

Простейшие  
математические  
операции в КГ.

---

Преобразования на  
плоскости

# Исторический экскурс

---

□ ~~3 сентября~~ декабря – день комп. графики (3December)



# Исторический экскурс

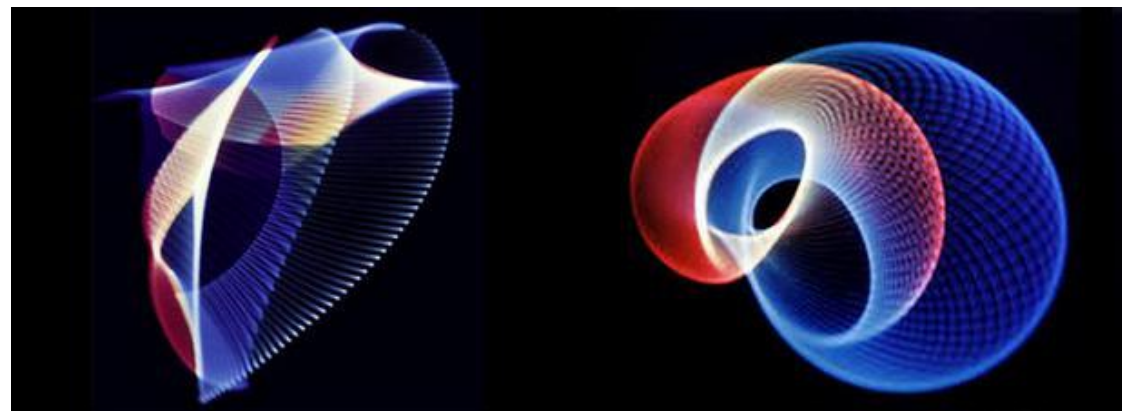
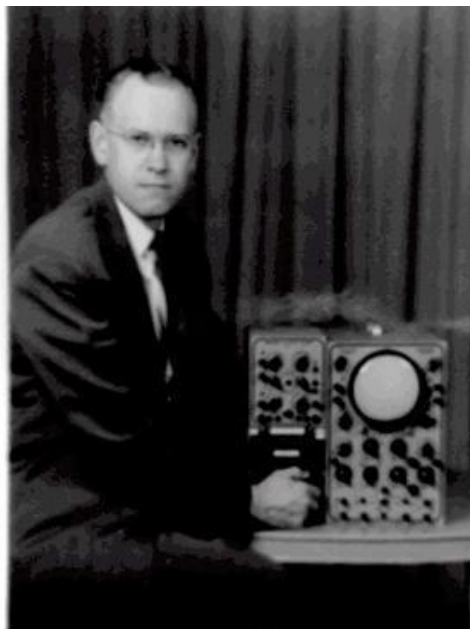
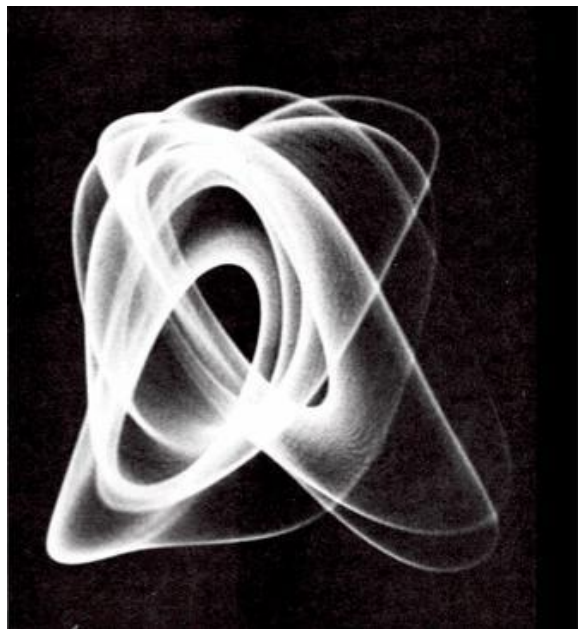
□ 1950-е годы: от текстовых изображений к графической



# 1950-е годы

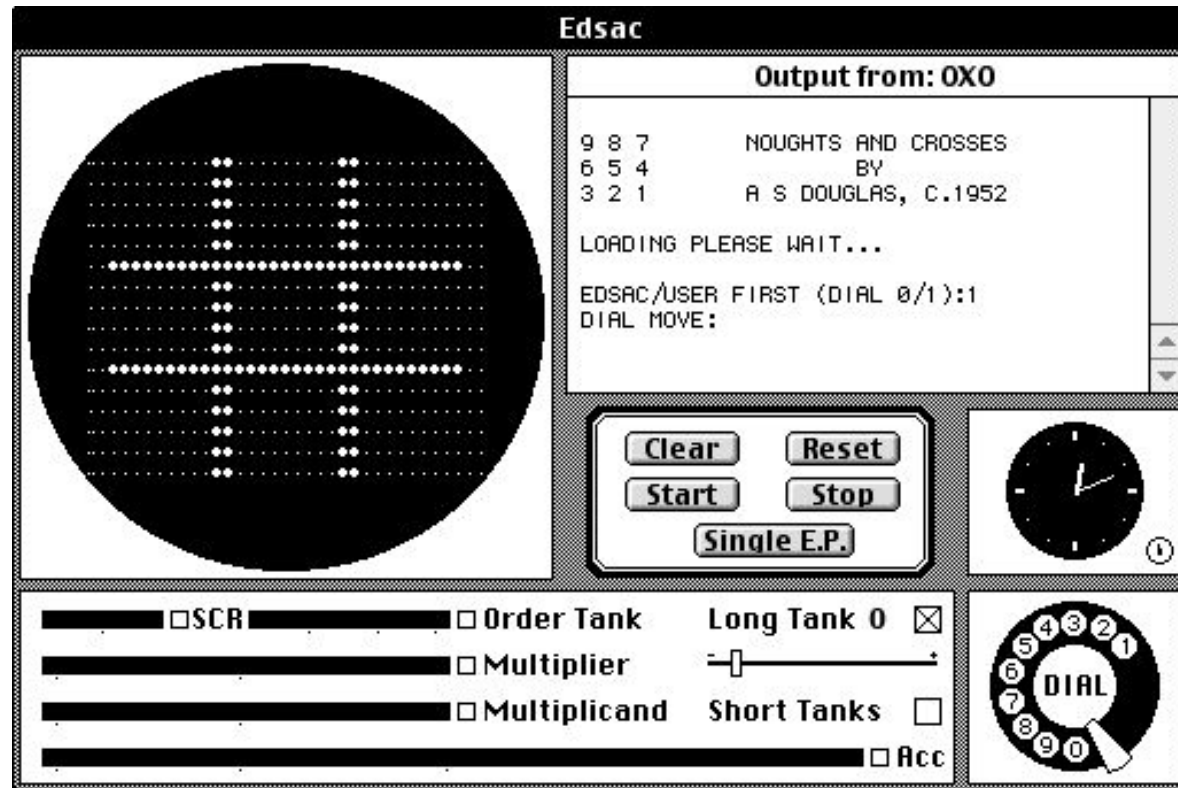
---

□ 1950, Бенджамин Лапоски, рисунки на осциллографе



# 1950-е годы

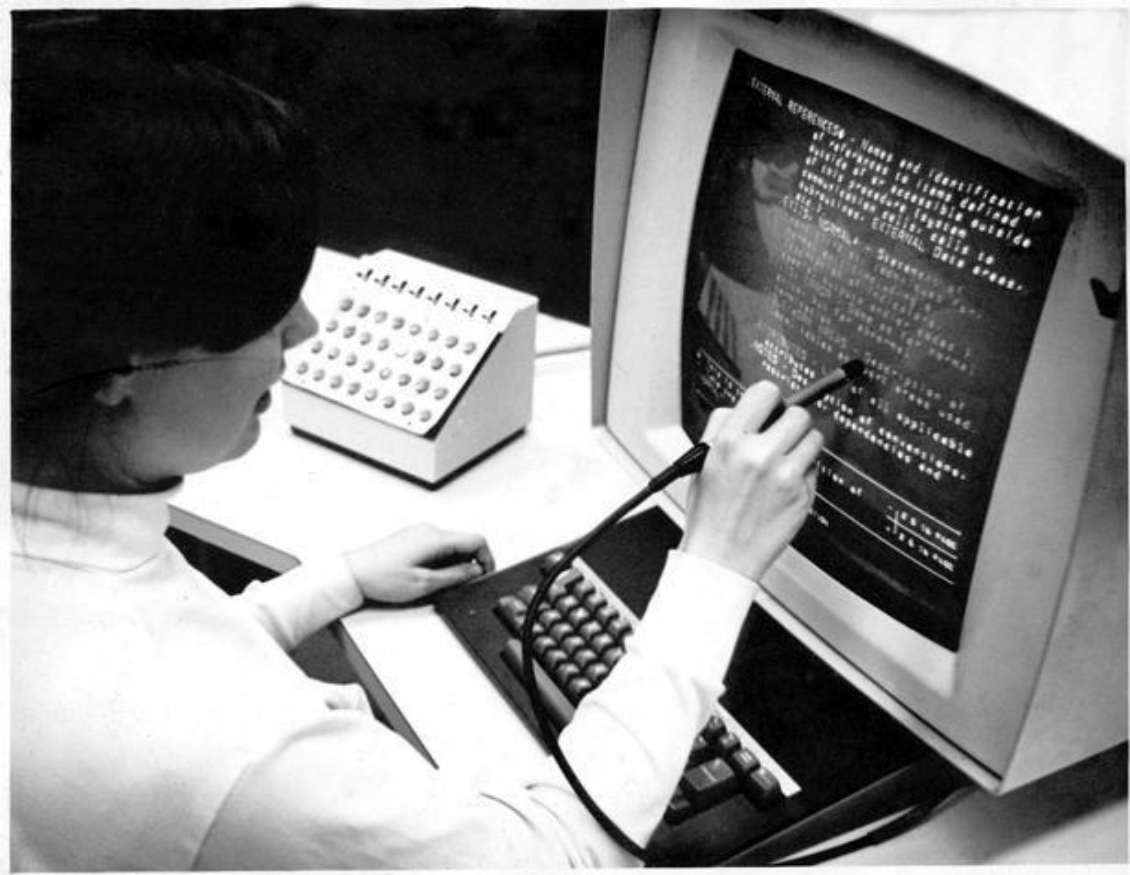
- 1952, Александр Дуглас, игра ОХО для компьютера EDSAC



# 1950-е годы

---

□ 1955, IBM???, световое перо





# 1950-е годы

---

- 1957, Расселл Кёрш, барабанный сканер для компьютера SEAC, первая в мире цифровая фотография



# 1950-е годы

---

□ 1958, MIT, Lincoln TX-2, графическая консоль





# 1950-е годы

---

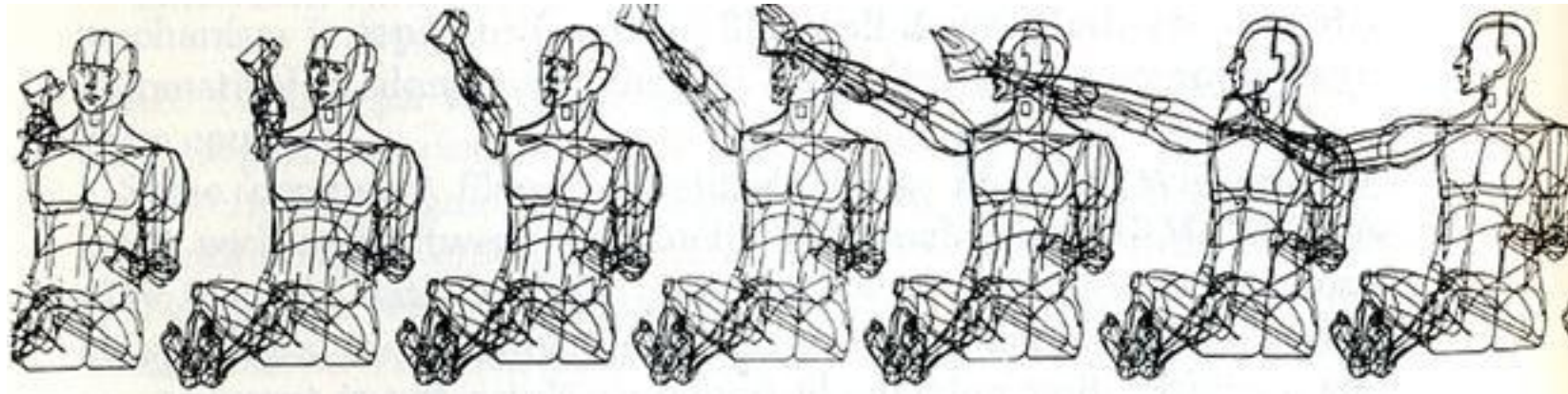
- 1958, Джон Уитни, предиктор Керрисона, заставка к фильму Хичкока «Головокружение»



# 1960-е годы: от "Альбома" к мультипликации

---

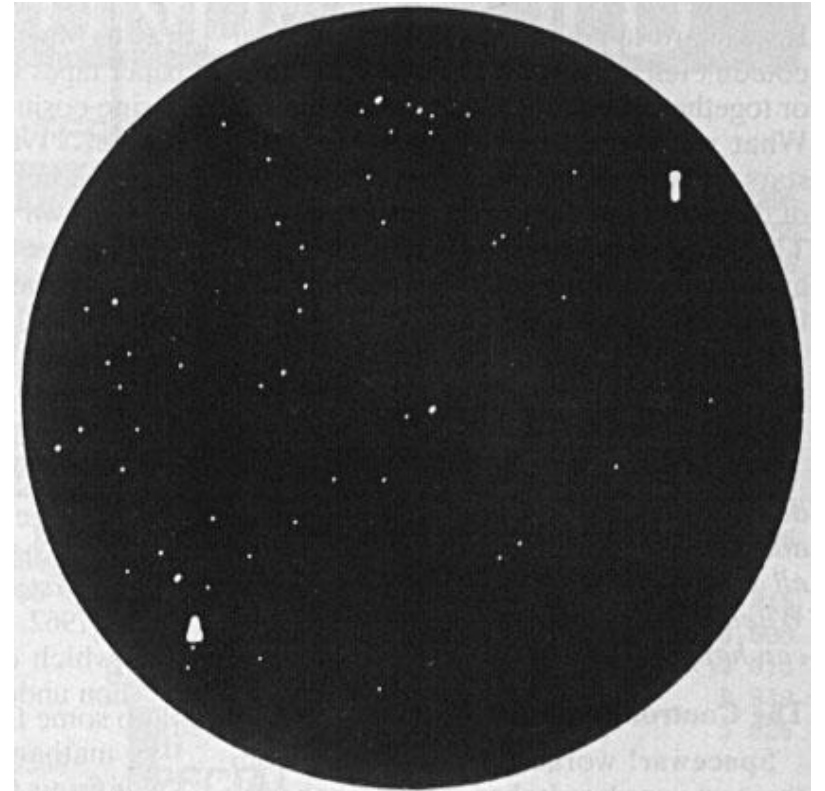
- 1960, Уильям Феттер, Boeing Aircraft, термин «компьютерная графика»



# 1960-е годы

---

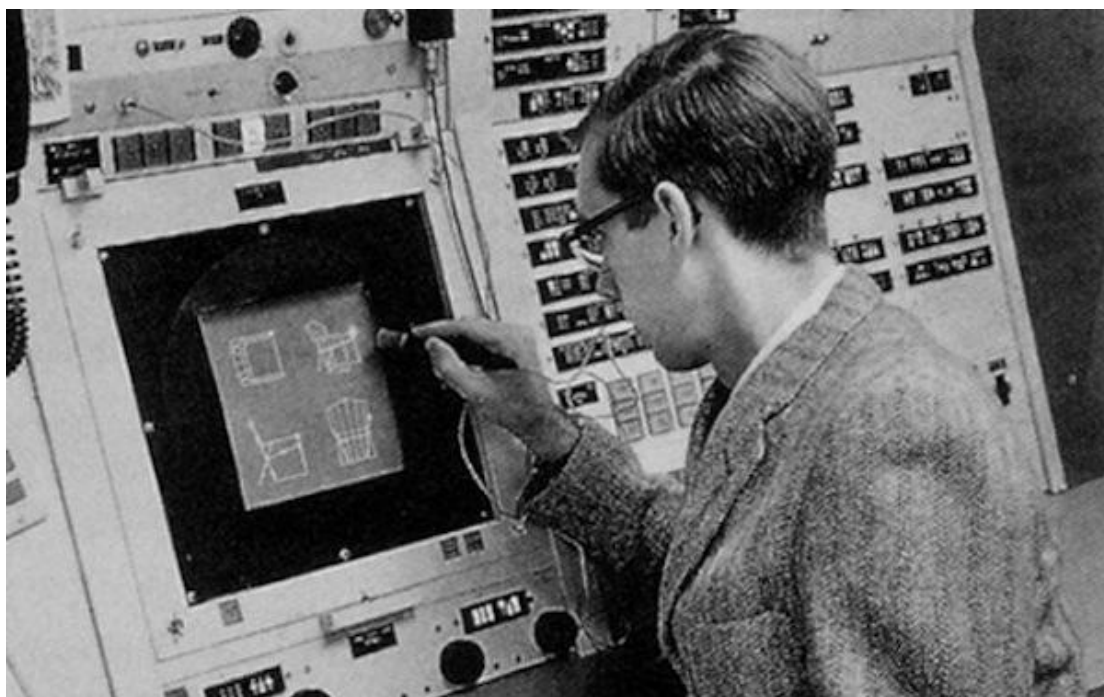
□ 1962, Стив Рассел, Spacewar! для компьютера DEC PDP-1



# 1960-е годы

---

□ 1963, Айван Сазерленд, Sketchpad для TX-2



# 1960-е годы

---

- 1963, Кен Ноултон, BeFlix – первый язык КГ
- 1965-1971, Стэн Вандербик, Pagem Field
- 1967, университет Юты, НИИ КГ
- 1968, Evans&Sutherland
  - Эдвин Кэтмелл, Disney Pixar
  - Джон Уорнок, Adobe Systems, PostScript
  - Джеймс Кларк, Silicon Graphics, Netscape
- 1968, Николай Константинов, «Кошечка»



# Алгебраическое изображение точек

---

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$



# Матричные операции. Определения.

---

- Матрица
- Порядок матрицы
- Главная диагональ
- Нулевая матрица
- Единичная матрица

# Сложение и вычитание матриц

---

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1..n; j = 1..m$$

# Умножение матриц

---

$$A[k * m_1], B[m_2 * n], m_1 = m_2 \rightarrow A * B = C[k * n]$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

# Определитель квадратной матрицы

---

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$A_{ij}$  – алгебраическое дополнение матрицы  $A$  (матрица  $(n-1) \times (n-1)$ , получаемая путем вычеркивания из матрицы  $A$  элементов  $i$ -ой строки и элементов  $j$ -ого столбца)

# Определитель квадратной матрицы

---

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

# Обращение квадратной матрицы

---

$AT = B \rightarrow T = A^{-1}BA^{-1}$  — обратная к  $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & \boxtimes & |A_{1n}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & \boxtimes & |A_{2n}| \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ |A_{n1}| & |A_{n2}| & \boxtimes & |A_{nn}| \end{bmatrix}^T$$

$T$  – операция транспонирования (строки – в столбцы, столбцы – в строки)



# Обобщение сути задач КГ

---

Интерпретация матричного умножения как геометрического оператора является основой математических преобразований, используемых в машинной графике.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$



# Преобразование точек

---

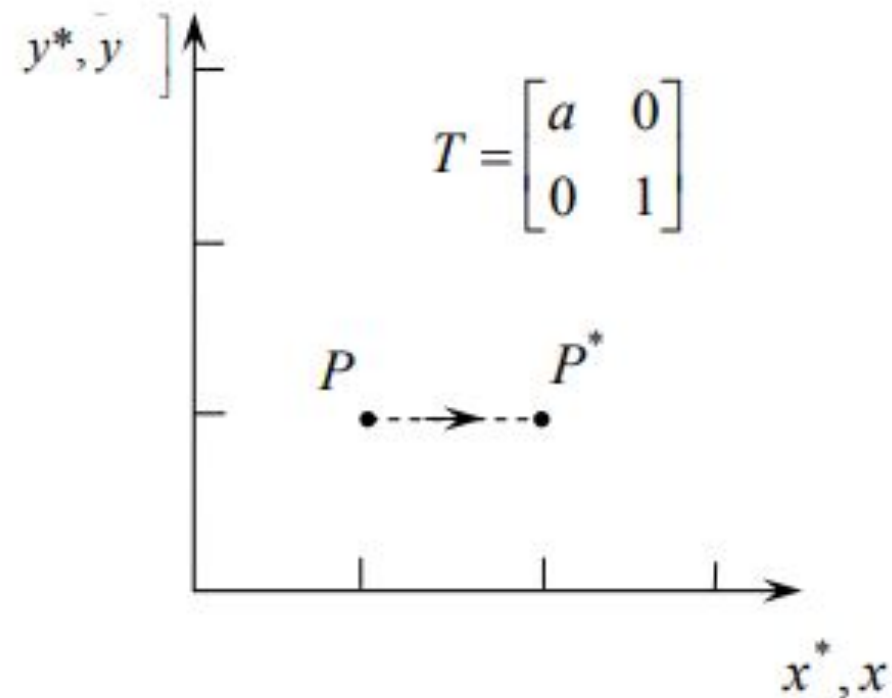
$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y] = [x^* \quad y^*]$$

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \quad y] = [x^* \quad y^*]$$

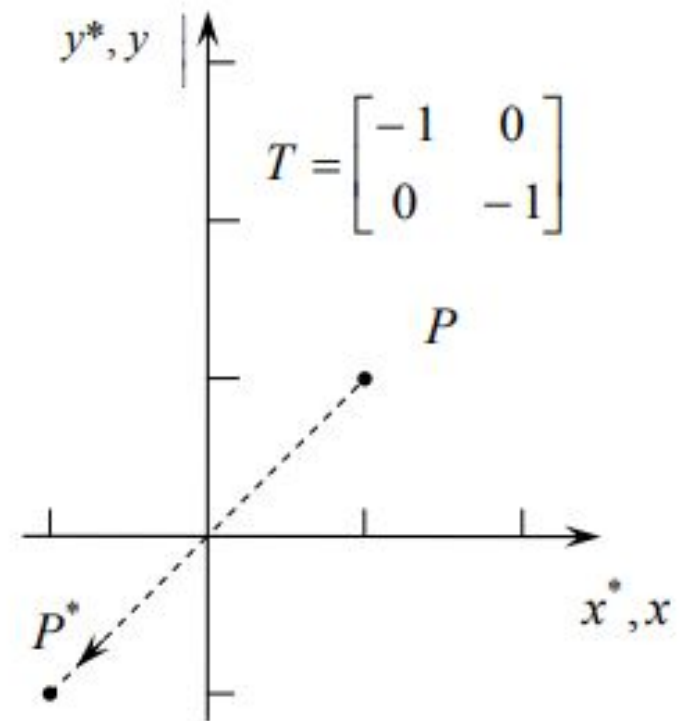
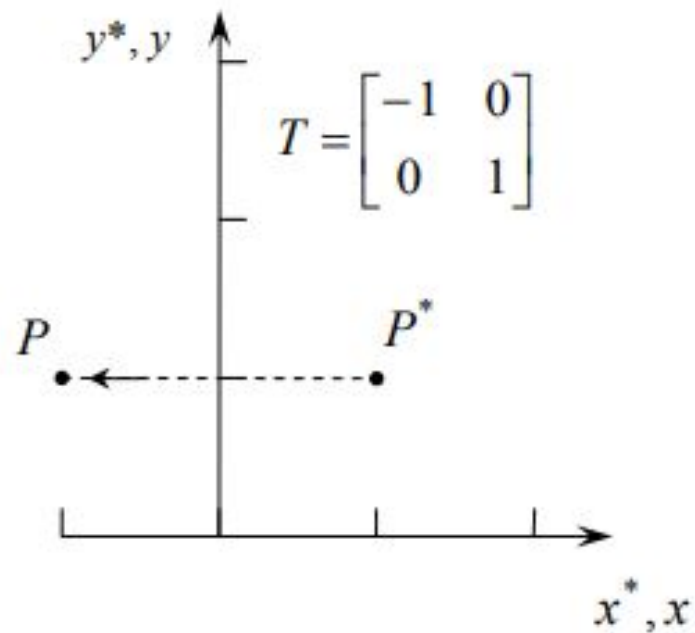
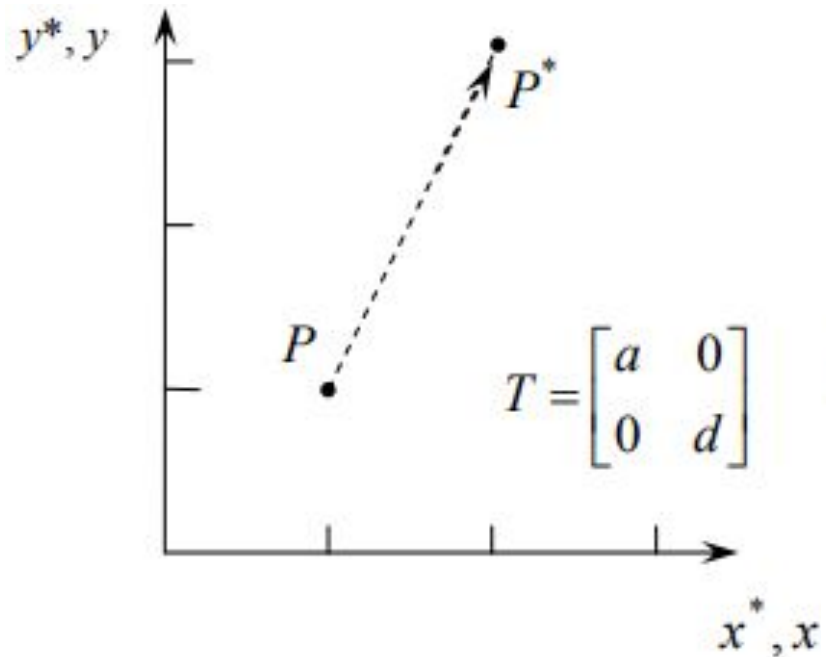
$a > 1$  – увеличение масштаба,

$0 < a < 1$  – уменьшение масштаба,

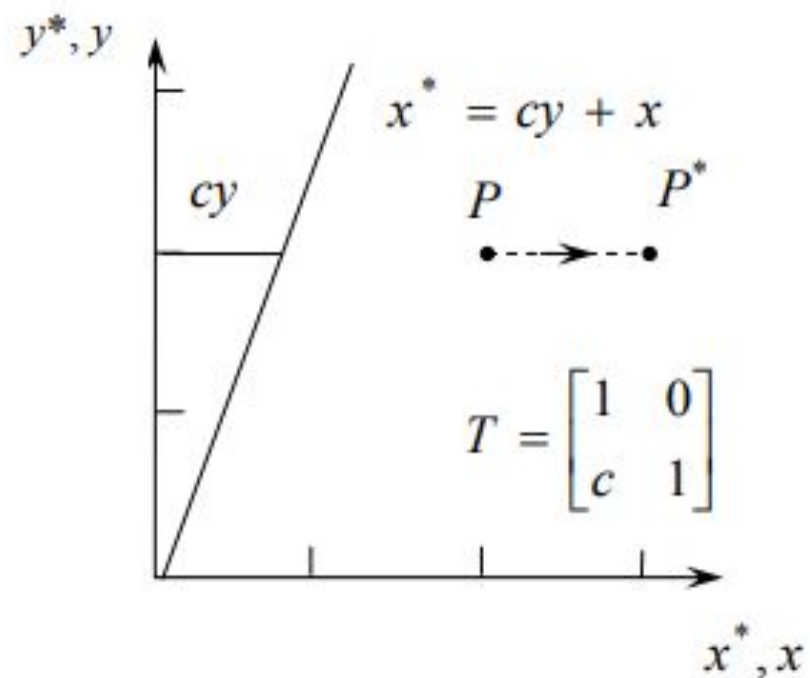
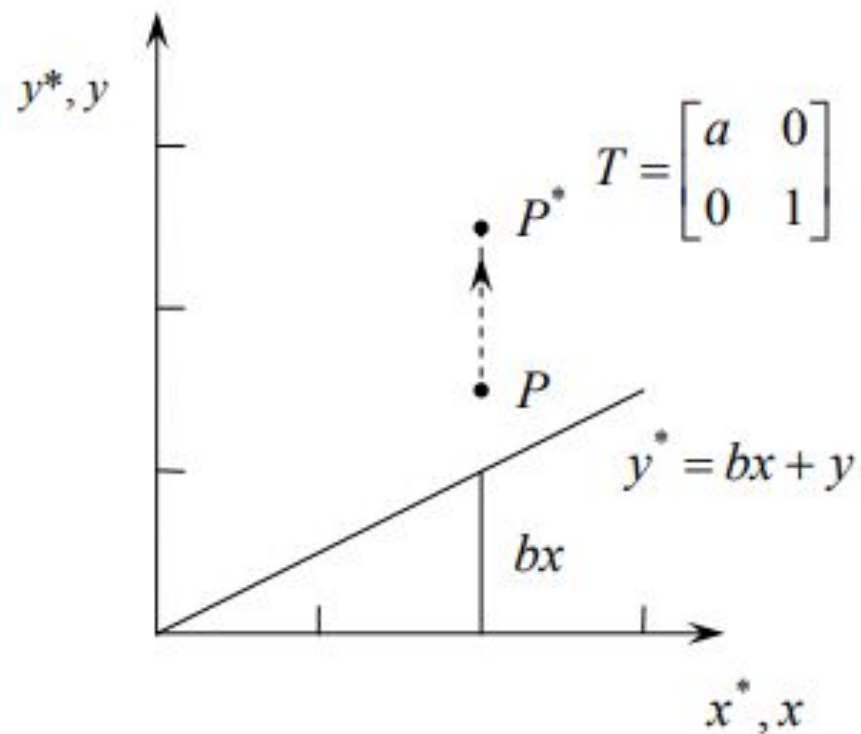
$a < 0$  – отображение по оси  $y$



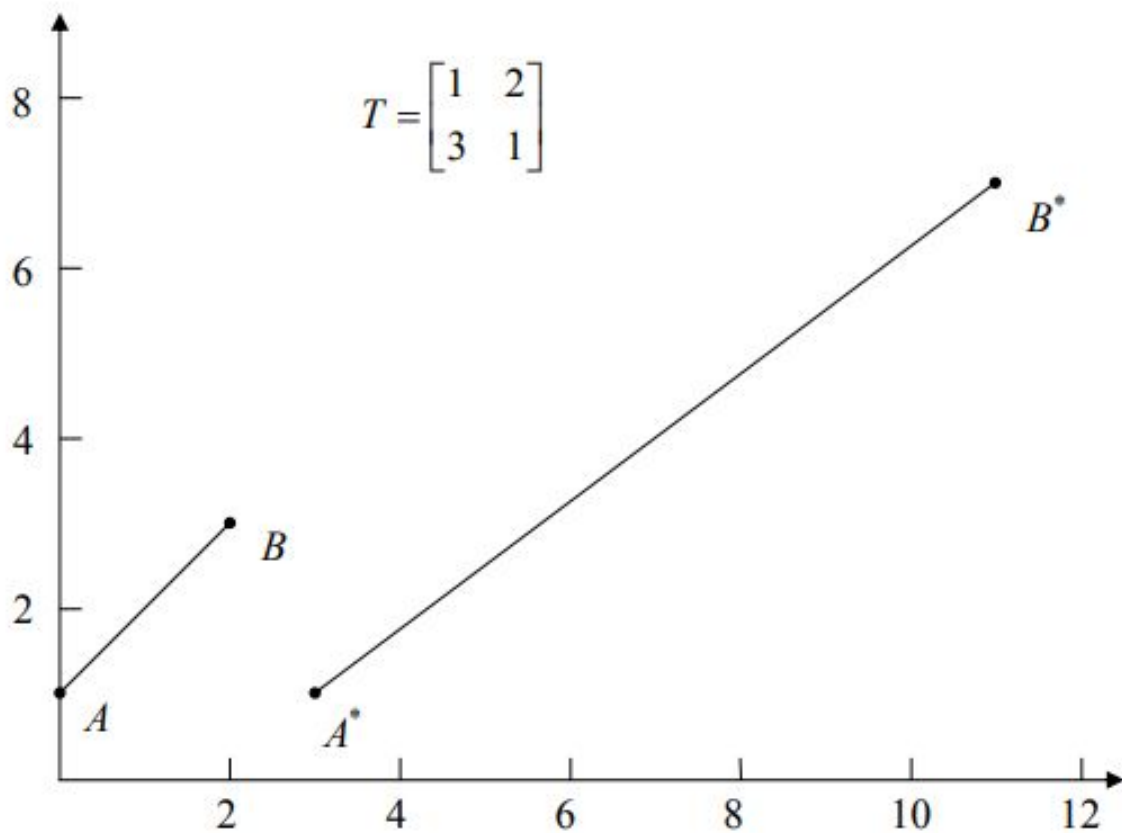
# Преобразование точек



# Преобразование точек



# Преобразование прямых линий



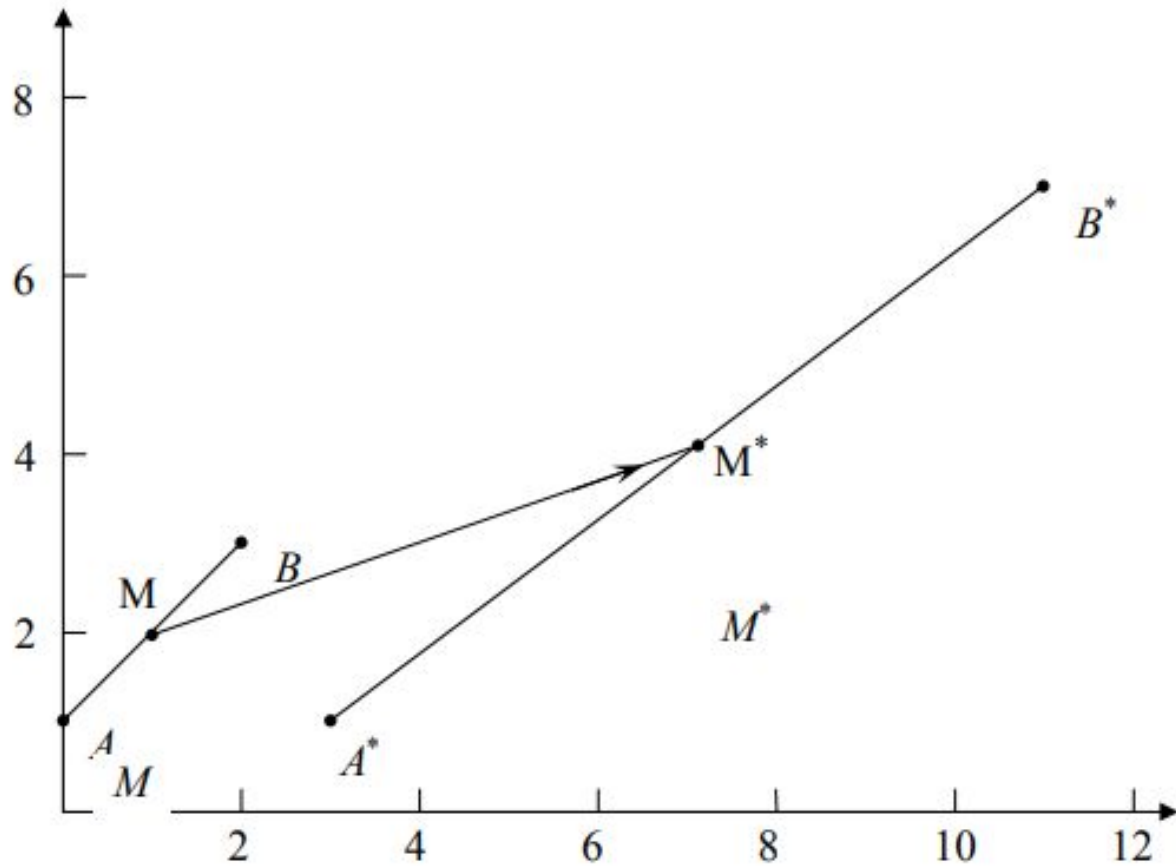
$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = A^*$$

$$BT = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \end{bmatrix} = B^*$$

$$LT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = L^*$$

# Преобразование середины отрезка



$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ax_1 + ax_2 + cy_1 + cy_2}{2} \\ \frac{bx_1 + bx_2 + dy_1 + dy_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$



# Преобразование параллельных ЛИНИЙ

---

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix}$$

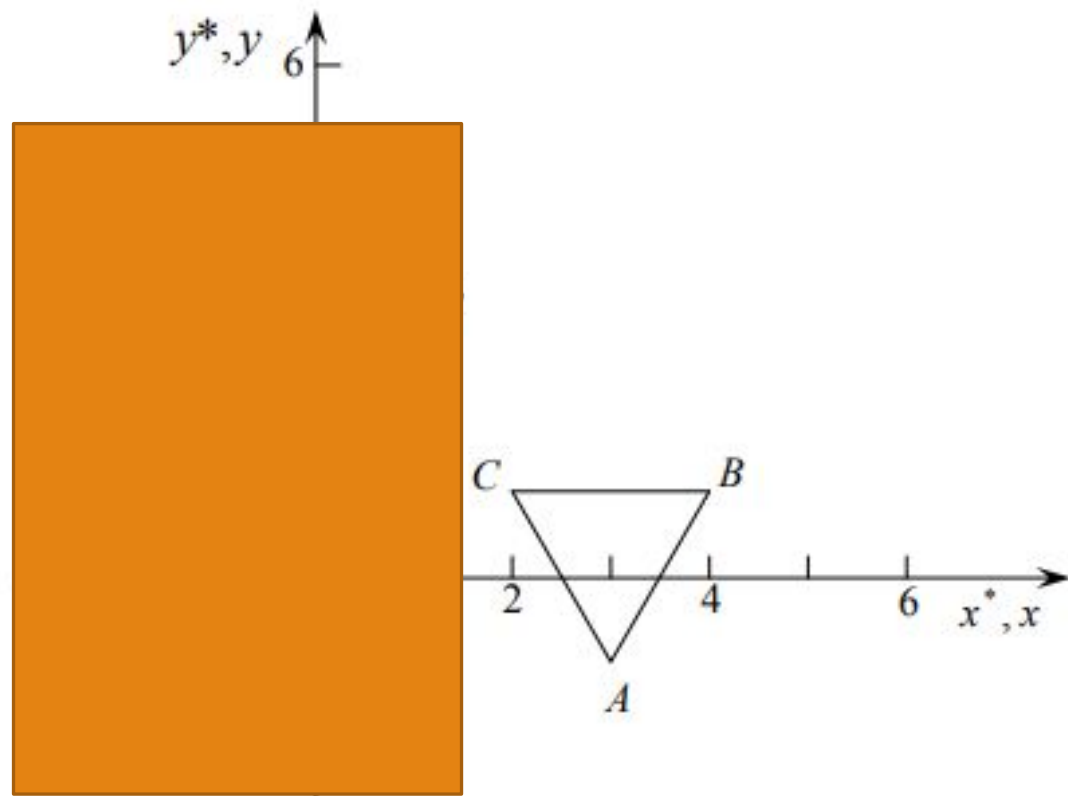
$$m_2 = \frac{(bx_2 + dy_2) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)} = \frac{b + d \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{a + c \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}$$

# Преобразование пересекающихся линий

---

# Вращение вокруг начала координат

---



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

90 градусов

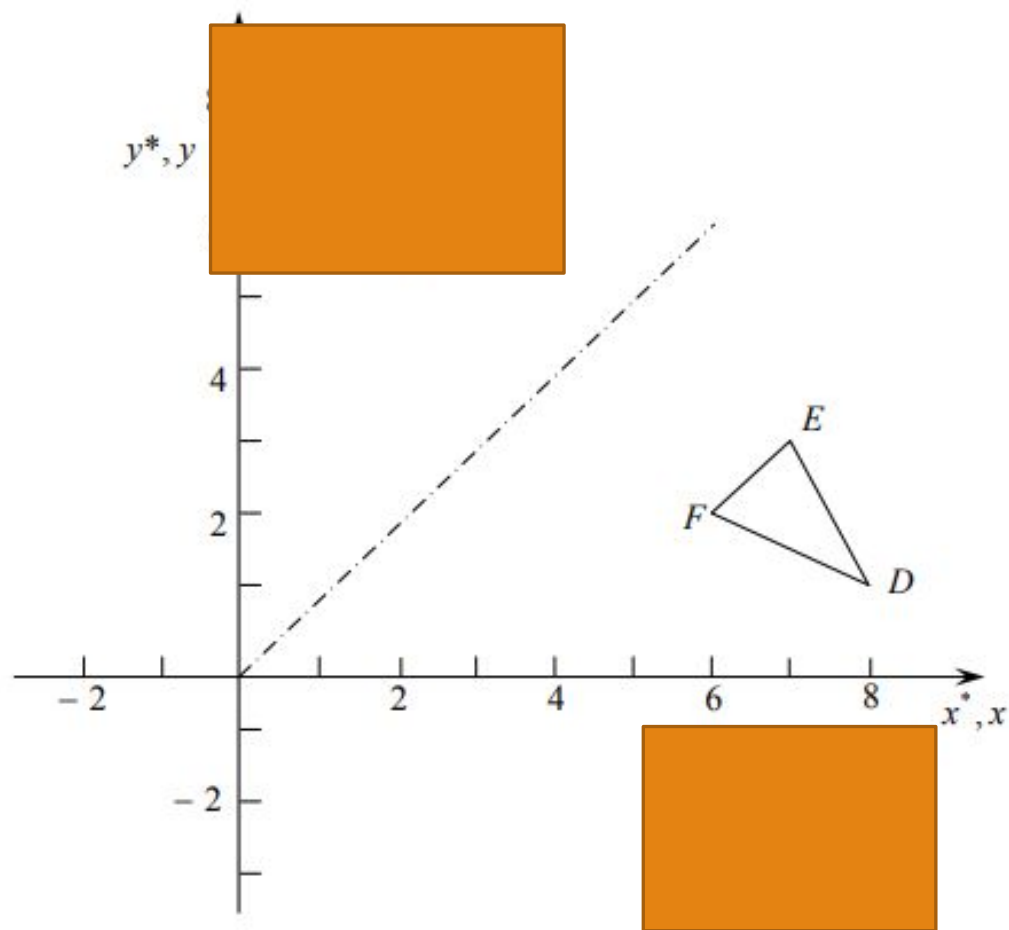
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

180 градусов

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

270 градусов

# Отображение



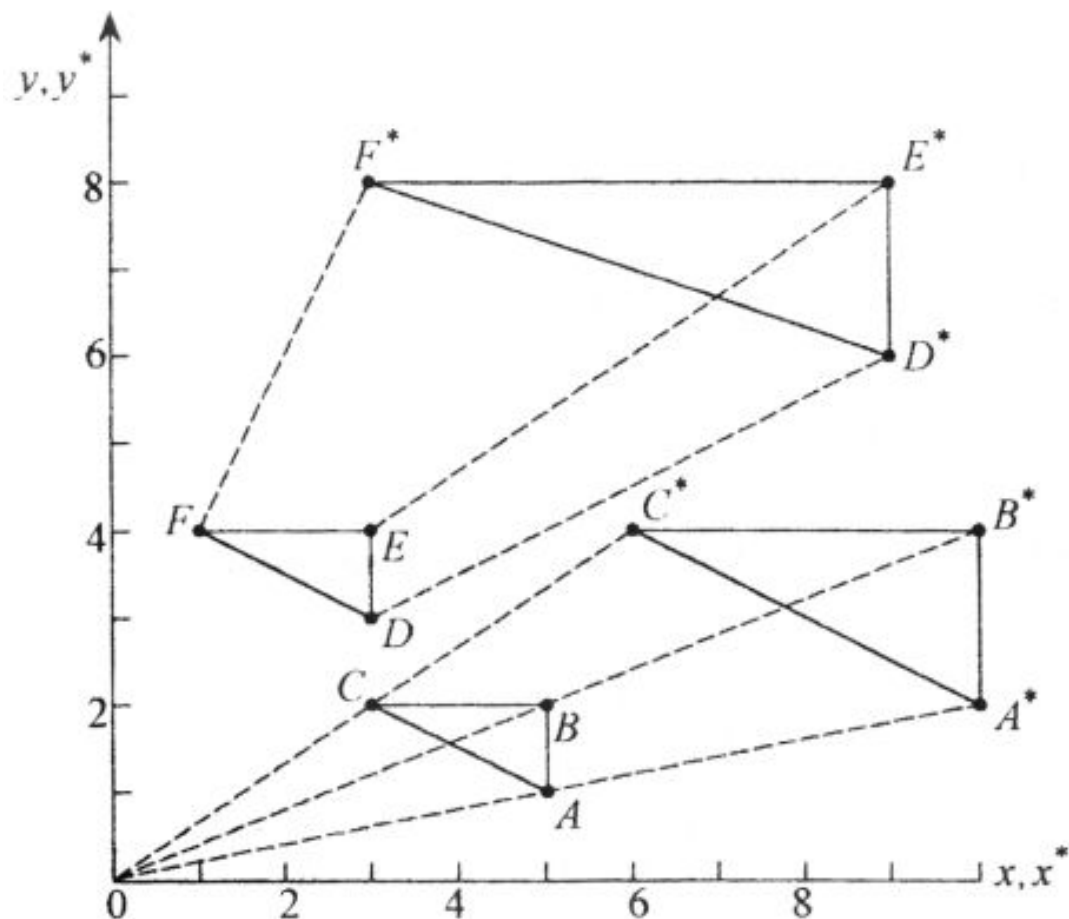
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ось  $y=x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ось  $y=0$

# Изменение масштаба

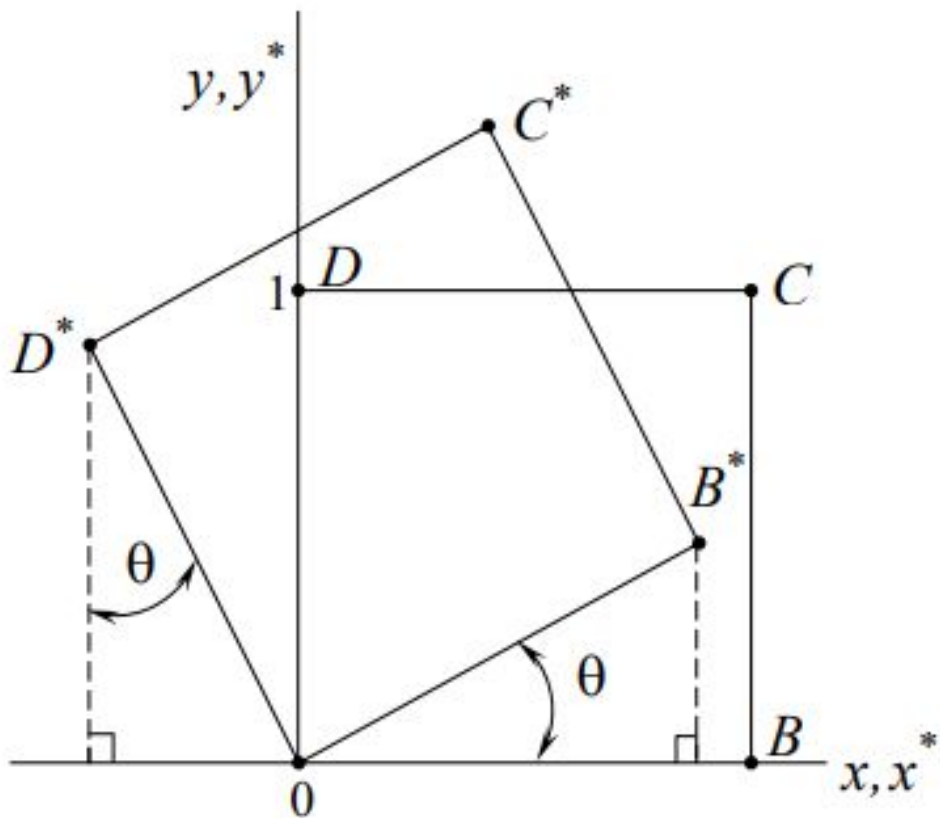


Изменение масштаба определяется значением двух членов основной диагонали матрицы.

$a=d$  – масштабирование

$a \neq d$  – масштабирование с искажением

# Произвольная матрица вращения



$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



# Однородные координаты и двумерное смещение

---

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{bmatrix} = [x+m \ y+n] = [x^* \ y^*]$$

$$[x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \ y+n \ 1] = [x^* \ y^* \ 1] \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad y^* = \frac{y}{h}$$

Представление  $n$ -мерного вектора  $(n+1)$ -мерным называется *однородным координатным воспроизведением*; координаты  $x, y, h$  - *однородными координатами*.

# Однородные координаты и двумерное смещение

---

Все преобразования матрицей  $2 \times 2$  (вращение, отображение, покоординатное масштабирование, смещение) реализуются в однородных координатах с помощью матрицы:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax + cy \ bx + dy \ 1] = [x \ y \ h]$$
$$x^* = \frac{x}{h} = ax + cy, \quad y^* = \frac{y}{h} = bx + dy$$

# Общий вид матрицы преобразования 3x3

---

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

$a, b, c, d$  – масштабирование, сдвиг и вращение

$m, n$  – перенос(двумерное смещение)

$p, q, s$  – ???

# Полное изменение масштаба

---

$$[x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ s]$$

$$[x^* \ y^*] = [x/s \ y/s] \quad s > 1 \text{ – уменьшение, } s < 1 \text{ –}$$

увеличение  
Аналогично использованию двумерной матрицы

$$\begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

# Получение проекций

---

$$[x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad px + qy + 1]$$

Переменная  $H$  – уравнение плоскости в трёхмерном пространстве

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px + qy + 1} & \frac{y}{px + qy + 1} \end{bmatrix}$$

