# ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ПОДГОТОВИЛА
учитель математики
Дяченко О.В.

Определение. ***Иррациональные неравенства*** – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить о следующих правилах:

1.Выражение, стоящее под знаком корня четной степени неотрицательно;

2.Если обе части неравенства на некотором множестве $X$ принимают неотрицательные значения, то возводя обе части неравенства в натуральную четную степень и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному на $X$;

3.Если обе части неравенства возвести в натуральную нечетную степень, то всегда получим неравенство, равносильное исходному.

**Написать в тетради:**

Число, классная работа, тему урока.

Записать только таблицу.

Разобрав образцы решения неравенств выполнить домашнее задание.

Примеры записывать необязательно.

Таблицу записать обязательно!

# ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

| | Исходное неравенство | Равносильное неравенство или система |
|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$ | $f(x) \geq a^2$ |
| 2 | $\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$ | $f(x) \geq 0$ |
| 3 | $\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$ | $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2 \end{cases}$ |
| 4 | $\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$ | *Нет решений* ( $x \in \varnothing$ ) |

# ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ (КОРЕНЬ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ)

| | Исходное неравенство | Равносильное неравенство или система |
|---|---|---|
| 5 | $\sqrt[2n+1]{f(x)} > c$ | $f(x) > c^{2n+1}$ |
| 6 | $\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq c$ | $f(x) \geq c^{2n+1}$ |
| 7 | $\sqrt[2n+1]{f(x)} < c$ | $f(x) < c^{2n+1}$ |
| 8 | $\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq c$ | $f(x) \leq c^{2n+1}$ |

# ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

| | Исходное неравенство | Равносильное неравенство или система |
|---|---|---|
| 9 | $\sqrt{f(x)} < g(x)$ | $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$ |
| 10 | $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ | $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$ |
| 11 | $\sqrt{f(x)} > g(x)$ | $\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$ |

**№1.** Неравенство решается по **пункту 7** таблицы

*Пример Решить неравенство* $\sqrt[5]{x+3} < -2$

*Решение*

$\sqrt[5]{x+3} < -2$

$x+3 < (-2)^5$

$x+3 < -32$

$x < -35.$

*Ответ* $:(-\infty; -35).$

**№2.** Неравенство решается по **пункту 6** таблицы

*Решить неравенство* $\sqrt[3]{3-2x} \geq 5$

*Решение*

$\sqrt[3]{3-2x} \geq 5$

$3-2x \geq 5^3$

$-2x \geq 122$

$x \leq -61.$

*Ответ* $:(-\infty; -61]$

$$\sqrt{5-y} \le 3$$

**№3.**

Неравенство решается по **пункту 3** таблицы

***Решение.***

$$\begin{cases} 5-y \ge 0 \\ 5-y \le 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \le 5 \\ y \ge -4 \end{cases} \qquad y \in [-4;\, 5]$$

Ответ: $[-4;\, 5]$

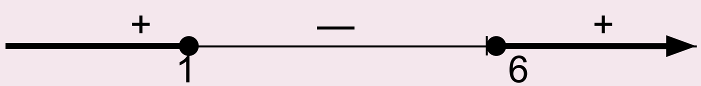
**№4.** Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 7x + 6} > -1.$

*Решение.* Неравенство решается по **пункту 2** таблицы:

$x^2 - 7x + 6 \geq 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, решая квадратное уравнение, получим корни уравнения x=1 и x=6, тогда

$(x - 1)(x - 6) \geq 0.$




$x \in (-\infty; 1] \cup [6; \infty)$

*Ответ:* $(-\infty; 1] \cup [6; \infty)$

**№5.** Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x} > 2$

*Решение.* Учитывая, что правая часть неравенства положительна,

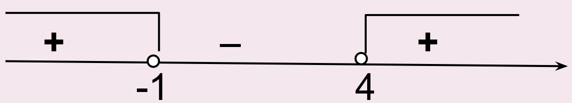
данное неравенство равносильно неравенству:

(решаем по **пункту 1** таблицы)

$$x^2 - 3x > 4$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

$$(x+1)(x-4) > 0$$




$$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$$

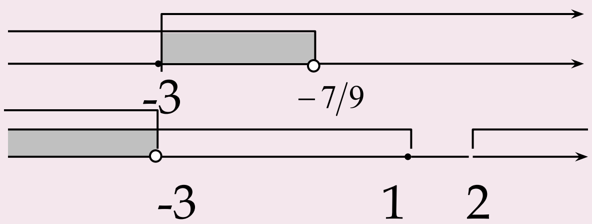
*Ответ.* $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$

**№6.** Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$

*Решение.* Решаем по **пункту 11** таблицы.

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+3\ge 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\ge 0; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+3\ge 0, \\ x^2-3x+2>x^2+6x+9, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ (x-1)(x-2)\ge 0; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+3\ge 0, \\ x<-7/9, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ (x-1)(x-2)\ge 0. \end{cases}\end{array}\right.$$




(решения первой системы)

(решения второй системы)

Объединяя решения первой и второй систем, приходим к ответу.

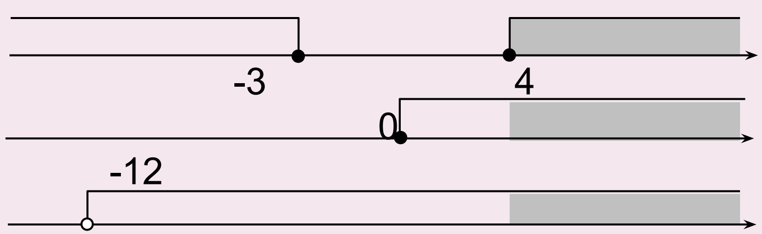
$x \in (-\infty; -7/9)$

*Ответ.* $(-\infty; -7/9)$

**№7.** Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$

*Решение.* Решаем по **пункту 9** таблицы.
Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+3)(x-4) \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x > -12. \end{cases}$$




$x \in [4;+\infty)$

*Ответ.* $[4;+\infty)$

**№8.** Решить неравенство $\sqrt{x-4}<1$

*Решение.* Решаем по **пункту 3** таблицы. Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x-4\ge 0, \\ x-4<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 4, \\ x<5. \end{cases}$$

$$x\in[4;5).$$

*Ответ.* $[4;5)$.

# Домашнее задание

Решить неравенства:

1. $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

2. $\sqrt{x-5} < 4$

3. $\sqrt{6x-9} < x$

4. $\sqrt{x^2-3x+2} \geq -2$

Сдать работу 15.02 и 16.02 в школе.
Быть готовым к написанию самостоятельной работы по этой теме.