho(1 - p_{n+m});$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{1 - (m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1 - \chi)^2};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k};$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda.$$