Простейшие математические операции в КГ. Преобразования на плоскости

Исторический экскурс

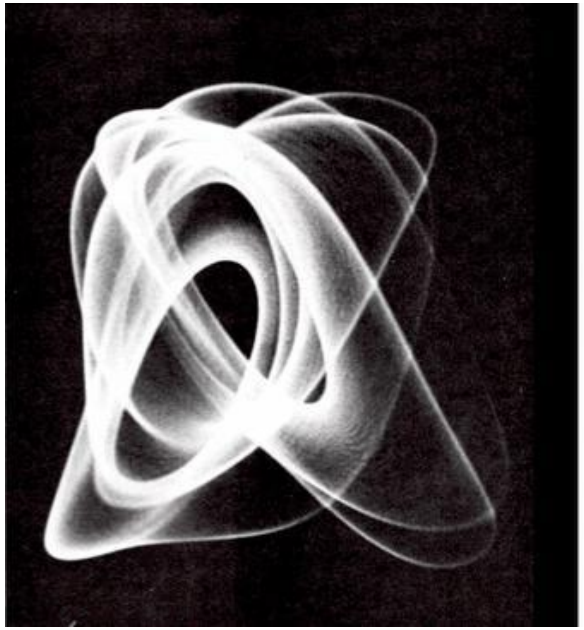
- 3 ~~сентября~~ декабря – день комп. графики (3December)

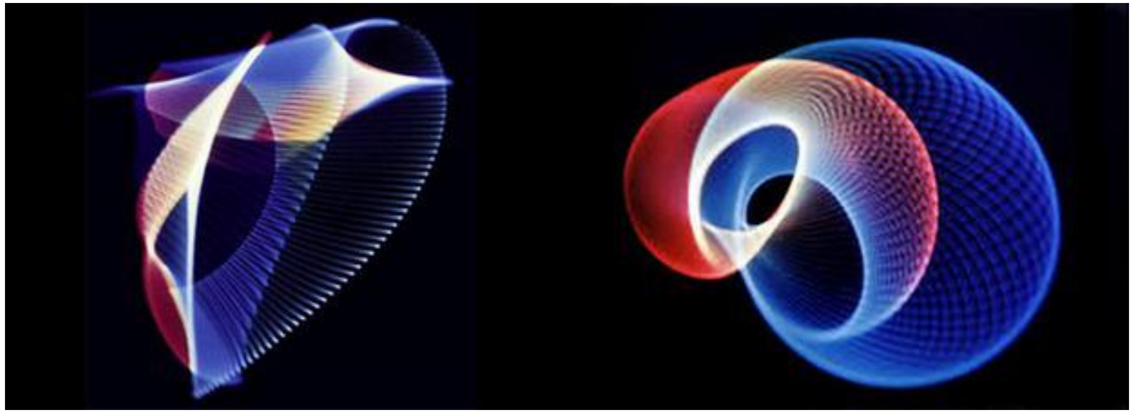
Исторический экскурс

- 1950-е годы: от текстовых изображений к графической

1950-е годы

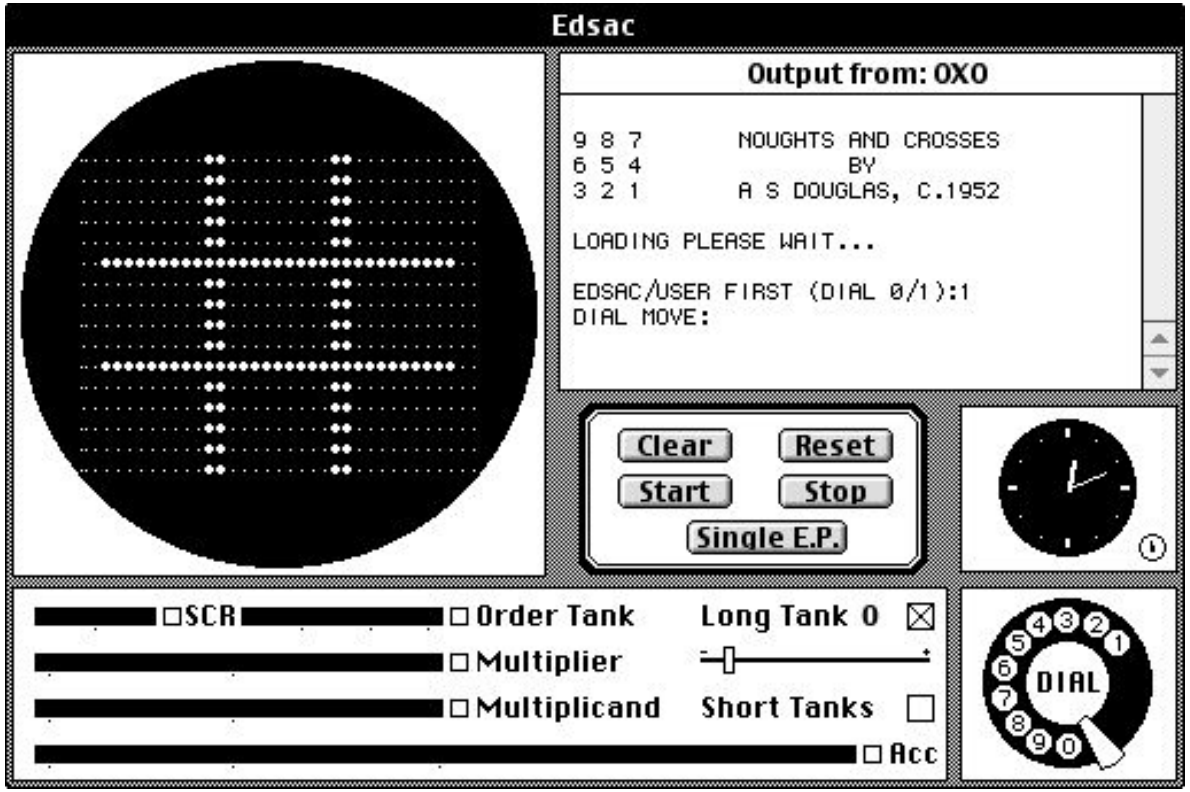
- 1950, Бенджамин Лапоски, рисунки на осциллографе





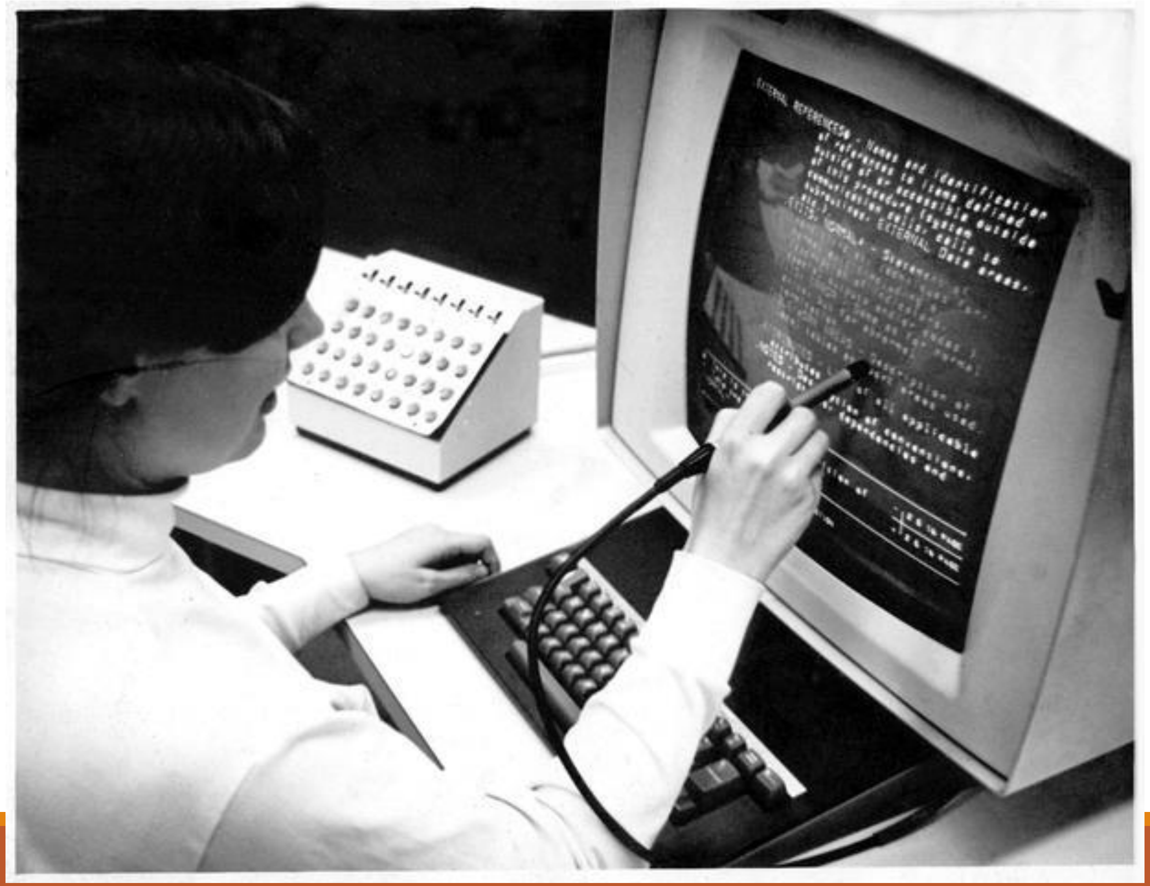
1950-е годы

- 1952, Александр Дуглас, игра OXO для компьютера EDSAC



1950-е годы

- 1955, IBM???, световое перо



1950-е годы

- 1957, Расселл Кёрш, барабанный сканер для компьютера SEAC, первая в мире цифровая фотография

1950-е годы

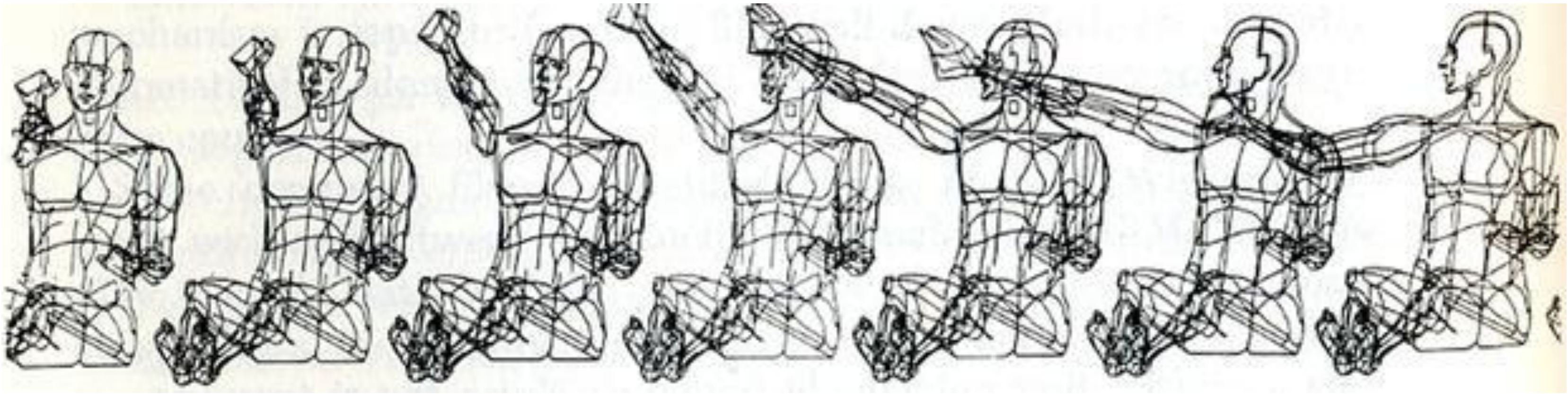
- 1958, MIT, Lincoln TX-2, графическая консоль

1950-е годы

- 1958, Джон Уитни, предиктор Керрисона, заставка к фильму Хичкока «Головокружение»

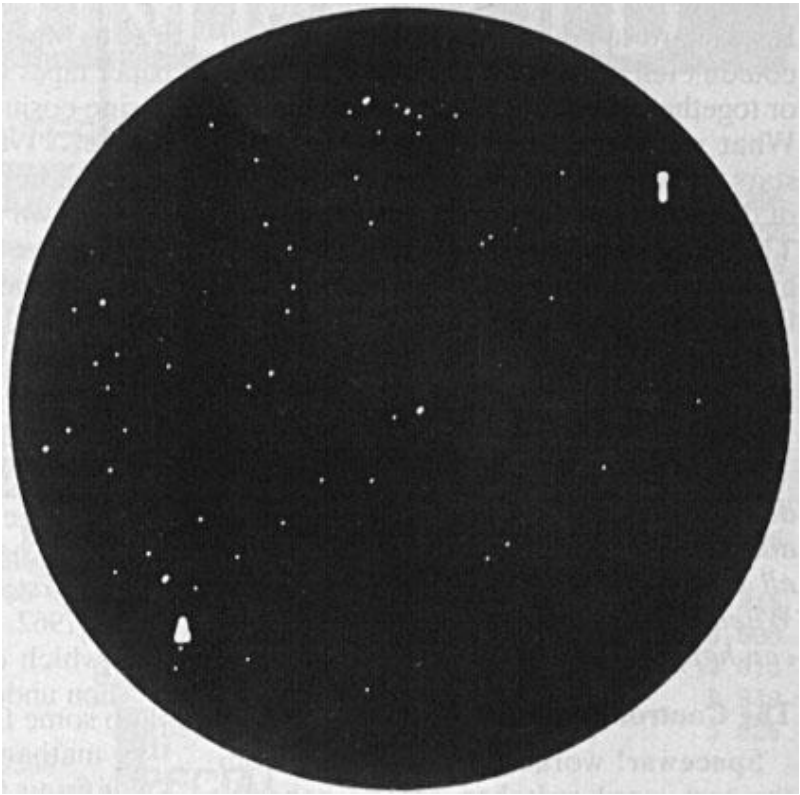
1960-е годы: от "Альбома" к мультипликации

- 1960, Уильям Феттер, Boeing Aircraft, термин «компьютерная графика»



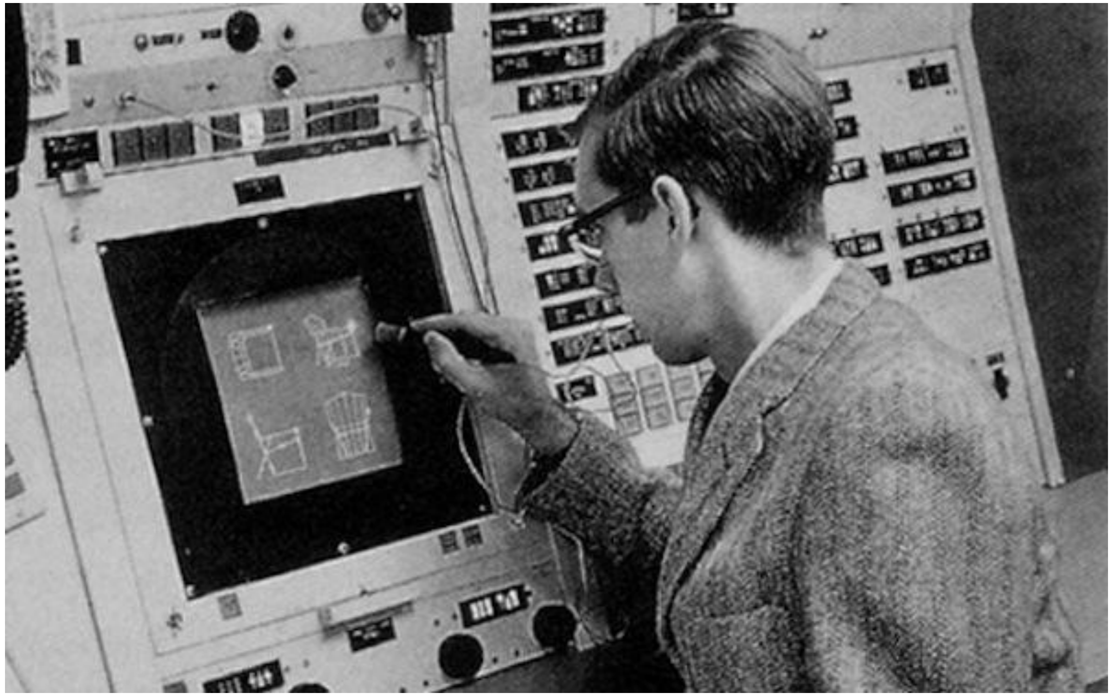
1960-е годы

- 1962, Стив Рассел, Spacewar! для компьютера DEC PDP-1



1960-е годы

- 1963, Айван Сазерленд, Sketchpad для TX-



1960-е годы

- 1963, Кен Ноултон, BeFlix – первый язык КГ
- 1965-1971, Стэн Вандербик, Poem Field
- 1967, университет Юты, НИИ КГ
- 1968, Evans&Sutherland
  - Эдвин Кэтмелл, Disney Pixar
  - Джон Уорнок, Adobe Systems, PostScript
  - Джеймс Кларк, Silicon Graphics, Netscape
- 1968, Николай Константинов, «Кошечка»

Алгебраическое изображение точек

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Матричные операции. Определения.

- Матрица
- Порядок матрицы
- Главная диагональ
- Нулевая матрица
- Единичная матрица

Сложение и вычитание матриц

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1..n; j = 1..m$$

Умножение матриц

A[k * m_1], B[m_2 * n], m_1=m_2 $\rightarrow$ A * B = C[k * n]

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Определитель квадратной матрицы

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

A_{ij} – алгебраическое дополнение матрицы А (матрица (n-1)*(n-1), получаемая путем вычеркивания из матрицы А элементов i-ой строки и элементов j-ого столбца)

Определитель квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} |A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \end{aligned}$$

Обращение квадратной матрицы

$AT = B \rightarrow T = A^{-1}B$, A^{-1} — обратная к A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & \cdots & |A_{1n}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & \cdots & |A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{n1}| & |A_{n2}| & \cdots & |A_{nn}| \end{bmatrix}^T$$

T – операция транспонирования(строки – в столбцы, столбцы – в строки)

Обобщение сути задач КГ

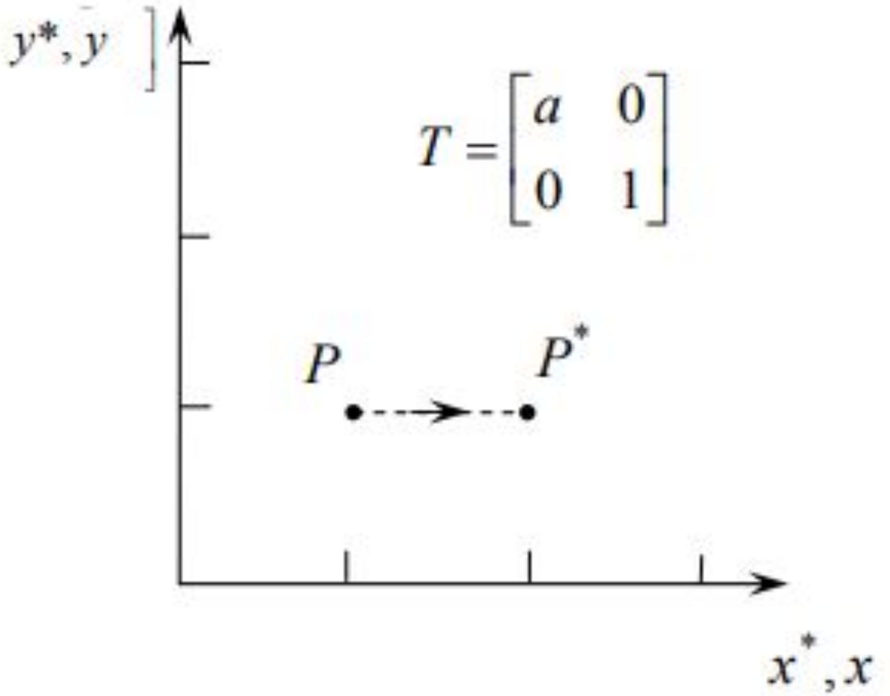
Интерпретация матричного умножения как геометрического оператора является основой математических преобразований, используемых в машинной графике.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

Преобразование точек

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y] = [x^* \quad y^*]$$

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \quad y] = [x^* \quad y^*]$$

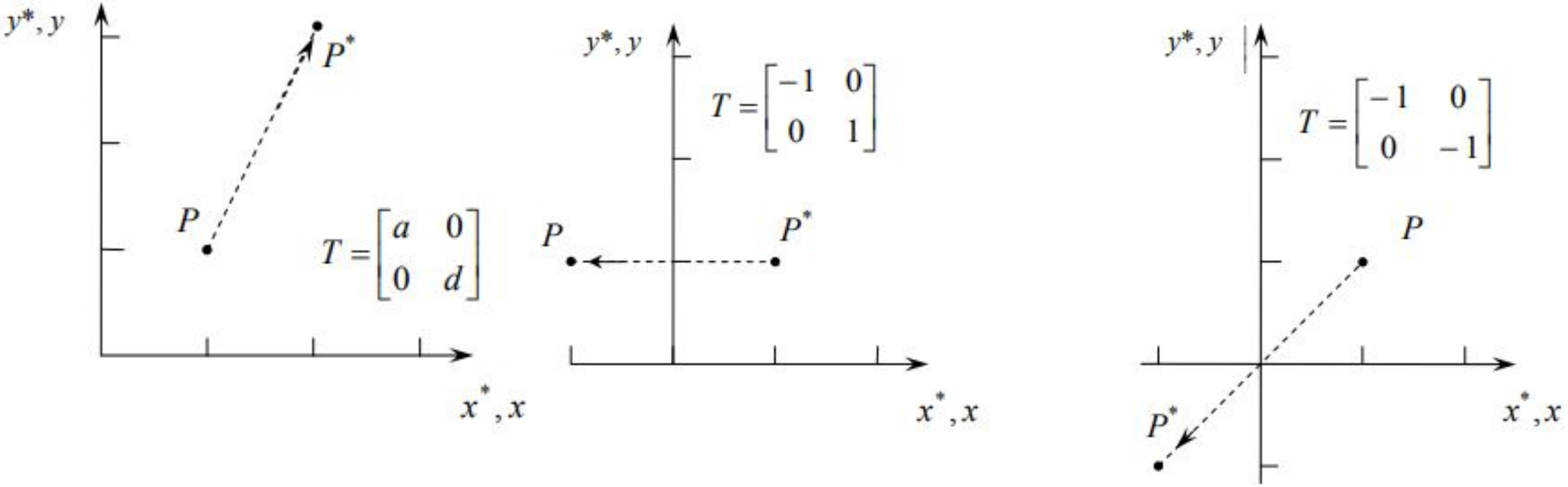


a>1 – увеличение масштаба,

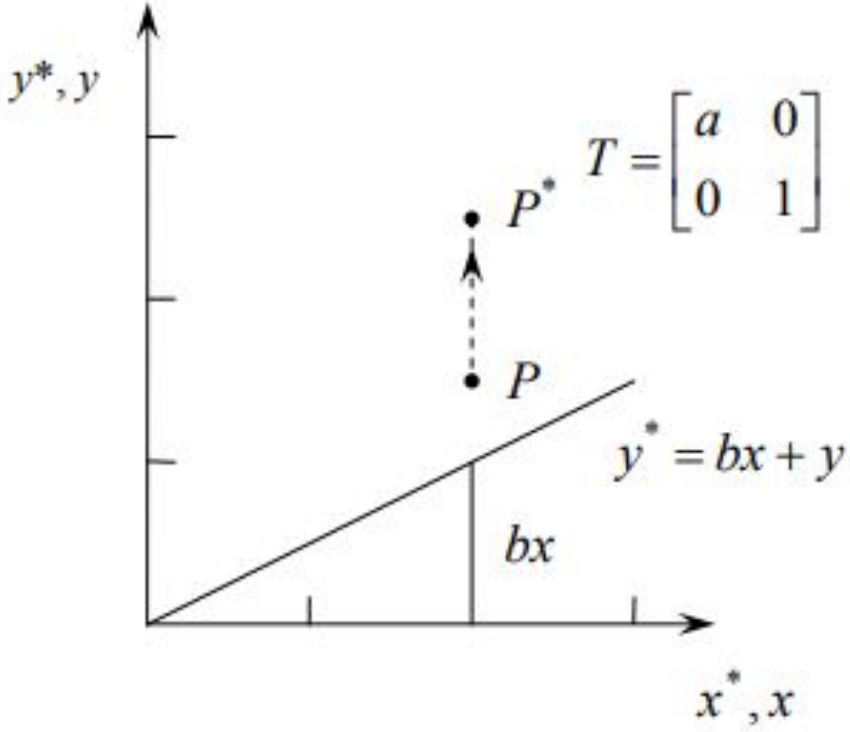
0<a<1 – уменьшение масштаба,

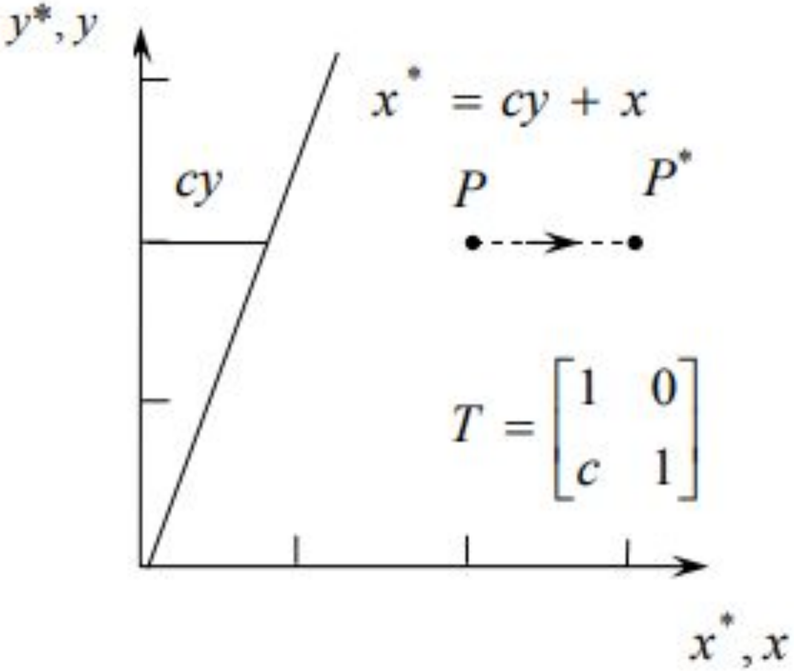
a<0 – отображение по оси y

Преобразование точек

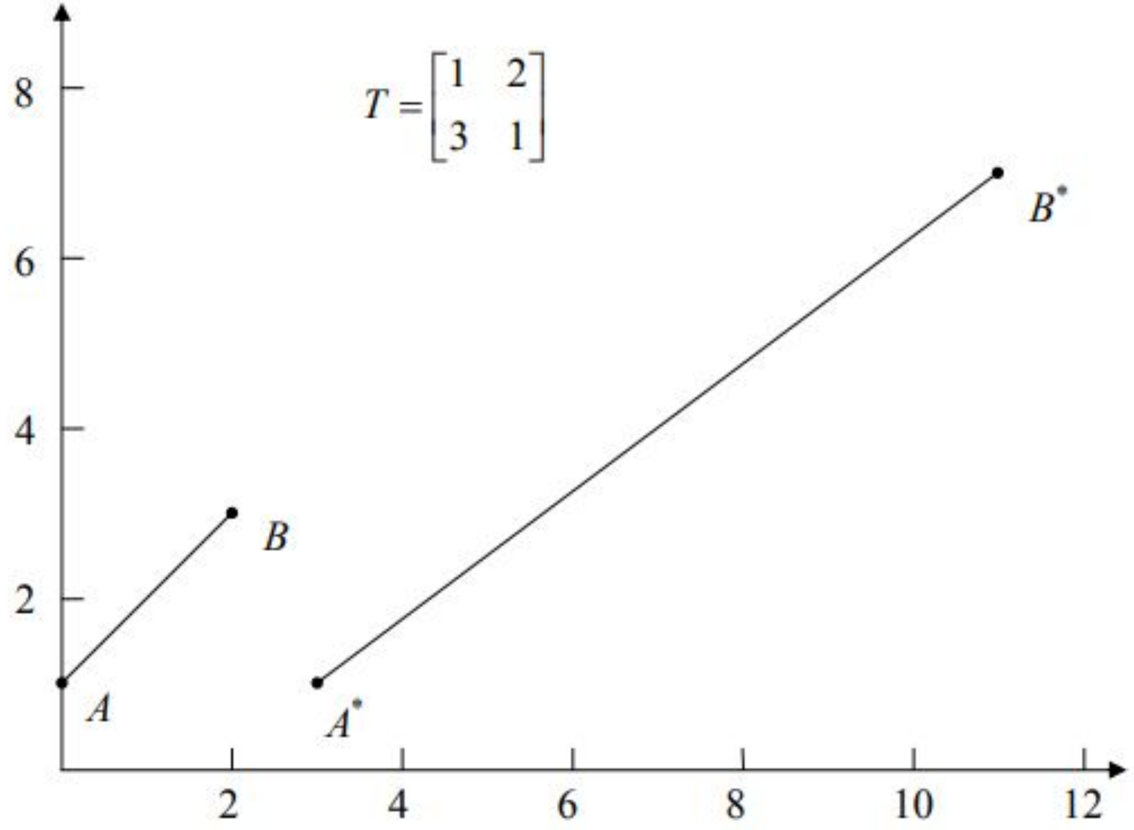


Преобразование точек





Преобразование прямых линий



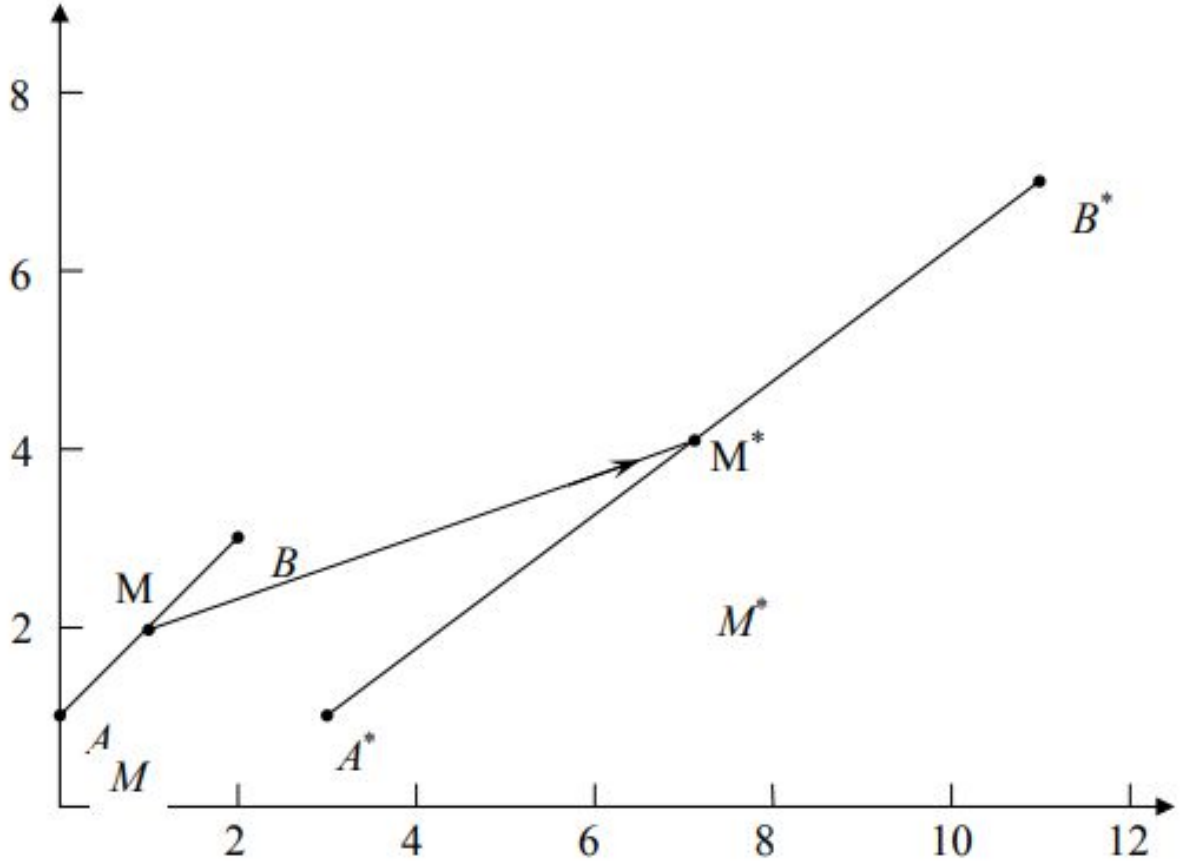
$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = A^*$$

$$BT = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \end{bmatrix} = B^*$$

$$LT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = L^*$$

Преобразование середины отрезка



$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ax_1 + ax_2 + cy_1 + cy_2}{2} \\ \frac{bx_1 + bx_2 + dy_1 + dy_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Преобразование параллельных линий

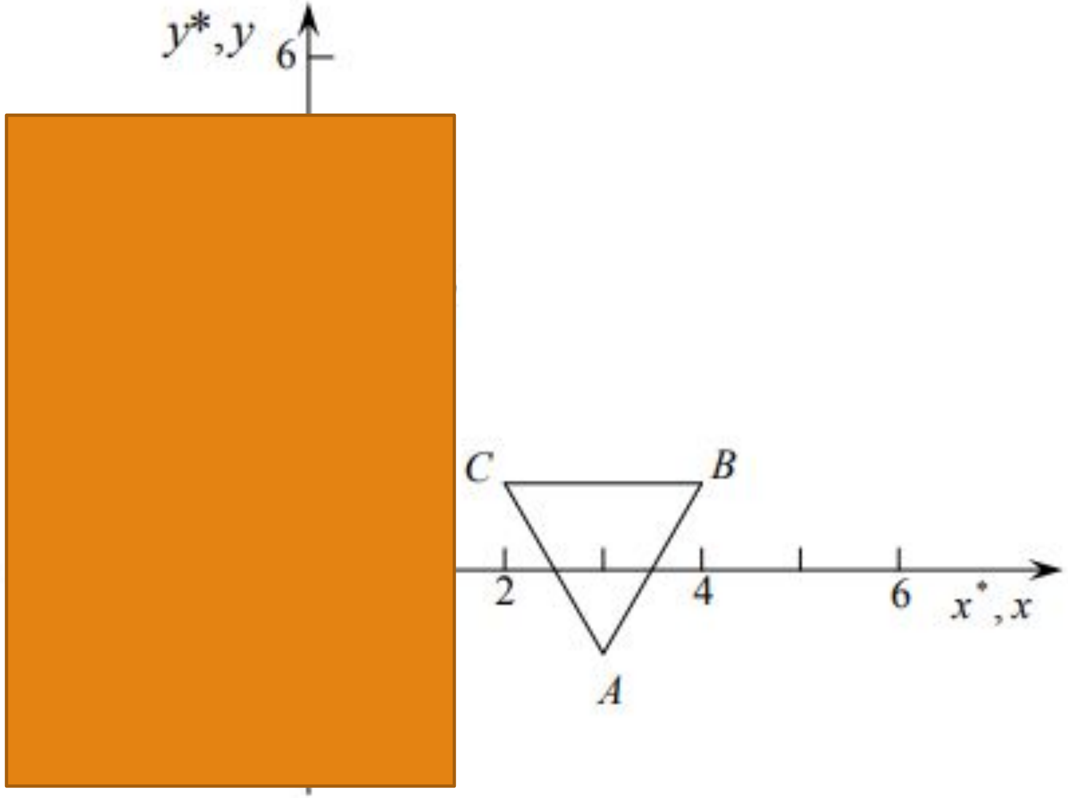
$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix}$$

$$m_2 = \frac{(bx_2 + dy_2) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)} = \frac{b + d\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{a + c\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}$$

Преобразование пересекающихся линий

Вращение вокруг начала координат

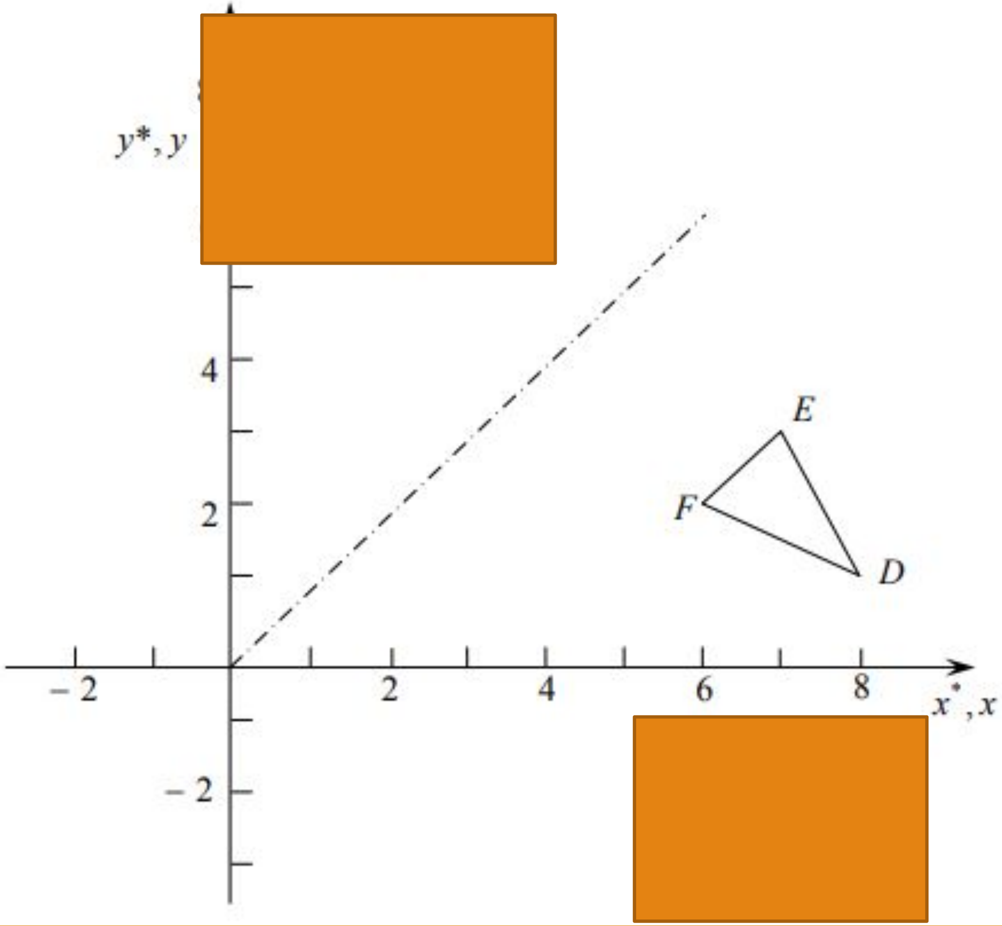


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ 90 градусов

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ 180 градусов

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 270 градусов

Отображение



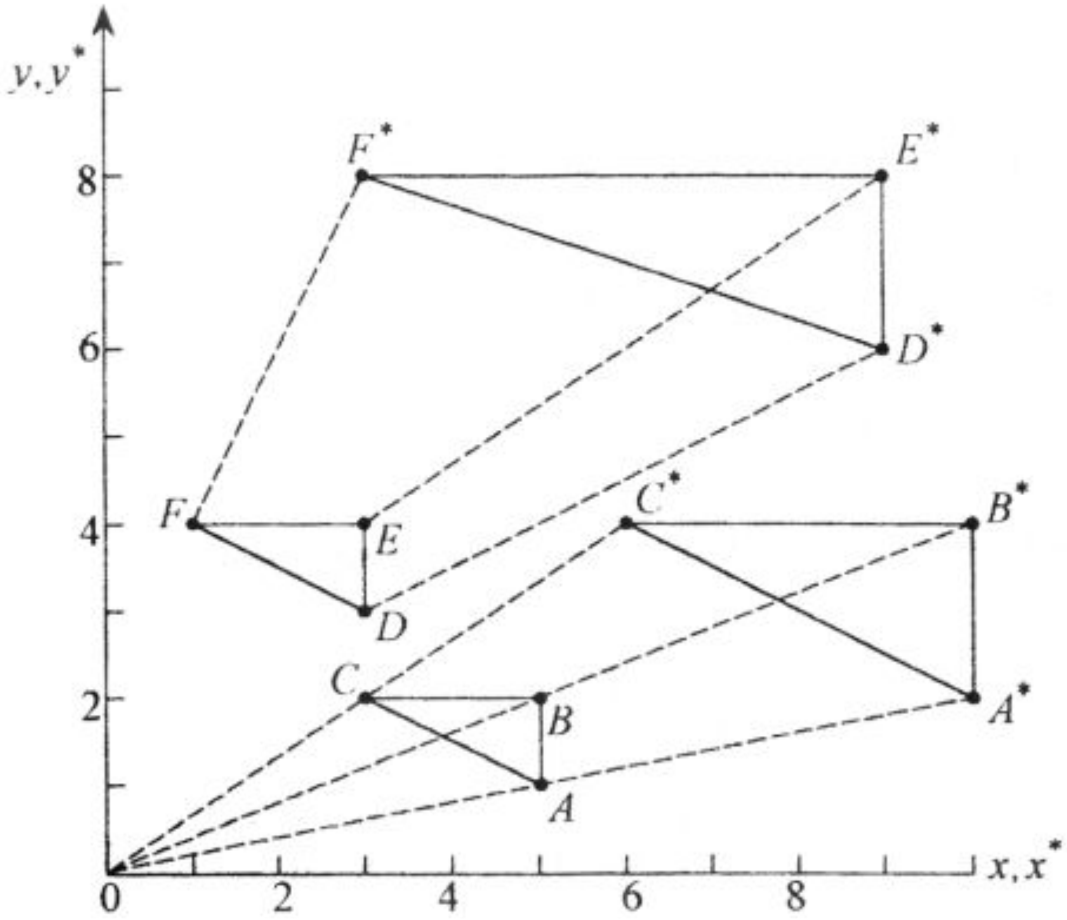
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ось y=x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ось y=0

Изменение масштаба

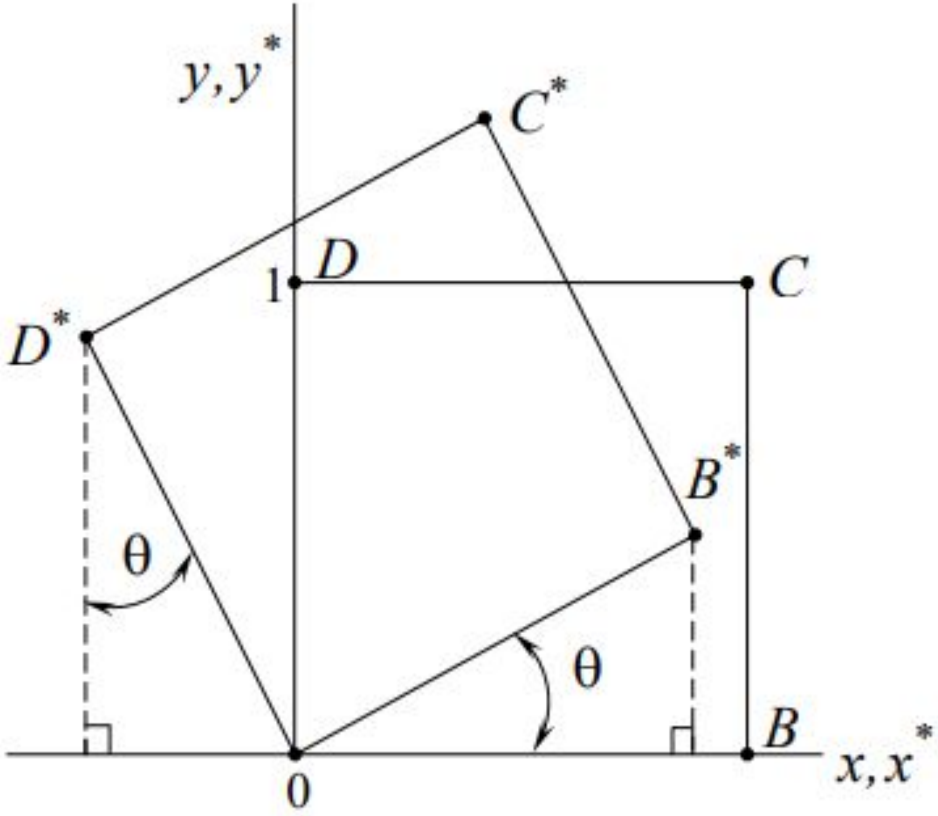


Изменение масштаба определяется значением двух членов основной диагонали матрицы.

a=d – масштабирование

a<>d – масштабирование с искажением

Произвольная матрица вращения



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Однородные координаты и двумерное смещение

$$[x\ y\ 1]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ m & n\end{bmatrix}=[x+m\quad y+n]=[x^* y^*]$$

$$[x\quad y\quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & n & 1\end{bmatrix}=[x+m\quad y+n\quad 1]=[x^*\quad y^*\quad 1]$$

$$x^*=\frac{x}{h},\quad y^*=\frac{y}{h}$$

Представление *n*-мерного вектора (*n+1*)-мерным называется *однородным координатным воспроизведением*; координаты *x*, *y*, *h* - *однородными координатами*.

Однородные координаты и двумерное смещение

Все преобразования матрицей 2×2 (вращение, отображение, покоординатное масштабирование, смещение) реализуются в однородных координатах с помощью матрицы:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix}$$

$$x^* = \frac{x}{h} = ax + cy,\ y^* = \frac{y}{h} = bx + dy$$

Общий вид матрицы преобразования 3x3

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{bmatrix}$$

a, b, c, d – масштабирование, сдвиг и вращение

m, n – перенос(двумерное смещение)

p, q, s – ???

Полное изменение масштаба

$$[x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \quad y \quad s]$$

$$[x^* \quad y^*] = [x/s \quad y/s]$$

s>1 – уменьшение, s<1 – увеличение

Аналогично использованию двумерной матрицы

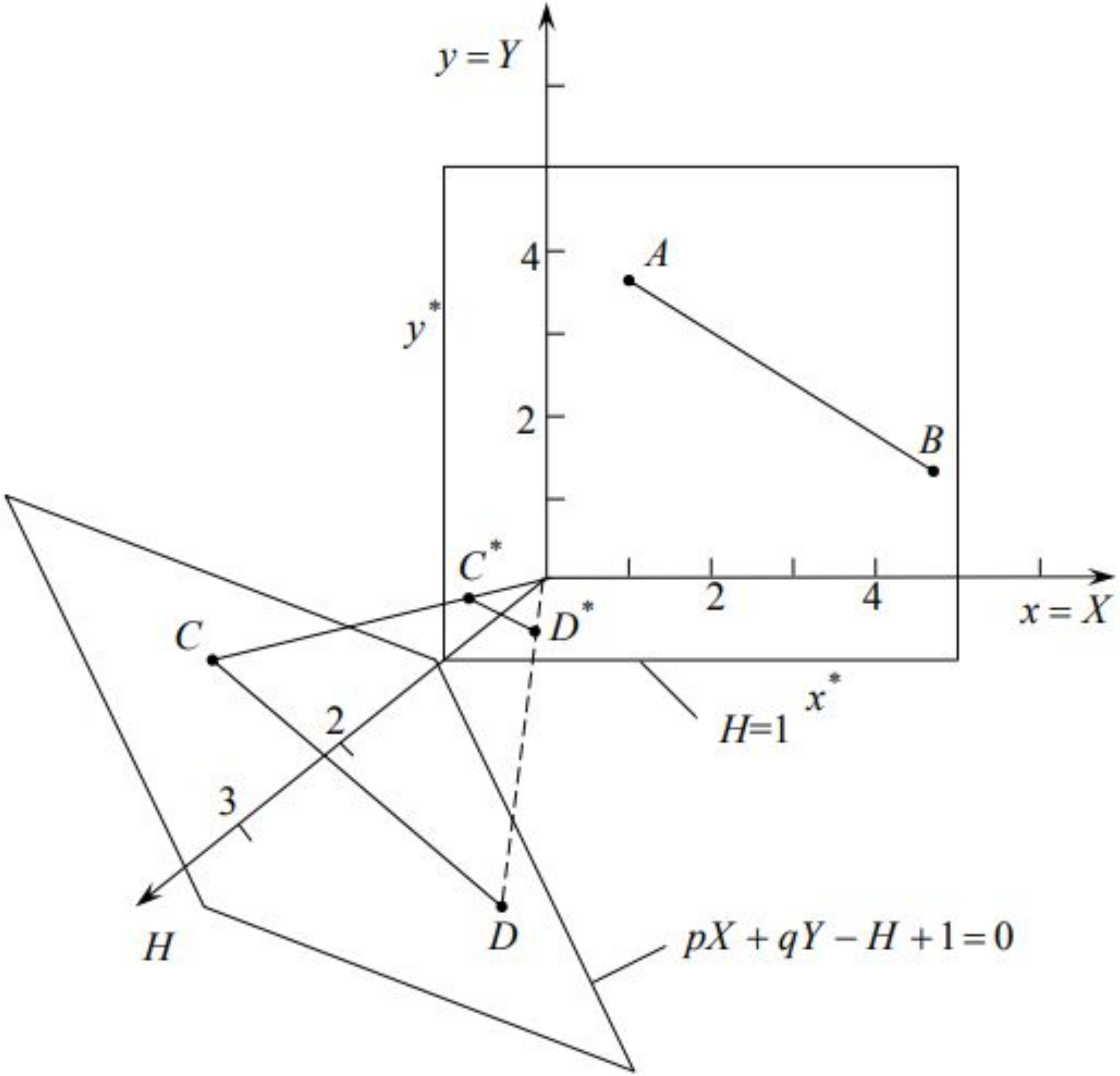
$$\begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

Получение проекций

$$[x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad px + qy + 1]$$

Переменная H – уравнение плоскости в трёхмерном пространстве

$$[x^* \quad y^*] = \left[\frac{x}{px + qy + 1} \quad \frac{y}{px + qy + 1} \right]$$



$y = Y$
4
2
y^*
A
B
C^*
D^*
C
2
4
$x = X$
x^*
$H=1$
2
3
H
D
$pX + qY - H + 1 = 0$