Физико-технические основы электроэнергетики

Лекция 2

Профессор Е.Ю.Клименко

Стационарное электрическое поле

Уравнения Максвелла

$$div\,\boldsymbol{D} = \rho$$
$$rot\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

***Первое уравнение:* электрический заряд порождает электрическое поле**

***Второе уравнение:* изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле**

$$div\,\boldsymbol{B} = 0$$
$$rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

***Третье уравнение:* магнитных зарядов не существует**

***Четвертое уравнение:* электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле**

Исключив зависимость от времени, получаем:

$$div\,\boldsymbol{D} = \rho$$
$$rot\,\boldsymbol{E} = 0$$

Из второго следует, что $\boldsymbol{E}$ можно представить в виде $\boldsymbol{E} = -grad\,\varphi$

φ - скалярный потенциал

Минус выбран для того, чтобы выполнить общепринятое условие: «вектор $\boldsymbol{E}$ направлен от положительного заряда к отрицательному»

Электростатическая энергия

Точечный заряд – конечный заряд, сконцентрированный в столь малой области, что ее размерами можно пренебречь по сравнению с другими характерными размерами рассматриваемой задачи.

Сила, действующая на заряд, равна $F = q\,\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$- поле, создаваемое другими стационарно распределенными зарядами.

Работа, совершаемая над зарядом при перемещении из точки $\boldsymbol{r}_1$ в другую точку $\boldsymbol{r}_2$ равна

$$W = q\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{s} = -\int_{r_1}^{r_2} grad\varphi\; d\boldsymbol{s} = q[\varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2)]$$

Работа, произведенная при медленном перемещении заряда по замкнутому пути равна нулю. Поля, в которых работа зависит только от конечных положений, но не от пути, называются консервативными

Потенциал определен с точностью до постоянной φ_0, поскольку

$$rot\ grad(\varphi + \varphi_0) = 0$$

Устраним неоднозначность, договорившись, что потенциал равен работе, совершаемой при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в точку (x, y, z)

$$\varphi(x, y, z) = -\int_{\infty}^{x,y,z} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r}$$

Поверхности $\varphi(x, y, z) = const$ называют эквипотенциальными

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0$$

Вектор $\boldsymbol{\tau} = (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k})$ лежит на эквипотенциальной поверхности

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ - компоненты градиента $grad\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\boldsymbol{E}$

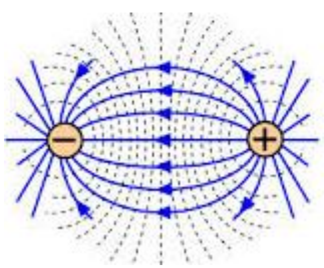
То, что $d\varphi = -(\boldsymbol{E\tau}) = 0$ означает, что электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.
Линии, касающиеся в каждой точке $\boldsymbol{E}$ названы силовыми.
Чтобы малое смещение вдоль силовой линии $ds = \boldsymbol{i}dx' + \boldsymbol{j}dy' + \boldsymbol{k}dz'$
Совпадало с $\boldsymbol{E}$ должно быть $E_x = \lambda dx', E_y = \lambda dy'\ E_z = \lambda dz'$

Дифференциальные уравнения силовых линий

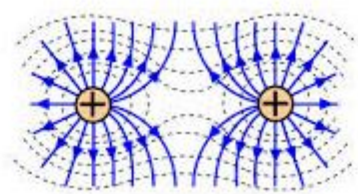
$$\frac{dx'}{E_x(x',y',z')} = \frac{dy'}{E_y(x',y',z')} = \frac{dz'}{E_z(x',y',z')}$$

Примеры силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

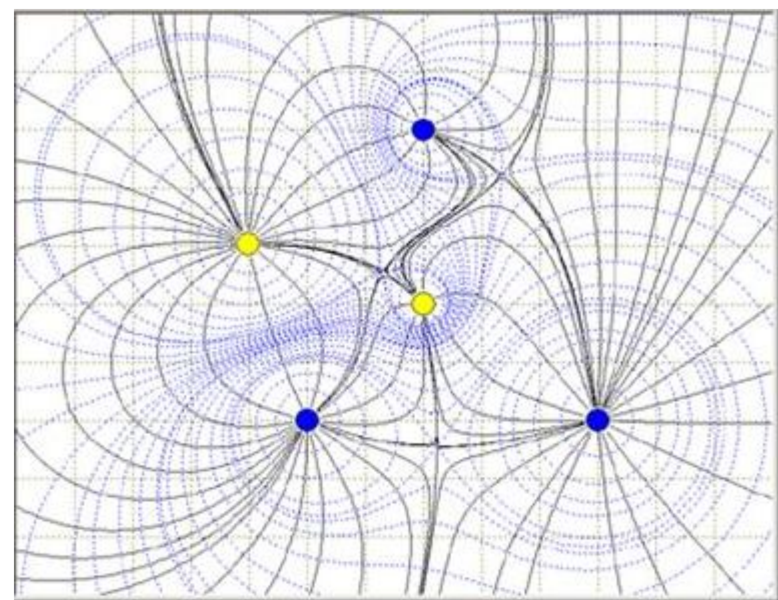
1. Два точечных заряда разных знаков.
2. Два одинаковых точечных заряда
3. Три отрицательных и два положительных заряда



1



2



3

Соотношение между компонентами ***D*** и ***E*** обычно линейны:

$$D = \varepsilon E = \varepsilon\, grad\varphi$$

Получаем связь потенциала с зарядами:

$$div(\varepsilon\, grad\varphi) = \varepsilon\Delta\varphi + grad\ \varepsilon\ grad\varphi = -\rho$$

В однородной среде потенциал описывается уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\varrho$$

В точках, где нет зарядов это уравнение сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

Основная задача электростатики

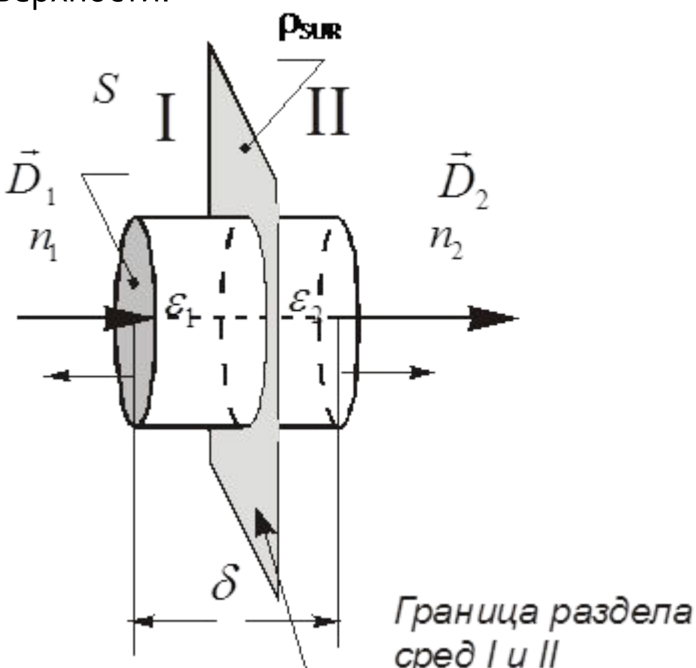
Определение функции $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющей в каждой точке пространства уравнению Пуассона, а на заданных поверхностях – граничным условиям.

Граничные условия

Рассматривается малый, (такой что на каждом из торцов индукция не меняется) цилиндр высотой $\delta \to 0$
Пусть ε плавно меняется по в ,
а заряд сохраняется. Когда боковая поверхность уменьшится до нуля

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \omega$$

ω - плотность зарядов на поверхности.

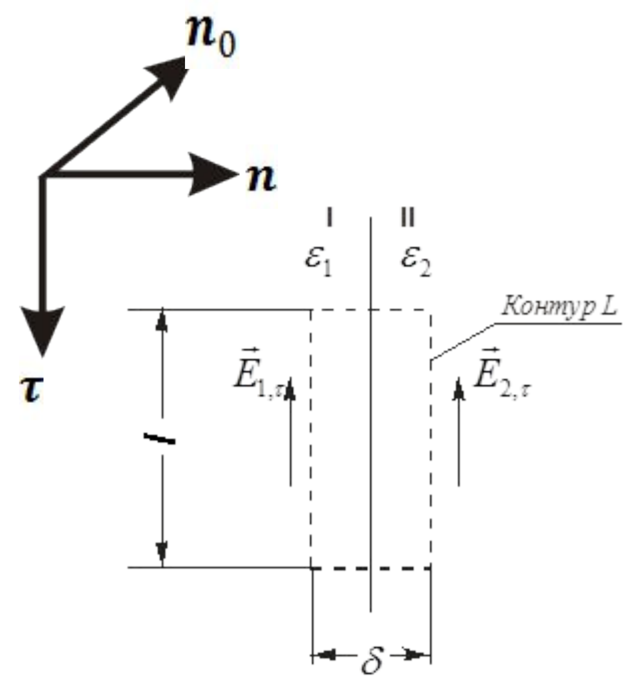


Наличие зарядов на поверхности приводит к скачку индукции, равном поверхностной плотности заряда в кулонах на кв. метр

Рассмотрим контур $\boldsymbol{L}$ с нормалью $\boldsymbol{n}_0$
$\boldsymbol{n}$ - нормаль к поверхности.
$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n}$ -вектор вдоль $\boldsymbol{E}$.
Проекция $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{\tau}$

$$(\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E})$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = \boldsymbol{0}$$



При переходе через поверхность разрыва тангенциальная компонента эл. поля непрерывна

Граничные условия для потенциала

Из $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \omega$ следует $\varepsilon_2(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_2 - \varepsilon_1(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_1 = -\omega$

Из $\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1}) = \boldsymbol{0}$ следует $(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})_2 - (\frac{\partial\varphi}{\partial\tau})_1 = 0$

Из консервативности поля следует непрерывность потенциала на границе $\varphi_1 = \varphi_2$

Лапласиан в различных системах координат

В декартовых

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

В цилиндрических

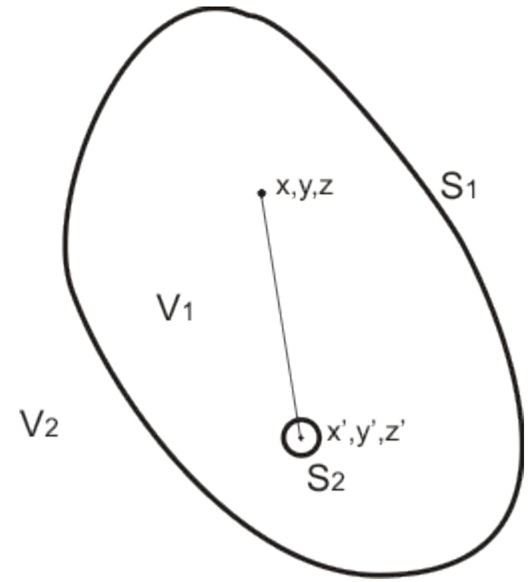
$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

В сферических

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Определение поля по заданному распределению зарядов

Потенциал в заданной точке (x',y',z') внутри объема V можно выразить через объемный интеграл по объему V и поверхностный интеграл по S.
Заряд распределен в объеме с конечной плотностью $\rho(x,y,z)$.
Воспользуемся теоремой Грина



$$\int_V (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)dv = \int_s (\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})ds$$

Примем

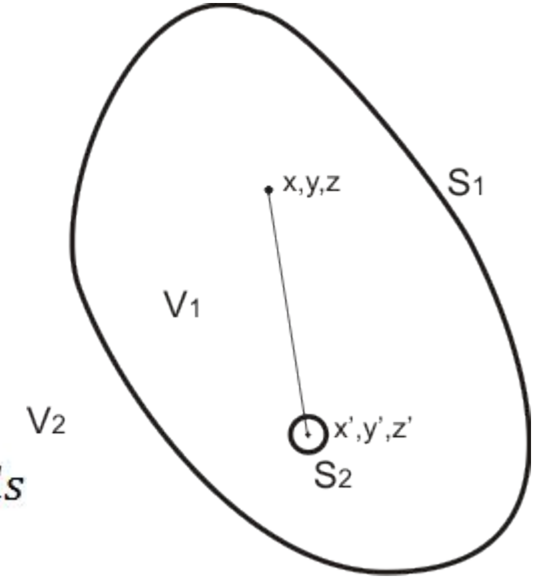
$$\psi[(x'-x),(y'-y),(z'-z)] = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$, но в точке $r=0$ особенность. Избавимся от нее, окружив точку (x',y',z') малой сферой S_2.

Подставляя ψ в уравнение Грина получим

$$\int_V \left(\frac{\Delta\varphi}{r}\right) dv = \int_{S1+S2} [\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)] ds$$



На сферической поверхности $S2$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r_2^2}$$ поэтому

$$\int_{S2} [\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)] ds = -\frac{1}{r_2}\int_{s2} \frac{\partial\varphi}{\partial r} ds - \frac{1}{r_2^2}\int_{s2} \varphi ds$$

Если заменить φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ средними значениями, то получим

$$-\frac{4\pi r_2^2}{r_2}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} - \frac{4\pi r_2^2}{r_2^2}\overline{\varphi} \to -4\pi\varphi(x',y',z')$$ при $r_2 \to 0$. Это значение

интеграла по $S2$. Тогда

$$\varphi(x',y',z') = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\Delta\varphi}{r}\right) dv + \int_{S1} [\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)] ds$$

Можем выразить потенциал через плотность заряда (без особенностей)

$$\varphi(x',y',z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \left(\frac{\rho}{r}\right) dv + \int_{S1} [\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)] ds$$

Если в $V1$ нет зарядов, то $$\varphi(x',y',z') = \int_{S1} [\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)]ds$$

Это значит, что интеграл по поверхности выражает вклад в потенциал в точке (x',y',z') от зарядов, расположенных вне объема $V1$.
Если вне этого объема нет зарядов, то поверхностный интеграл должен равняться нулю.

Интеграл $\varphi(x',y',z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \left(\frac{\rho}{r}\right)dv$ частное решение уравнения Пуассона.

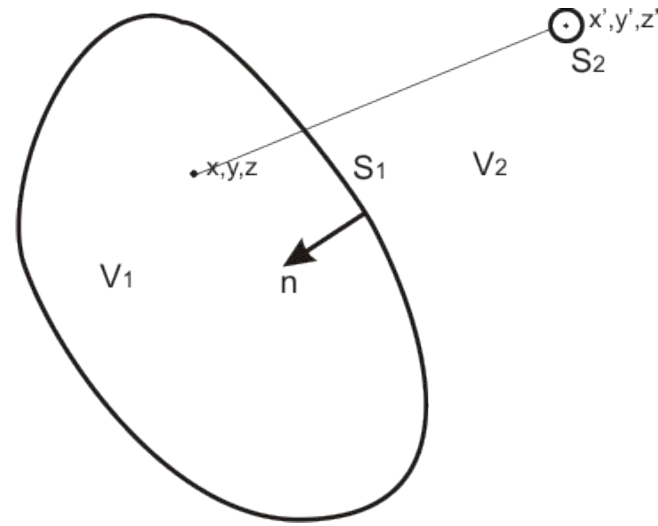
Если точка (x',y',z') лежит вне области, содержащей заряды на расстоянии R от какой-либо точки этого объема то при R много большем линейных размеров этой области

$$\varphi(x',y',z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon R}\int_V \rho dv = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{R}$$

Определение: Потенциальная функция регулярна на бесконечности, если при $R \to \infty$ произведение $R\varphi$ остается ограниченным.

На больших расстояниях распределение потенциала зависит только от R
$\boldsymbol{E}$ направлен по радиусу и $R^2|E|$ тоже ограничено.

Поверхность S1 делит пространство на две области внутреннюю V1 и внешнюю V2 . Теорему Грина можно применить в этом случае, считая , что S2 удалена на бесконечность.



$$\int_{V_2} (\psi \Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) dv = \int_{S_1+S_2} (\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}) ds$$

Величины $\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ и $\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}$ исчезают, как $1/r^3$ и интеграл по S2 стремится к нулю

$$\int_{V_2} (\psi \Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) dv = \int_{S_1} (\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}) ds$$

Если в области V2 нет зарядов, то повторив преобразования, проделанные выше получим

$$\varphi(x', y', z') = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

и
$$\boldsymbol{E}(x', y', z') = -grad\ \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\boldsymbol{r}$$

Поле точечного заряда обратно пропорционально квадрату расстояния и направлено по радиусу от заряда q, если заряд положителен.

Так получили закон Кулона!

Точка r=0 особая. Полагать, что где-то в природе поле становится бесконечным никаких оснований нет. Это лишь математика.

Если в каком-то объеме распределен электрический заряд с плотностью $\rho(x', y', z')$, то потенциал и электрическое поле можно получить инте

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_V \frac{\rho(x', y', z')}{r} dv$$

$$\boldsymbol{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_V \rho(x', y', z') grad\left(\frac{1}{r}\right) dv$$

Может возникнуть вопрос, можно ли использовать эти формулы внутри объема с зарядом, поскольку там возникают особенности при r=0.

Интегралы оказываются сходящимися. Если особую точку окружить сферой, то при уменьшении ее радиуса знаменатель стремится к нулю, как квадрат радиуса, а заряд, как его куб, поэтому вклад в поле особой точки оказывается нулевым.

Спасибо за внимание

Электрическое поле.