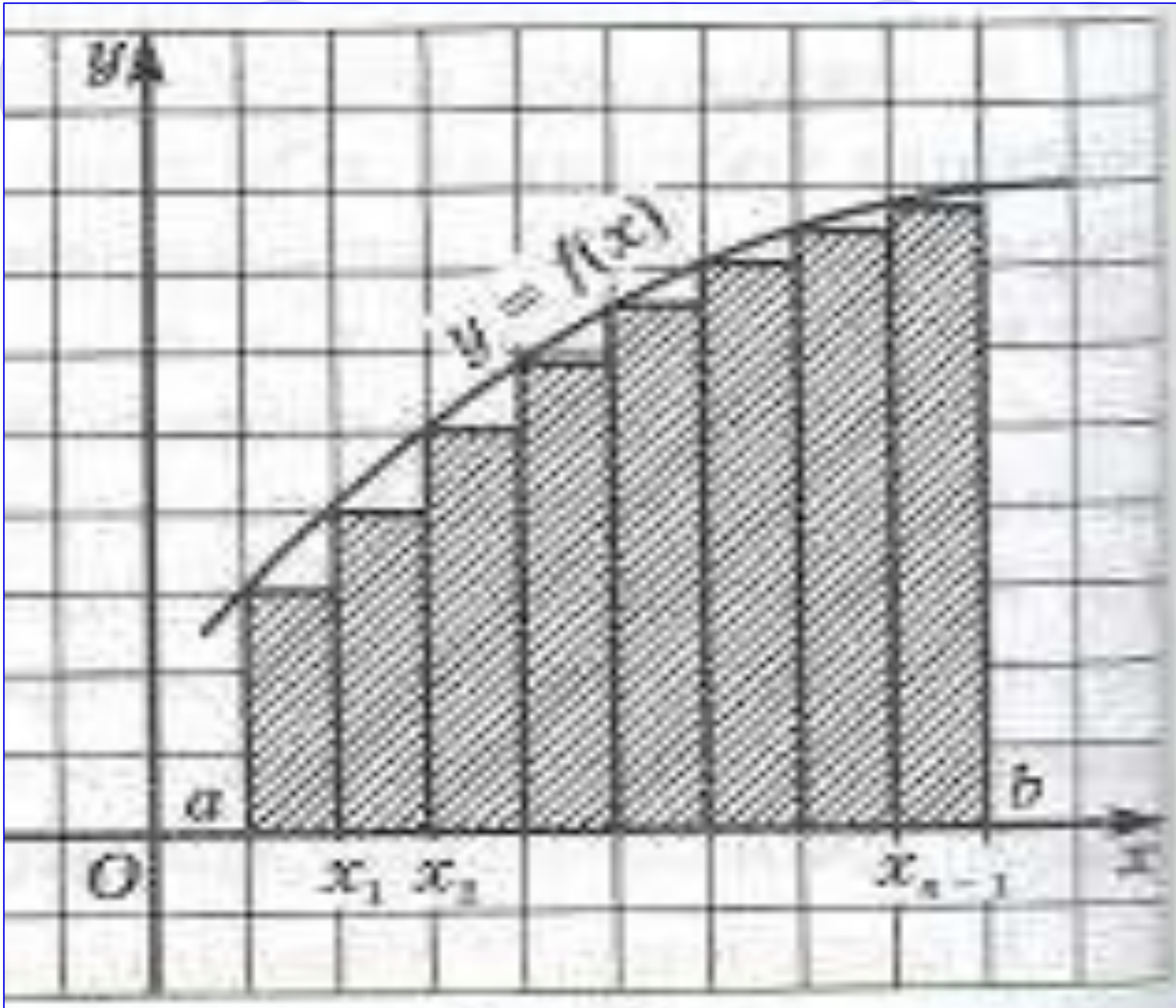
- Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Вопросы для повторения

- 1.Что называют криволинейной трапецией?
- 2. Являются ли фигуры, изображённые на графиках криволинейными трапециями?
- 3. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции
- .

Рассмотрим другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции

- Будем считать функцию f неотрицательной и непрерывной на отрезке [а; в], тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближённо подсчитать следующим образом



y
$y = f(x)$
a
b
O
x_1
x_2
x_{n-1}
x

Разобьём отрезок [а; в] на n отрезков одинаковой длины точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x^n = в$$

$$\Delta x = \frac{в - a}{n}$$

Рассмотрим

сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x =$$

$$= (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}))\Delta x$$

- При $n \to \infty$
  $S_n \to$ к некоторому числу. Это число называют интегралом функции f от а до в и обозначают:

$$\int_{а}^{в} f(x)dx$$

- **Числа а и в - называются** пределами интегрирования, а – нижним пределом, в – верхним.
- Знак $\int$ - называют знаком интеграла
- Функцию f называют подынтегральной функцией, а переменная x – переменной интегрирования
- df- знак дифференциала

Итак, если f(x) ≥0 на отрезке [а; в], то

- Площадь соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой:

$$\mathbf{S = \int_{a}^{в} f(x)dx}$$

- Сравнивая формулы криволинейных трапеций :

$$S = \int_{a}^{в} f(x)dx \quad и \quad S = F(в) - F(a)$$

Делаем вывод:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Формула Ньютона-Лейбница

Пример

$$\int_1^3 x\,dx = \left.\frac{x^{1+1}}{1+1}\right|_1^3 = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$$

Функция f	K – постоянная	X^n (n-целое $n\neq 1$)	sin x	cos x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	
Общий вид первообразных F	кх + C	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	-cosx +C	sin x +C	tgx +C	-ctgx +C	

угол	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\, \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\, \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞


Формула
Ньютона
Лейбница
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$


Формула
Ньютона
Лейбница
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Иссак Ньютон
(1643-1716)

Готфрид
Лейбниц(1646-1716).