Функции нескольких переменных

Основные понятия

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в $\mathbb{R}$, и записывается в виде $z = f(x; y)$ или $f : D \to \mathbb{R}$. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z — *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции, обозначается $E(f)$ или E.

Примером функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y: $S = xy$. Областью определения этой функции является множество $\{(x; y) \mid x > 0,\ y > 0\}$.

Функцию $z = f(x; y)$, где $(x; y) \in D$ можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy. В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют ***границей области***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними***. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой***. Область с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой***, обозначается $\overline{D}$. Примером замкнутой области является круг с окружностью.

График функции двух переменных. Линии уровня

$\Rrightarrow$ Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x; y; z) = (x; y; f(x, y))$ при всех $(x; y) \in D$ называется *графиком функции* $z = f(x; y)$.

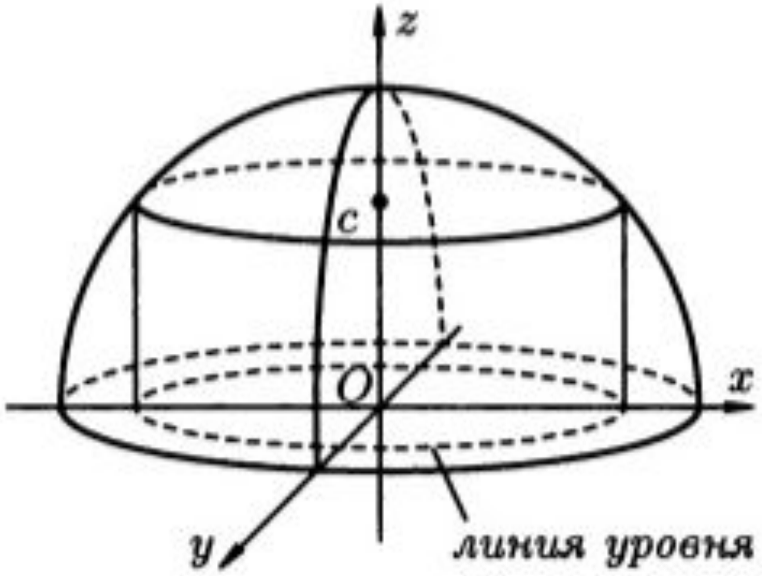
Для наглядного геометрического представления используют *линии уровня* для функции двух переменных и *поверхности уровня* для функции трех переменных.

$\Rrightarrow$ *Линией уровня* функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, в которых функция z принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y) = c$, где c — постоянная.

$\Rrightarrow$ *Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, в которых функция u принимает постоянное значение, т. е. $f(x; y; z) = c$, где $c = \text{const}$.

Пример

Найти область определения и множество значений функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Построить график этой функции и линии уровня $z = c$.

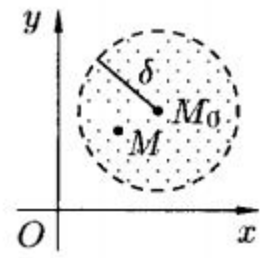


Решение

❍ Действие извлечение квадратного корня возможно при условии $R^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. Это неравенство определяет замкнутый круг радиуса R с центром в начале координат $O(0;0)$. Данная функция определяется уравнением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а значит ее графиком Γ является верхняя полусфера . Линиями уровня являются окружности $x^2 + y^2 = R^2 - c^2$ при условии $0 \leqslant c \leqslant R$. Отсюда, в частности, следует, что множество значений функции — отрезок $z \in [0, R]$. ●

Предел функции

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется *$\delta$-окрестностью точки* $M_0(x_0; y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 — это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (см. рис.).



Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\boxed{A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) \text{ или } A = \lim_{M \to M_0} f(M).}$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что во всех ее точках $M(x; y)$, отличных от M_0, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x; y)$ отличаются от числа A по модулю меньше, чем на ε.

Пример . Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

❍ Решение: Будем приближаться к $O(0;0)$ по прямой $y=kx$, где k – некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ предела не имеет, т. к. при разных значениях k предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения). ●

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Теорема **(о пределах).** Пусть $f(M)$ и $g(M)$ — две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки M_0 и $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$. Тогда

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f \pm g)(M) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{M \to M_0} (f \cdot g)(M) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f}{g}(M) = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M))^{g(M)} = A^B (A > 0)$.

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности,

б) имеет предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$,

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x;y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x;y) - f(x_0;y_0)$. Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов* x и y, а Δz – *полным приращением функции* $f(x;y)$ *в точке* $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x;y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0) \in \in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремятся к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям — подобные теоремы имели место для функций одной переменной .

Имеют место свойства, аналогичные свойствам непрерывных функций одной переменной.

Теорема (о переходе к пределу). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f\left(\lim\limits_{M\to M_0} M\right)$.

Теорема (о сохранении знака). Если $f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0) > 0$ $(f(M_0) < 0)$, то найдется d-окрестность точки M_0, в которой $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$.

Теорема (о непрерывных функциях). Пусть $f(M)$ и $g(M)$ — две функции, определенные в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывные в этой точке. Тогда в этой точке непрерывны также функции $(f \pm g)(M)$, $(f \cdot g)(M)$, $\frac{f}{g}(M)$ при $g(M_0) \neq 0$, $(f(M))^{g(M)}$ при $f(M_0) > 0$.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть $f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 и непрерывна в точке M_0, при этом значения $f(M)$ попадают в некоторую окрестность точки P_0, причем $f(M_0) = P_0$. Пусть $g(P)$ определена в окрестности точки P_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция (суперпозиция) $g[f(M)] = \varphi(M)$ непрерывна в точке M_0.

Пример. Исследовать точки разрыва функции $f(x;y)=\dfrac{x^2+3x-y^2+2}{x^2+y^2}$.

○ Данная функция имеет единственную точку разрыва $M_0(0;0)$. В этой точке функция не определена, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)=+\infty$.

По аналогии с функцией одной переменной имеем дело с точкой бесконечного разрыва (разрыв второго рода). В остальных точках функция непрерывна. ●

Пример. Исследовать точки разрыва функции $f(x;y)=\dfrac{3x^2+y^2}{x^2+y^2-1}$.

○ Эта функция не определена в каждой точке окружности $x^2+y^2=1$. Если $(x;y)\to(x_0;y_0)$, где $(x_0;y_0)$ — произвольная точка окружности, то $f(x,y)\to\infty$. Точнее: если $(x;y)$ лежит внутри единичного круга и приближается к $(x_0;y_0)$, то $f(x,y)\to-\infty$, а если $(x;y)$ расположена вне единичного круга и приближается к $(x_0;y_0)$, то $f(x;y)\to+\infty$. В остальных точках плоскости функция $f(x;y)$ непрерывна. ●

Пример

Функция $f(x;y) = (x^2+y)^{\frac{1}{x^2+y-1}}$, $x \neq 0$, $y \neq 1$ не определена в точке $M_0(0;1)$. Можно ли ее доопределить в этой точке так, чтобы она стала непрерывной?

Данная функция не определена в точках параболы $y=1-x^2$, а значит не определена в проколотой окрестности точки $O(0;1)$. Тогда находимся в условиях замечания на , где в качестве множества E принимаем произвольную окрестность точки $O(0;1)$, из которой исключены точки параболы. Остается найти соответствующий предел.

Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x^2+y)^{\frac{1}{x^2+y-1}} = \left\{ \begin{matrix} t = x^2+y-1, x^2+y=1+t \\ (x;y)\to(0;1) \Longrightarrow t\to 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Значит, если положить $f(0;1)=e$, то соответствующая функция непрерывна в точке $(0;1)$. Добавим, что рассматриваемую функцию можно доопределить как непрерывную в каждой точке $(x_0;y_0)$ параболы $y=1-x^2$, если положить $f(x_0;y_0)=e$. ●

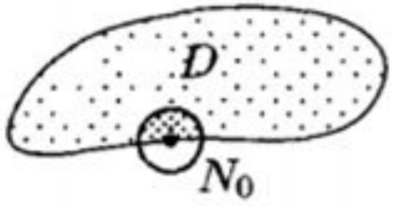
Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Областью называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

Свойство открытости: каждая точка принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки.

Свойство связности: любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

Точка N_0 называется ***граничной точкой*** области D, если она не принадлежит D, но в любой окрестности ее лежат точки этой области (см. рис.). Совокупность граничных точек области D называется ***границей*** D. Область D с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой*** областью, обозначается $\overline{D}$. Область называется ***ограниченной***, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса R. В противном случае область называется ***неограниченной***. Примером неограниченной области может служить множество точек первого координатного угла, а примером ограниченной — δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$.



Теорема . Если функция $z = f(N)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области: а) ограничена, т. е. существует такое число $R > 0$, что для всех точек N в этой области выполняется неравенство $|f(N)| < R$; б) имеет точки, в которых принимает наименьшее m и наибольшее M значения; в) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M.

Теорема дается без доказательства.

Производные функции нескольких переменных

Частные производные первого порядка и их геометрический смысл

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется ***частным приращением*** z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0; y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример. Найти частные производные функции

$$z = 2y + e^{x^2-y} + 1.$$

Решение:

$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$

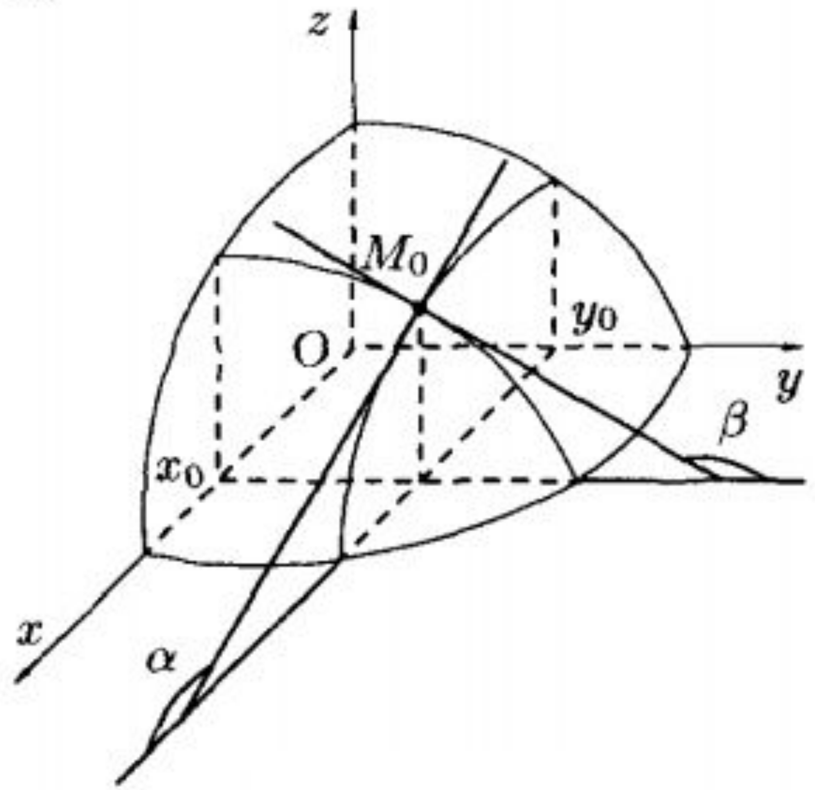
$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$

$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1).$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z=f(x;y)$ является некоторая поверхность

График функции $z=f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y=y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной , заключаем, что $f'_x(x_0;y_0)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z=f(x;y_0)$ в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ (см. рис.).



Аналогично, $f'_y(x_0;y_0)=\operatorname{tg}\beta$.

Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от $(x;y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так, $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x^2}$ (или $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$) и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

○ Решение: Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, что $z''_{xy} = z''_{yx}$. ●

Теорема (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Пример

Найти все частные производные первого, второго и третьего порядка для функции $z = x^3 - x^2y - y^3$.

- 1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2.$$

2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x \quad \left(\text{Видим, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y^2) = -6y.$$

3) $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 2y) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = -2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6.$$

Очевидно, все последующие частные производные четвертого порядка равны нулю

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad (i + j = 4).$$ ●

Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y).$$

Функция $z = f(x;y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x;y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой *главную часть приращения функции*.

Главная часть приращение функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называют *частными дифференциалами*. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

❑ Так как функция дифференцируема в точке M, то имеет место равенство . Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Это означает, что функция непрерывна в точке M. Положив $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ в равенстве , получим: $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Отсюда находим $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Таким образом, в точке M существует частная производная $f'_x(x;y) = A$. Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x;y) = \frac{\partial x}{\partial y} = B$. ■

Равенство можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma,$$

где $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ не дифференцируема в точке $(0;0)$.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула принимает вид:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy}$$

или

$$\boxed{dz = d_x z + d_y z,}$$

где $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx$, $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$ — частные дифференциалы функции $z = f(x;y)$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке $M(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой

Примем теорему без доказательства.

Отметим, что для функции $y = f(x)$ одной переменной существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

Пример

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции $z = \cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$.

Здесь имеем дело с производными сложной функции и дроби.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)'_x =$$

$$= -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2x(x^3+y^3)-3x^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

Ввиду симметрии выражения $\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ относительно x и y можно писать сразу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2y(x^3+y^3)-3y^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

После преобразований получаем ответы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-y^4-3x^2y^2+2x^3y}{(x^3+y^3)^2};$$

$$d_x z = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dx;$$

$$d_y z = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dy;$$

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\times$$
$$\times\left[x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)\,dy\right]. \quad \bullet$$

Пример

Найти полный дифференциал функции $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

○ Так как

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, \quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},$$

то полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}. \qquad \bullet$$

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x; y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz.$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$, равенство можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y.}$$

Формулой пользуются в приближенных расчетах.

Пример. Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение: Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$. Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя z'_x и z'_y: $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$. Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx \approx 1{,}06$.

Для сравнения: используя калькулятор, находим: $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$. ●

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.

Пример

Вычислить приближенно $\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5}$.

1) Принимаем $f(x;y) = (\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{5}{2}}$, $x_0 = 1{,}571 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$, $x = 1{,}55$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}55 - 1{,}571 = -0{,}021$, $y = 0{,}015$, $\Delta y = 0{,}015$.

2) $f(x_0;y_0) = (\sin\frac{\pi}{2} + 8e^0)^{\frac{5}{2}} = 243$.

3) $f'_x = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2x$, $f'_y = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot 8e^y$, $f'_x(x_0;y_0)=0$, так как $\sin 2x_0 = \sin\pi = 0$, $f'_y(x_0;y_0) = 20(1+8)^{\frac{3}{2}} = 540$, $df(x_0;y_0) = 540 \cdot 0{,}015 = 8{,}1$.

Окончательно,

$$\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5} \approx 243 + 8{,}1 = 251{,}1.$$

Пример

Вычислить приближенно $\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2,05}$.

◐ Имеем дело с функцией трех переменных $f(x;y;z) = \cos x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z$. $x_0 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}356$, $x = 2{,}36$, $\Delta x = 0{,}004$, $y_0 = 1$, $y = 0{,}97$, $\Delta y = -0{,}03$, $z_0 = 2$, $z = 2{,}05$, $\Delta z = 0{,}05$. Наконец,

$$f(x_0;y_0;z_0) = \cos\frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{arctg} 1 \cdot 3^2 = -\frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \approx -4{,}9957.$$

Найдем сначала дифференциал в общем виде

$$df = -\sin x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \Delta x + \frac{\cos x \cdot 3^z}{1+y^2}\Delta y + \cos x \operatorname{arctg} y \cdot 3^z \ln 3 \cdot \Delta z.$$

А теперь составим числовое выражение дифференциала в точке.

$$df(x_0;y_0;z_0) = -9\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \cdot 0{,}004 - \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot 0{,}03 - 9\ln 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05 \approx$$

$$\approx -0{,}0199 - 0{,}0954 - 0{,}2744 = -0{,}3718.$$

Окончательно,

$$\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2,05} \approx -4{,}9957 - 0{,}3718 = -5{,}3675. \quad ●$$

Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция $z = f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле $d^2z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) \cdot dy.$$

Отсюда: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это записывается так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для *дифференциала третьего порядка*:

$$d^3z = d(d^2z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}dy + 3\frac{\partial}{\partial x}dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные x и y функции $z = f(x; y)$ являются независимыми.

Пример

Найти d^2z, если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

❍ При решении этого примера применим другой прием, а именно исходим из определения: $d^2z = d(dz)$. Имеем $dz = 2\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$. При последующих дифференцированиях принимаем dx и dy постоянными.

$$d^2z = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}\right)dx + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}\right)dy =$$

$$= 2\frac{(x^2 + y^2)dx - 2x(x\,dx + y\,dy)}{(x^2 + y^2)^2}dx +$$

$$+ 2\frac{(x^2 + y^2)\,dy - 2y(x\,dx + y\,dy)}{(x^2 + y^2)^2}dy =$$

$$= 2\frac{(y^2 - x^2)dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2 - y^2)dy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \bullet$$

Производная сложной функции. Полная производная

Пусть $z = f(x;y)$ — функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t);y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t; переменные x и y — *промежуточные переменные*.

Теорема. Если $z = f(x;y)$ — дифференцируемая в точке $M(x;y) \in D$ функция и $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — дифференцируемые функции независимой переменной t, то производная сложной функции $z(t) = f(x(t);y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

❏ Дадим независимой переменной t приращение Δt. Тогда функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции z.

Так как по условию функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Разделим выражение Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ (по условию теоремы — они дифференцируемые). Получаем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

■

Частный случай: $z = f(x;y)$, где $y = y(x)$, т. е. $z = f(x;y(x))$ — сложная функция одной независимой переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x. Согласно формуле (44.8) имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.}$$

Формула (44.9) носит название ***формулы полной производной***.

Общий случай: $z = f(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$. Тогда $z = f(x(u;v); y(u;v))$ — сложная функция независимых переменных u и v. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ можно найти, используя формулу следующим образом. Зафиксировав v, заменяем в ней $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.}$$

Аналогично получаем: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

Пример

Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

Непосредственная подстановка очевидно не упрощает функцию z. Действуем согласно теореме .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (в зависимости от того, что проще). Ответ оставим в таком виде:

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Пример

Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = xy + xyv + yuv$, а $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$, $v = \operatorname{arctg} t$.

Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = y + yv$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + xv + uv$, $\frac{\partial z}{\partial u} = yv$, $\frac{\partial z}{\partial v} = xy + uy$.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{du}{dt} = e^t, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Составим соответствующую сумму произведений

$$\frac{dz}{dt} = y(1+v)\cos t + (x + xv + uv)\frac{1}{t} + yve^t + \frac{x+u}{1+t^2}y.$$

Пример

Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = 3^{x^2} \operatorname{arctg} y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

Применим формулы из теоремы $\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.}$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2} \cdot 2x \ln 3 \operatorname{arctg} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3^{x^2}}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3^{x^2} \cdot \frac{2x \ln 3 \operatorname{arctg} y}{v} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -3^{x^2} \cdot \frac{2xu \ln 3 \operatorname{arctg} y}{v^2} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} u.$$

Ответ можно оставить в такой форме, или выразить через u и v (т. е. основные переменные):

$$z'_u = 2\frac{u}{v^2} \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}} \ln 3 \operatorname{arctg}(uv) + \frac{v}{1+u^2v^2} 3^{\frac{u^2}{v^2}},$$

$$z'_v = -2\frac{u^2}{v^3} \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}} \ln 3 \operatorname{arctg}(uv) + \frac{u}{1+u^2v^2} \cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}.$$

Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

❑ Пусть $z = f(x;y)$, где x и y — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Рассмотрим сложную функцию $z = f(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, т. е. функцию $z = f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v)$, где u и v — независимые переменные. Тогда имеем:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right).$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы dx и dy функций $x = x(u; v)$ и $y = y(u; v)$. Следовательно, и в этом случае,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy. \qquad \blacksquare$$

Дифференцирование неявной функции

Функция $z = f(x;y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением

$$F(x;y;z) = 0,$$

неразрешенным относительно z. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z, заданной уравнением . Для этого, подставив в уравнение вместо z функцию $f(x;y)$, получим тождество

$$F(x;y;f(x;y)) \equiv 0.$$

Частные производные по x и по y функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ (y \text{ — считаем постоянным}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x;y;f(x;y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ (x \text{ — считаем постоянным}),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \ (F'_z \neq 0).$$

Имеет место ***теорема существования неявной функции*** двух переменных: если функция $F(x;y;z)$ и ее производные $F'_x(x;y;z)$, $F'_y(x;y;z)$, $F'_z(x;y;z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F(x_0;y_0;z_0)=0$, а $F'_z(x_0;y_0;z_0)\neq 0$, то существует окрестность точки M_0, в которой уравнение определяет единственную функцию $z=f(x;y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0;y_0)$ и такую, что $f(x_0;y_0)=z_0$.

б) Неявная функция $y=f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x;y)=0$. Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле

$$\boxed{y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}}\qquad (F'_y\neq 0).$$

Пример

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявной функции $z = z(x;y)$, определенной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

Обозначим $F(x;y;z) = z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x$.

Способ 1, основанный на формулах теоремы .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad (F'_z \neq 0).$$

Найдем частные производные функции F:

$$F'_x = 6xy + z - 2, \quad F'_y = 3x^2 + 2yz^2 + 1, \quad F'_z = 3z^2 + x + 2y^2z.$$

Значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z}dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy.$$

Способ 2 заключается в том, что если уравнение определяет неявную функцию $z = z(x; y)$, то имеем следующее тождество

$$z^3(x; y) + 3x^2 y + xz(x; y) + y^2 z^2(x; y) + y - 2x \equiv 0.$$

Дифференцируем это тождество сначала по x, затем по y (для краткости в $z(x; y)$ аргументы опускаем):

$$3z^2 z'_x + 6xy + z + xz'_x + 2zy^2 z'_x - 2 \equiv 0,$$

$$3z^2 z'_y + 3x^2 + xz'_y + 2yz^2 + 2y^2 zz'_y + 1 \equiv 0.$$

Пример. Найти $\frac{dy}{dx}$, если неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

○ Решение: Здесь $F(x;y) = y^3 + 2y - 2x$, $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Следовательно,

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}} \quad (F'_y \neq 0).$$

$$y'_x = -\frac{-2}{3y^2+2}, \text{ т. е. } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y^2+2}.$$

●