

10.1В Аксиомы стереометрии. Параллельность в пространстве

В этом разделе ты узнаешь:

- аксиомы стереометрии и их следствия;
- признаки и свойства параллельных прямых, свойства и признаки параллельности прямой и плоскости.

Ты научишься:

- применять все теоремы, аксиомы и их следствия, свойства и признаки при решении задач;
- находить угол между пересекающимися и скрещивающимися прямыми;
- уметь изображать тетраэдр, параллелепипед и их элементы на плоскости;
- строить сечения тетраэдра и параллелепипеда в несложных случаях.



Школа: НИШ ХБН г. Петропавловск

Класс: 10

Раздел долгосрочного плана:

10.1В Аксиомы стереометрии. Параллельность в пространстве

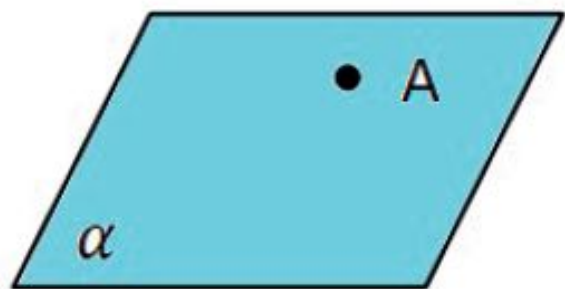
Тема урока	Аксиомы стереометрии и их следствия. Простейшие стереометрические построения.
Цели обучения	10.3.1.1 знать и применять аксиомы стереометрии и их следствия; 10.5.2.1 владеть техникой выполнения простейших стереометрических чертежей;

В стереометрии основными фигурами являются точки, прямые и плоскости.
Рассмотрим обозначение основных геометрических фигур:

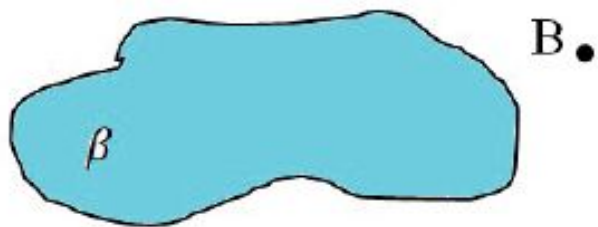
На плоскости В пространстве	Точка	Прямая
	<div data-bbox="586 442 917 628" style="text-align: center;"> </div> <p data-bbox="280 671 1095 799">Точки обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, \dots</p>	<div data-bbox="1554 414 2114 642" style="text-align: center;"> </div> <p data-bbox="1235 671 2433 871">Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, \dots или двумя заглавными латинскими буквами AC, AB, DK, \dots</p>

Плоскости в пространстве обозначаются строчными буквами греческого алфавита, такими как $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

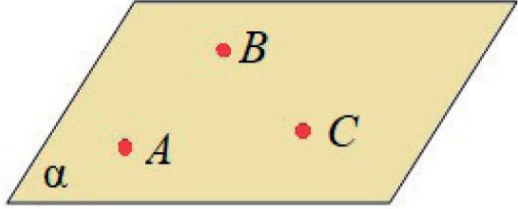
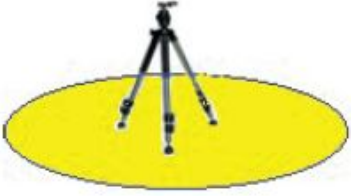
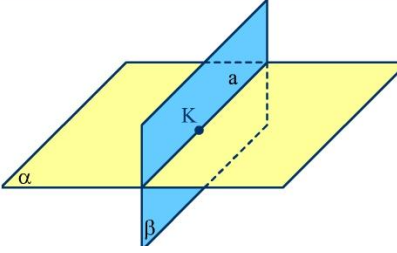

На рисунке изображена только часть плоскости, но представь ее неограниченно продолженной во все стороны. Плоскость будет изображена в виде параллелограмма или какой-нибудь другой плоской фигуры.



Если точка A лежит на плоскости α , то говорят, что плоскость α проходит через точку A , и пишут: $A \in \alpha$, а читают как «точка A принадлежит плоскости α ».



Если точка B не принадлежит плоскости β , то говорят, что плоскость β не проходит через точку B , и записывают: $B \notin \beta$, а читают как «точка B не принадлежит плоскости β ».

Формулировка аксиом	Геометрическая интерпретация	Наглядная иллюстрация
<p>С1. Через любые три точки, не принадлежащей одной прямой, проходит единственная плоскость.</p>	 <p>$A, B, C \subset \alpha$ Точки A, B, C принадлежат плоскости α.</p>	<p>Если ножки холодильника или тумбочки не по длине, то предмет или мебель стоит на трех ножках.</p> 
<p>С2. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через данную точку.</p>	 <p>$\alpha \cap \beta = a$ Если $K \in \alpha, K \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = a$</p>	<p>Пересечение двух смежных стен комнаты (например: плинтус, галтели...)</p>
<p>С3. Если две точки прямой лежат в плоскости, то сама прямая лежит в этой плоскости.</p>	 <p>$KE \subset \alpha$ Если $K \in \alpha, E \in \alpha$, то $KE \subset \alpha$.</p>	<p>Закрепленная к стене светодиодная лампа прямоугольной формы или предмет.</p> 

Эксперимент

На платформе разместите 4 столба так, чтобы их верхние точки образовывали плоскость (чтобы можно было перевернуть данную модель и все четыре столба касались поверхности пола). – МОДЕЛЬ СТОЛА

2.3 Прямая k пересекает стороны параллелограмма в двух точках. Верно ли, что прямая k лежит на плоскости параллелограмма?

2.4 Верно ли, что прямая лежит на плоскости, если две ее точки лежат на этой плоскости? Обоснуй свой ответ.

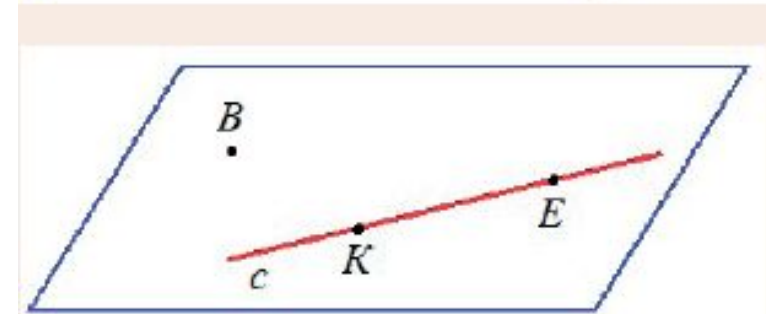
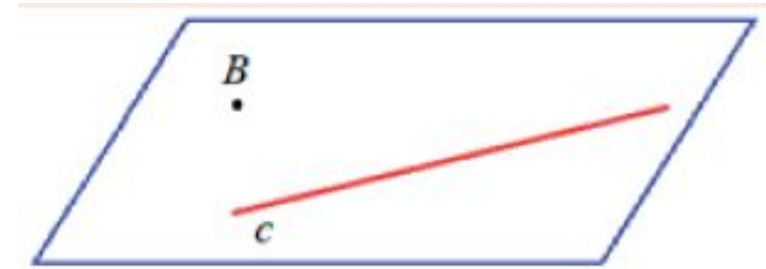
2.5 Концы диаметра окружности лежат на плоскости α . Верно ли, что все точки окружности принадлежат плоскости α ?

**Рассмотрим следующие теоремы,
которые являются следствиями из аксиом стереометрии.**

Теорема 1. Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство:

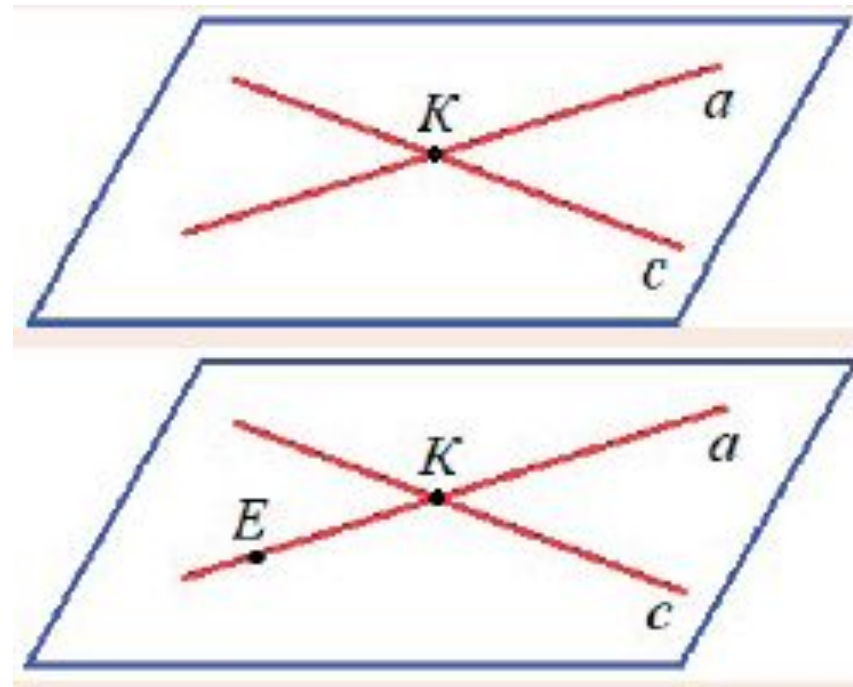
1. По условию $B \notin c$.
2. Отметим на прямой c точки K и E , значит, $K, E \in c$.
3. Точки B, K, E не лежат на одной прямой, следовательно, по аксиоме С1 можно провести плоскость α ($B \in \alpha, K \in \alpha, E \in \alpha$).
4. Точки K, E лежат на прямой c , значит, по Аксиоме С3: $c \subset \alpha$. Следовательно, плоскость α проходит через точку B и прямую c .
5. Единственность плоскости, проходящей через прямую c и точку B , следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую c и точку B , проходит через точки B, K, E . Следовательно, данная плоскость совпадает с плоскостью α , т.к. по аксиоме С1 через точки B, K и E проходит только одна



Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство:

1. По условию $a \cap c = K$ ($K \in a, K \in c$).
2. E — некоторая точка на прямой a ($E \in a$) не совпадающей точкой K .
3. Следовательно, по теореме 1 существует плоскость α , проходящая через точку E и прямую a .

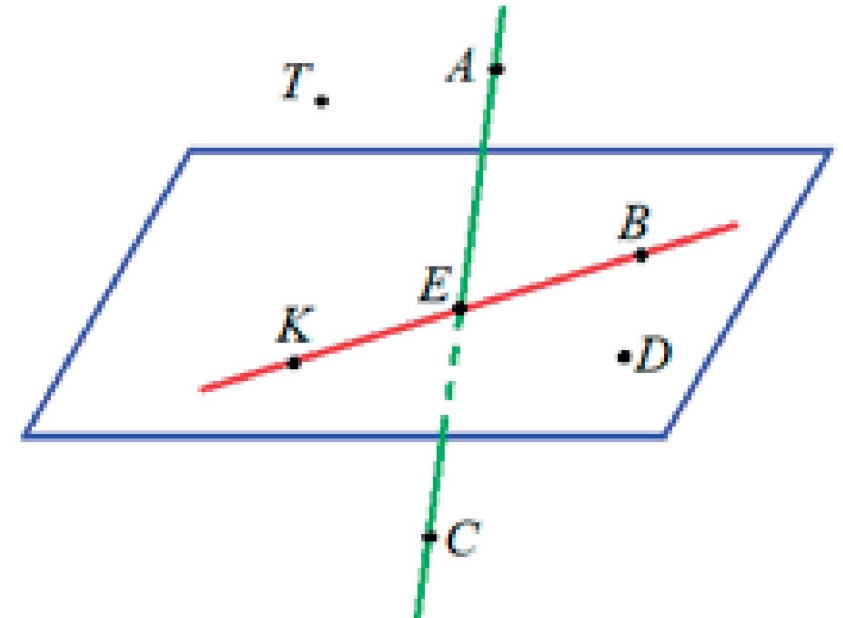


2.6 Докажи, что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

2.7 Диагонали прямоугольника лежат в плоскости α . Лежат ли вершины прямоугольника в плоскости α ?

2.8 Выбери верные утверждения (рис. 1).

1. Точки K, E, B лежат на одной прямой.
2. Точки K, E, D лежат на одной прямой.
3. Точки A, E, C лежат на одной прямой.
4. Точки K, E, B лежат на одной плоскости.
5. Точки T, E, B лежат на одной плоскости.
6. Точки K, C, D лежат на одной плоскости.
7. Точки E, B, D лежат на одной плоскости.
8. Прямые KB и AC пересекаются в точке E .
9. Прямая AC пересекается с плоскостью в точке E .

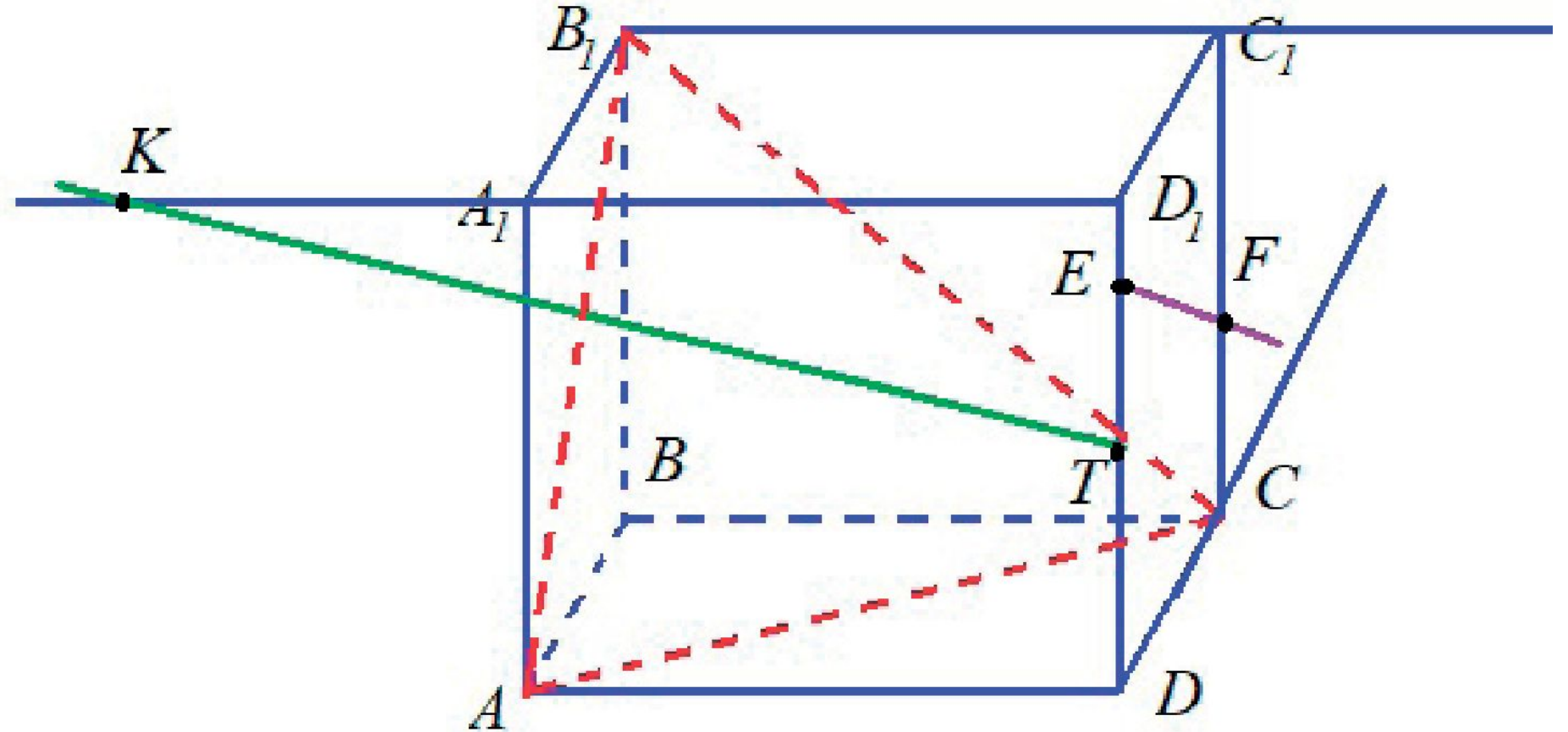


2.9 Докажи, что средняя линия и высота трапеции лежат в одной плоскости.

2.10 Докажи, что центр и хорда окружности лежат в одной плоскости.

2.11 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. По рисунку 2 определи:

- 1) прямые KD_1 и ET лежат на одной плоскости.
- 2) прямые EF и DC пересекаются в одной точке.
- 3) прямые $B_1 C_1$ и DC лежат на одной плоскости.
- 4) плоскости ABD и $C_1 D_1 D$ имеют общую точку D , они пересекаются по прямой
- 5) найди периметр треугольника $AB_1 C$, если ребро куба равно 2 см.



2.12 Две прямые a и b пересекаются в точке N . Докажи, что все прямые, не проходящие через точку N и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку N ?

2.13 Одна сторона и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в одной плоскости α .
Ответь на вопросы и обоснуй их.

1. Лежат ли вершины параллелограмма на плоскости α ?
2. Лежат ли прямые, проходящие через середины сторон параллелограмма, на плоскости α ?
3. Лежат ли прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей параллелограмма, на плоскости α .

2.14 Выполни чертеж и запиши краткую математическую запись утверждений.

1. Прямая KT лежит на плоскости α .
2. Прямая KT пересекает плоскость α .
3. Прямые PC и PB пересекают плоскость α в одной и той же точке.
4. Прямые PC и PB пересекают плоскость α в разных точках.
5. Плоскости α и β пересекаются по прямой c , плоскости α и γ также пересекаются по этой же прямой c .
6. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB , а плоскости α и γ пересекаются по другой прямой AC .
7. Плоскость α проходит через прямую a и точку A , не лежащую на прямой a , и пересекает прямую b в точке A .

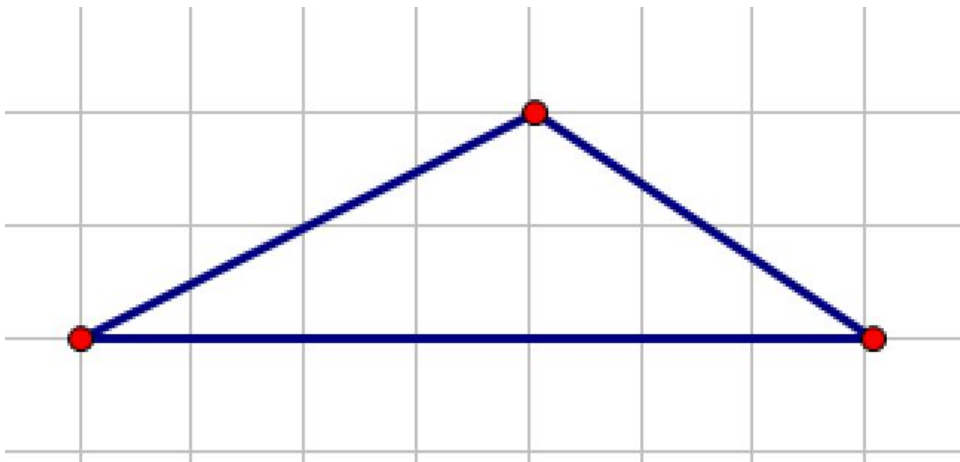
Внимание! При параллельном проектировании не сохраняются ни углы, ни длины отрезков, ни отношения длин неколлинеарных отрезков (то есть отрезков, которые не лежат на параллельных прямых, или на одной прямой). Поэтому глядя на изображение проекции мы не можем определить соотношение отрезков и углов.

При изображении стандартных геометрических тел на плоскости нужно следить за тем, чтобы ребра и диагонали были все видны и не накладывались друг на друга.

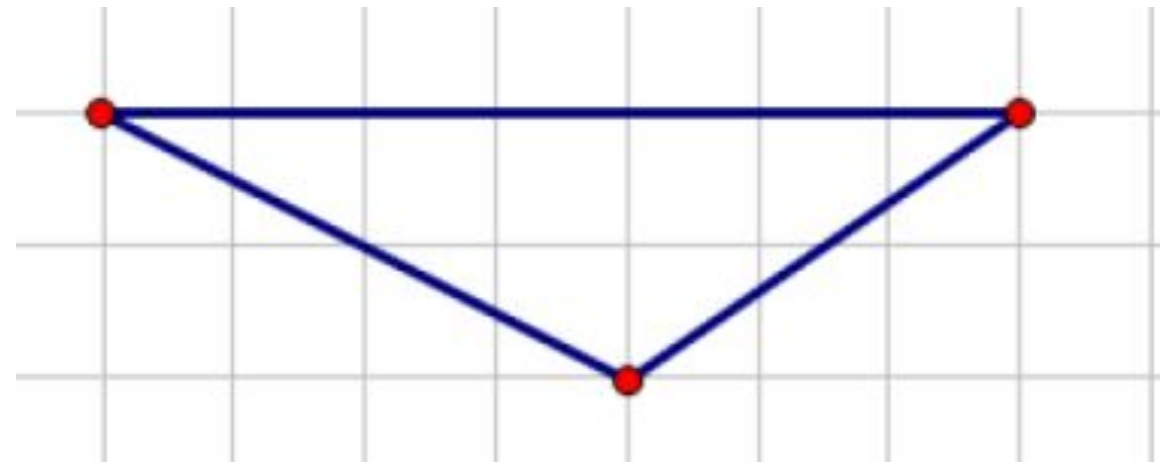
В общем случае удобно строить в такой последовательности.

1. Начинаем с основания фигуры.

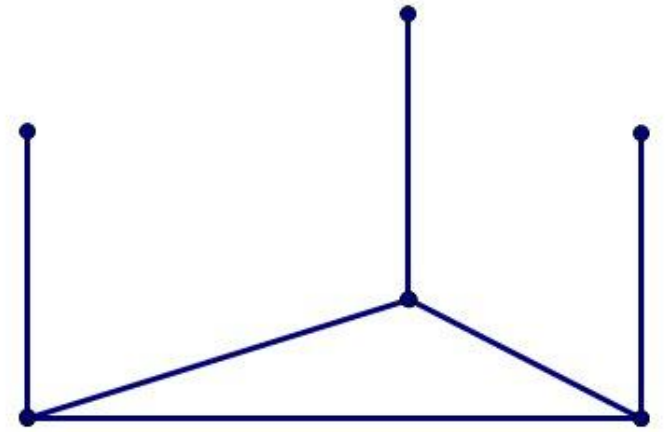
Если в основании треугольник, то вне зависимости от вида треугольника рисуем тупоугольный не равнобедренный треугольник, например, такой:



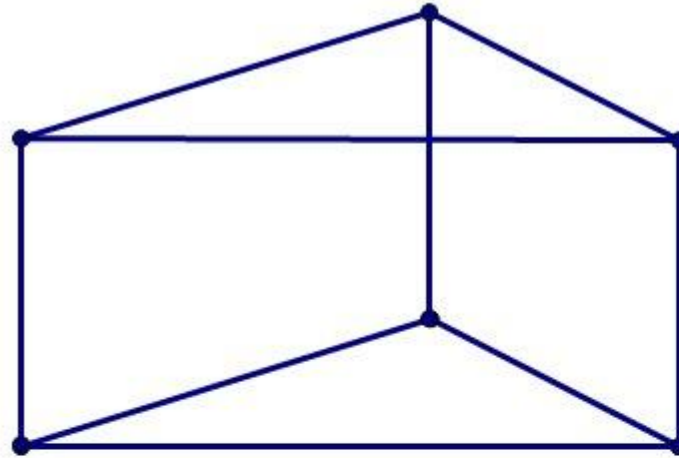
или



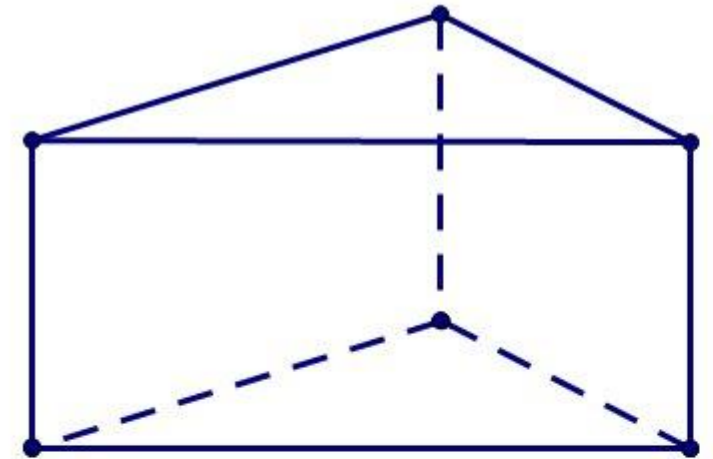
2. Далее, если нужно построить прямую призму или прямой цилиндр, то из всех вершин основания проводим равные между собой вертикальные отрезки - это боковые ребра призмы или образующие цилиндра. В случае построения куба боковое ребро равно длине большей стороны параллелограмма, который изображен в основании:



3. Соединяем концы вертикальных отрезков и получаем верхнее основание:

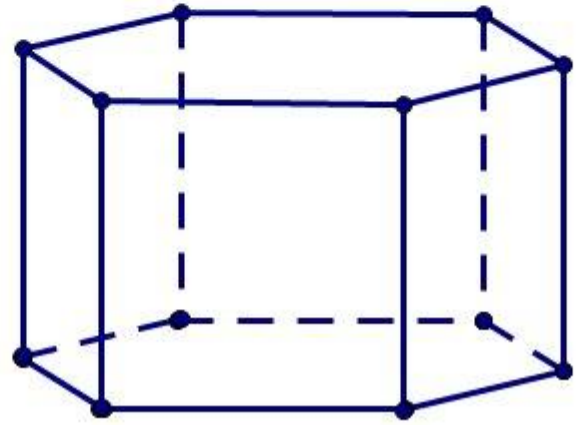
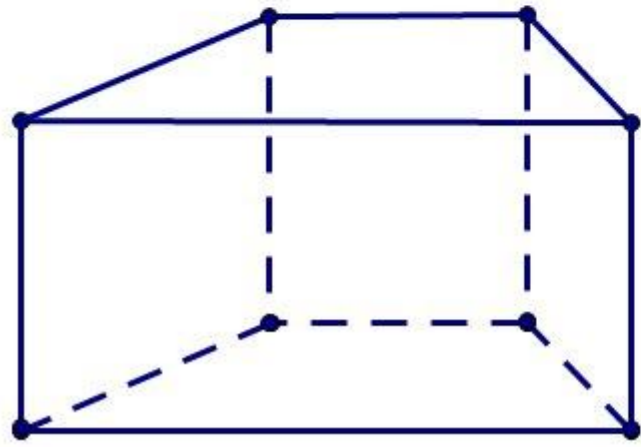
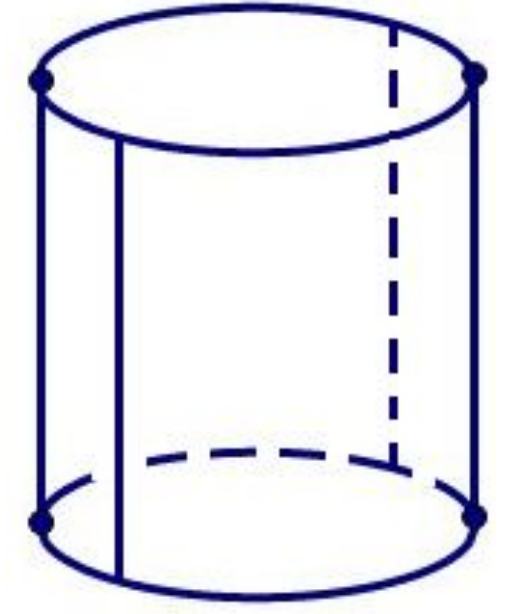
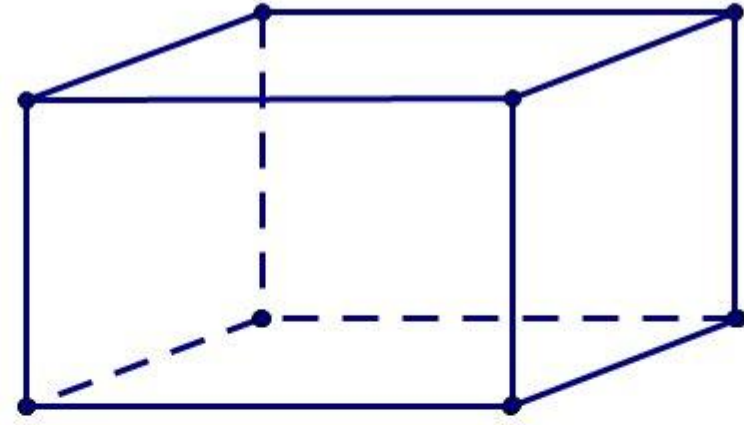
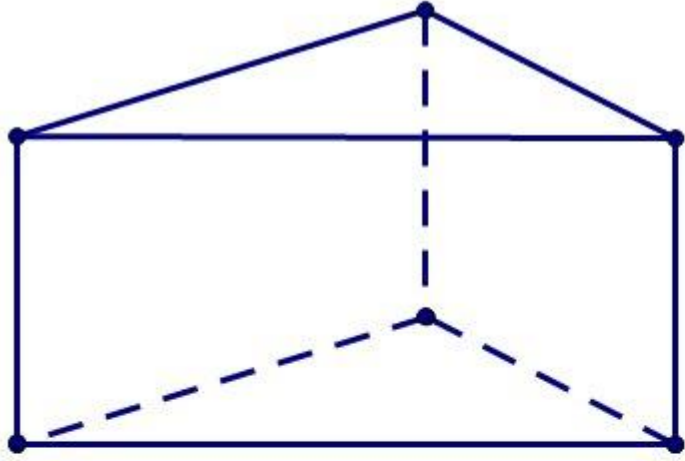


4. Невидимые ребра изображаем пунктирными линиями:

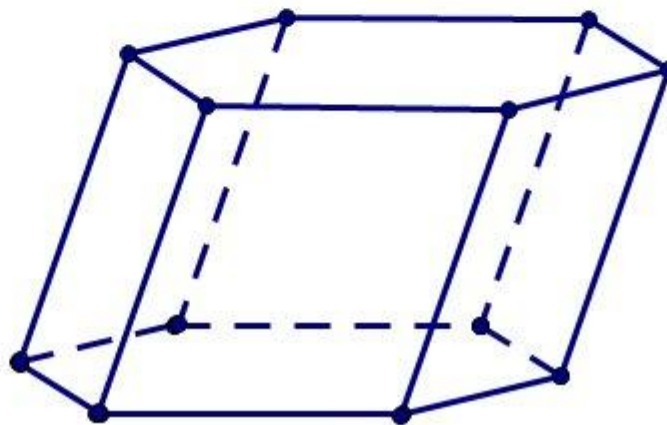
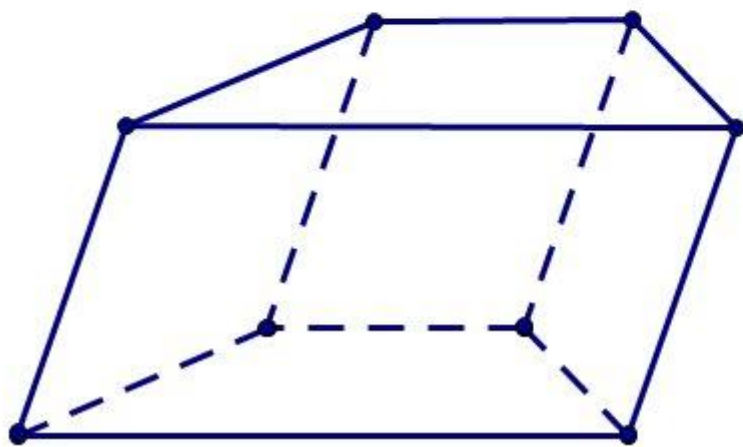
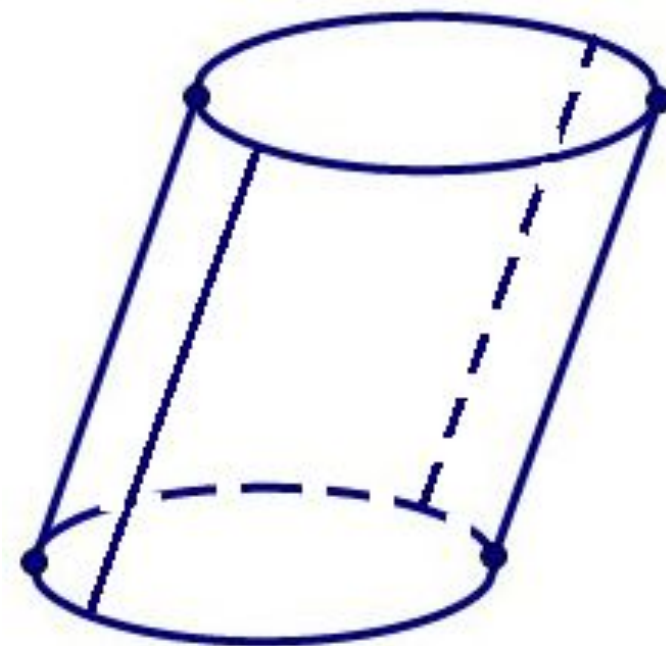
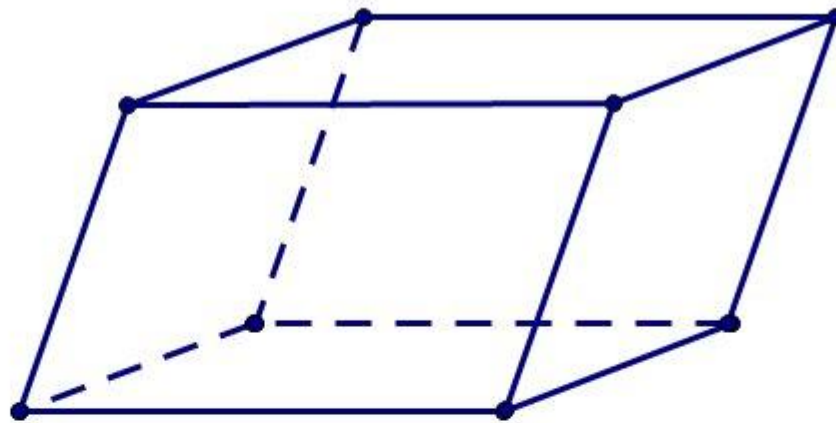
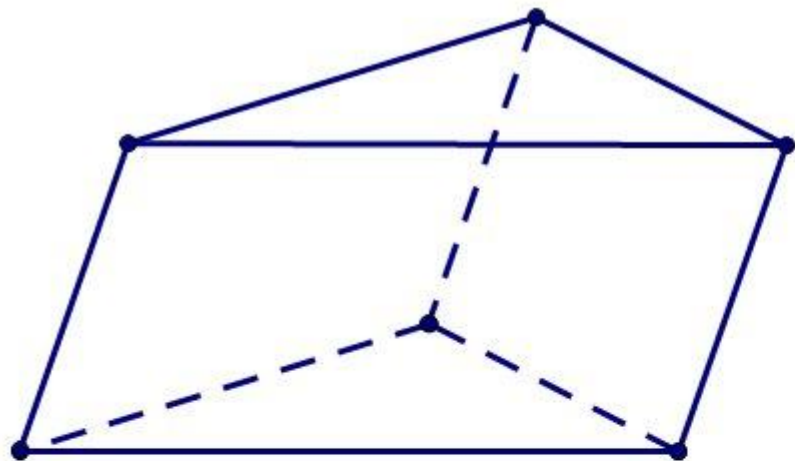


Выполни построение следующих фигур

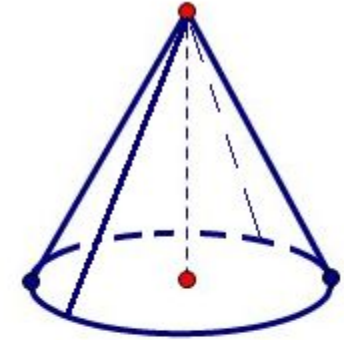
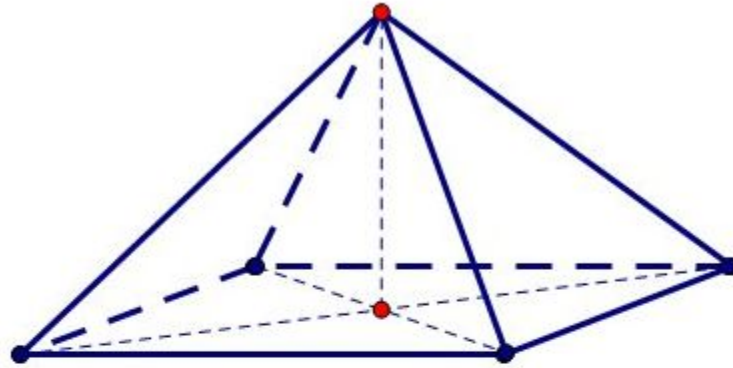
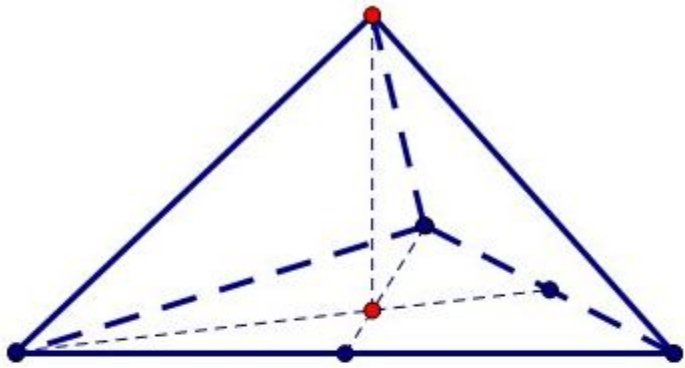




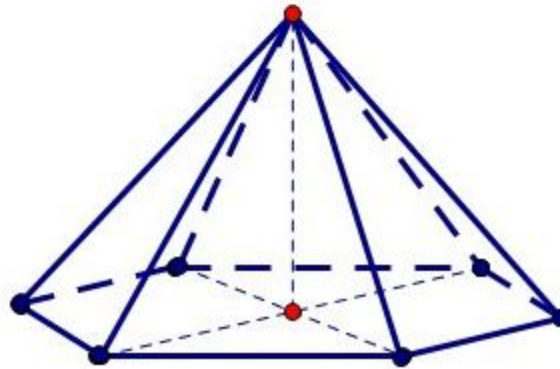
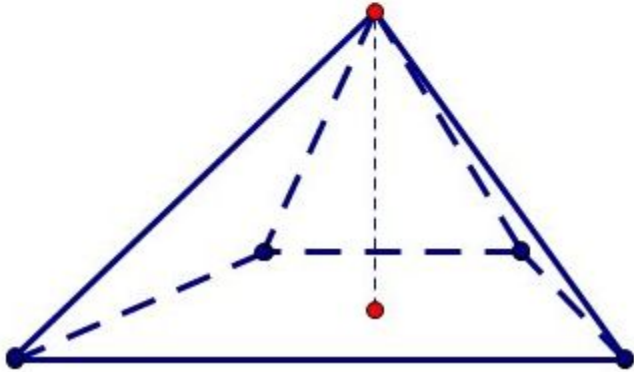
В случае наклонной призмы или наклонного цилиндра боковые ребра изображаются параллельными отрезками:



5. При построении пирамиды или конуса сначала находим примерное расположение проекции вершины на плоскость основания. В треугольнике это может быть точка пересечения медиан,



Соединяем вершину стереометрической фигуры с вершинами основания и изображаем невидимые ребра пунктирными линиями:



Домашнее задание.

1. Выучи аксиомы, теоремы и их доказательство.
2. Отработай навык построения каждой из фигур на листе А4 и принеси его для проверки учителю.