

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ПОДГОТОВИЛА
учитель математики
Дяченко О.В.

Определение. *Иррациональные неравенства* – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить о следующих правилах:

1.Выражение, стоящее под знаком корня четной степени неотрицательно;

2.Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают неотрицательные значения, то возводя обе части неравенства в натуральную четную степень и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному на X ;

3.Если обе части неравенства возвести в натуральную нечетную степень, то всегда получим неравенство, равносильное исходному.

Написать в тетради:

Число, классная работа, тему урока.

Записать только таблицу.

Разобрав образцы решения
неравенств выполнить домашнее
задание.

Примеры записывать
необязательно.

Таблицу записать
обязательно!

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$	$f(x) \geq a^2$
2	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$	$f(x) \geq 0$
3	$\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2 \end{cases}$
4	$\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$	<i>Нет решений ($x \in \emptyset$)</i>

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ (КОРЕНЬ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ)

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
5	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > c$	$f(x) > c^{2n+1}$
6	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \geq c$	$f(x) \geq c^{2n+1}$
7	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < c$	$f(x) < c^{2n+1}$
8	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq c$	$f(x) \leq c^{2n+1}$

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
9	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
10	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$
11	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \right.$

№1. Неравенство решается по **пункту 7** таблицы

Пример Решить неравенство $\sqrt[5]{x+3} < -2$

Решение

$$\sqrt[5]{x+3} < -2$$

$$x+3 < (-2)^5$$

$$x+3 < -32$$

$$x < -35.$$

Ответ : $(-\infty; -35)$.

№2. Неравенство решается по **пункту 6** таблицы

Решить неравенство $\sqrt[3]{3-2x} \geq 5$

Решение

$$\sqrt[3]{3-2x} \geq 5$$

$$3-2x \geq 5^3$$

$$-2x \geq 122$$

$$x \leq -61.$$

Ответ : $(-\infty; -61]$



№3.

$$\sqrt{5 - y} \leq 3$$

Неравенство решается по **пункту 3**
таблицы

Решение.

$$\begin{cases} 5 - y \geq 0 \\ 5 - y \leq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq -4 \end{cases} \quad y \in [-4; 5]$$

ОТВЕТ: $[-4; 5]$

№4. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 7x + 6} > -1.$$

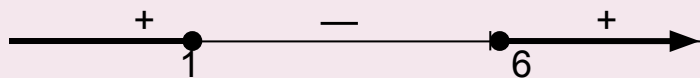
Решение. Неравенство решается по **пункту 2** таблицы:

$$x^2 - 7x + 6 \geq 0$$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, решая квадратное уравнение,
получим корни уравнения $x=1$ и $x=6$,

тогда

$$(x - 1)(x - 6) \geq 0.$$



$$x \in (-\infty; 1] \boxtimes [6; \infty)$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [6; \infty)$

№5. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x} > 2$$

Решение. Учитывая, что правая часть неравенства
положительна,

данное неравенство равносильно неравенству:
(решаем по **пункту 1** таблицы)

$$x^2 - 3x > 4,$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0,$$

$$(x + 1)(x - 4) > 0$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$

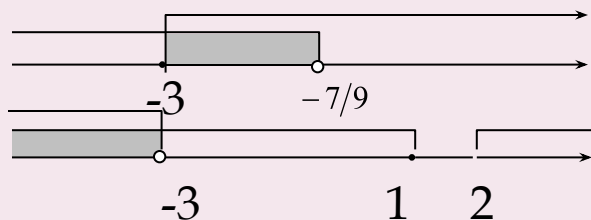
№6. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$$

Решение. Решаем по **пункту 11** таблицы.

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 + 6x + 9, \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x < -7/9, \end{cases} \right.$$
$$\left. \begin{cases} x + 3 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} x + 3 < 0, \\ (x - 1)(x - 2) \geq 0; \end{cases} \right. \quad \left. \begin{cases} x + 3 < 0, \\ (x - 1)(x - 2) \geq 0. \end{cases} \right]$$



(решения первой системы)

(решения второй системы)

Объединяя решения первой и второй систем, приходим к ответу.

$$x \in (-\infty; -7/9)$$

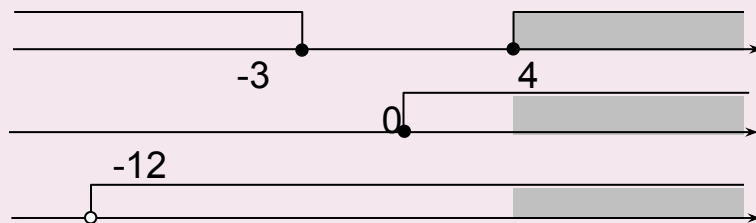
Ответ. $(-\infty; -7/9)$

№7. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

Решение. Решаем по **пункту 9** таблицы.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+3)(x-4) \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x > -12. \end{cases}$$



$$x \in [4; +\infty)$$

Ответ. $[4; +\infty)$

№8. Решить неравенство $\sqrt{x-4} < 1$

Решение. Решаем по **пункту 3** таблицы.

Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x - 4 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

$$x \in [4; 5).$$

Ответ. $[4; 5)$.

Домашнее задание

Решить неравенства:

1. $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

2. $\sqrt{x-5} < 4$

3. $\sqrt{6x-9} < x$

4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq -2$

Сдать работу 15.02 и 16.02 в школе.

Быть готовым к написанию самостоятельной работы по этой теме.