ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ПОДГОТОВИЛА
учитель математики
Дяченко О.В.

Определение. ***Иррациональные неравенства*** – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить о следующих правилах:

1.Выражение, стоящее под знаком корня четной степени неотрицательно;

2.Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают неотрицательные значения, то возводя обе части неравенства в натуральную четную степень и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному на X;

3.Если обе части неравенства возвести в натуральную нечетную степень, то всегда получим неравенство, равносильное исходному.

Написать в тетради:

Число, классная работа, тему урока.

Записать только таблицу.

Разобрав образцы решения неравенств выполнить домашнее задание.

Примеры записывать необязательно.

Таблицу записать обязательно!

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$	$f(x) \geq a^2$
2	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$	$f(x) \geq 0$
3	$\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2 \end{cases}$
4	$\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$	*Нет решений* ($x \in \varnothing$)

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ (КОРЕНЬ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ)

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
5	$\sqrt[2n+1]{f(x)} > c$	$f(x) > c^{2n+1}$
6	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq c$	$f(x) \geq c^{2n+1}$
7	$\sqrt[2n+1]{f(x)} < c$	$f(x) < c^{2n+1}$
8	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq c$	$f(x) \leq c^{2n+1}$

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
9	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
10	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$
11	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

№1. Неравенство решается по **пункту 7** таблицы

Пример Решить неравенство $\sqrt[5]{x+3}<-2$

Решение

$$\sqrt[5]{x+3}<-2$$

$$x+3<(-2)^5$$

$$x+3<-32$$

$$x<-35.$$

Ответ $:(-\infty;-35).$

№2. Неравенство решается по **пункту 6** таблицы

Решить неравенство $\sqrt[3]{3-2x}\geq 5$

Решение

$$\sqrt[3]{3-2x}\geq 5$$

$$3-2x\geq 5^3$$

$$-2x\geq 122$$

$$x\leq -61.$$

Ответ $:\ (-\infty;-61]$

№3. $\sqrt{5-y} \le 3$

Неравенство решается по **пункту 3** таблицы

Решение.

$$\begin{cases} 5 - y \ge 0 \\ 5 - y \le 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \le 5 \\ y \ge -4 \end{cases} \qquad y \in [-4; 5]$$

Ответ: $[-4; 5]$

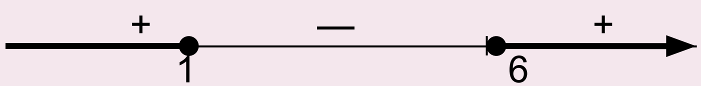
№4. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 7x + 6} > -1.$

Решение. Неравенство решается по **пункту 2** таблицы:

$x^2 - 7x + 6 \geq 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, решая квадратное уравнение, получим корни уравнения х=1 и х=6, тогда

$(x - 1)(x - 6) \geq 0.$



$x \in (-\infty; 1] \cup [6; \infty)$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [6; \infty)$

№5. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x}>2$

Решение. Учитывая, что правая часть неравенства положительна,

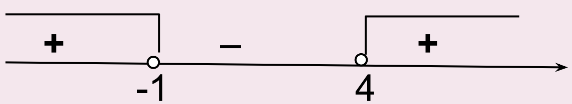
данное неравенство равносильно неравенству:

(решаем по **пункту 1** таблицы)

$$x^2-3x>4$$

$$x^2-3x-4>0$$

$$(x+1)(x-4)>0$$



$$x\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$$

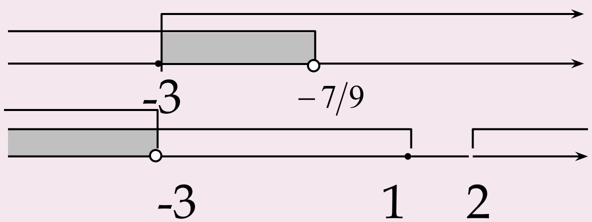
Ответ. $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$

№6. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$

Решение. Решаем по **пункту 11** таблицы.

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x^2-3x+2>(x+3)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0,\\ x^2-3x+2\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x^2-3x+2>x^2+6x+9,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0,\\ (x-1)(x-2)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\ge 0,\\ x<-7/9,\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0,\\ (x-1)(x-2)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$



(решения первой системы)

(решения второй системы)

Объединяя решения первой и второй систем, приходим к ответу.

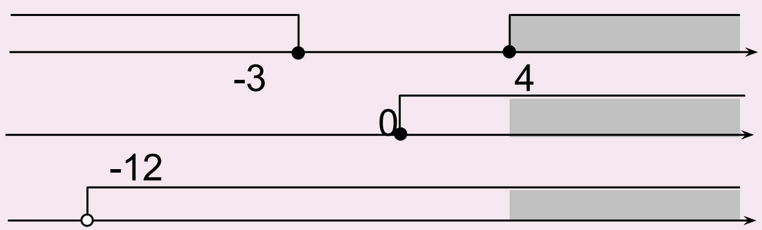
$x\in(-\infty;-7/9)$

Ответ. $(-\infty;-7/9)$

№7. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Решение. Решаем по **пункту 9** таблицы.
Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+3)(x-4) \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x > -12. \end{cases}$$



$x \in [4;+\infty)$

Ответ. $[4;+\infty)$

№8. Решить неравенство $\sqrt{x-4} < 1$

Решение. Решаем по **пункту 3** таблицы.
Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x-4 < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

$$x \in [4;5).$$

Ответ. $[4;5).$

Домашнее задание

Решить неравенства:

1. $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

2. $\sqrt{x-5} < 4$

3. $\sqrt{6x-9} < x$

4. $\sqrt{x^2-3x+2} \geq -2$

Сдать работу 15.02 и 16.02 в школе.
Быть готовым к написанию самостоятельной работы по этой теме.