Текстовые задачи

Задачи на прогрессию

Задача 1.

Бригада маляров красит забор длиной 630 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 140 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение:

В задаче фигурирует арифметическая прогрессия (назовем ее $\{a_n\}$), так как бригада ежедневно увеличивала норму покраски **на одно и то же число метров.** Индекс n отвечает за дни. Само число a_n – количество покрашенных за день метров забора.

Итак, нам известно:

$\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия;

$a_1 + a_n = 140;$

$S_n = 630$ – сумма первых n членов арифметической прогрессии;

Требуется найти n.

Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$$

$$630 = \frac{140}{2} \cdot n;$$

$$n = 9;$$

Ответ: 9.

Задача 2.

Олегу надо решить 315 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Олег решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Олег в последний день, если со всеми задачами он справился за 9 дней.

Решение:

Вводим арифметическую прогрессию $\{a_n\}$:

$a_1 = 11$ – количество решенных задач в первый день;

Решение:

Вводим арифметическую прогрессию $\{a_n\}$:

$a_1 = 11$ – количество решенных задач в первый день;

$n = 9$ –количество дней;

$S_9 = 315$ – количество решенных задач за все 9 дней (сумма 9 первых членов арифметической прогрессии);

Требуется найти a_9.

Итак, $S_9 = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9;$

$315 = \frac{11+a_9}{2} \cdot 9;$

$35 = \frac{11+a_9}{2};$

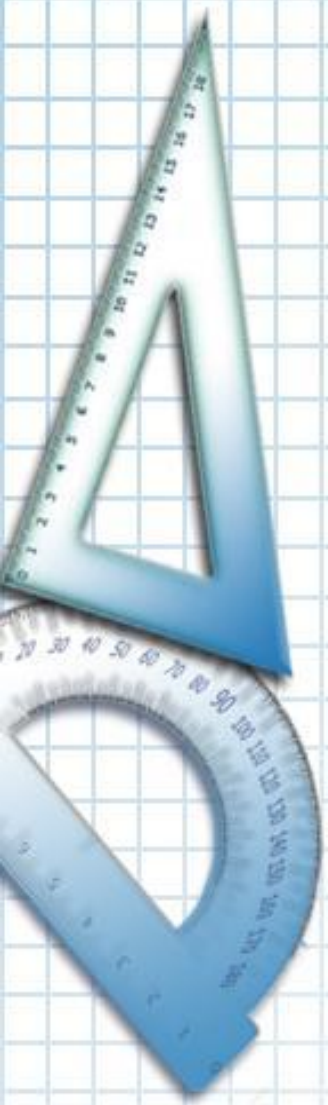
$70 = 11 + a_9;$

$a_9 = 59;$

Ответ: 59.

Задача 3.

Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 9 километров. Определите, сколько километров прошел турист за пятый день, если весь путь он прошел за 9 дней, а расстояние между городами составляет 189 километров.



Решение:

Как и в предыдущих задачах имеем дело с арифметической прогрессией.

Нам известно:

$a_1 = 9;$

$S_9 = 189;$

Требуется найти a_5.

Согласно формуле суммы n-первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ имеем:

$S_9 = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9;$

$189 = \frac{9+a_9}{2} \cdot 9;$

$42 = 9 + a_9;$

$a_9 = 33;$

Воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ чтобы найти разность d:

$a_9 = a_1 + 8d;$

$33 = 9 + 8d;$

$d = 3;$

Тогда $a_5 = a_1 + 4d;$

$a_5 = 9 + 4 \cdot 3;$

$a_5 = 21;$

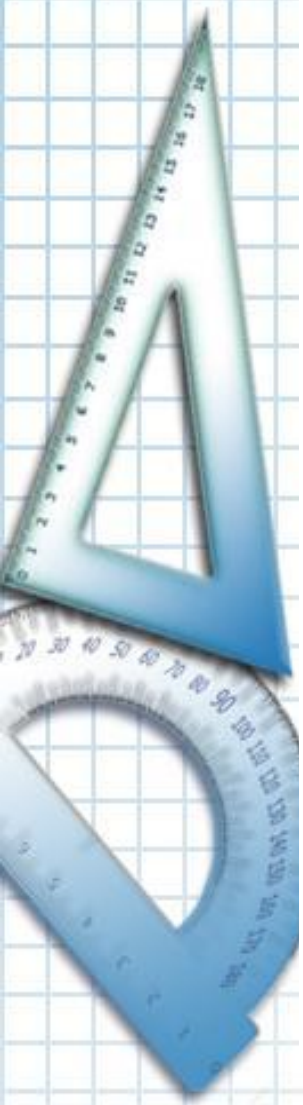
Ответ: 21.

Задача 4.

Бизнесмен Плюшкин получил в 2000 году прибыль в размере 1000000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 7% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Плюшкин за 2003 год?

Решение:

Очень многие попадаются на этой задачке, считая, что в ней скрывается арифметическая прогрессия.



Нет, все хитрее. Дело в том, что прибавка прибыли – не одинакова каждый год. Каждый год 7% от прибыли предыдущего года в пересчет на рубли – разные величины.

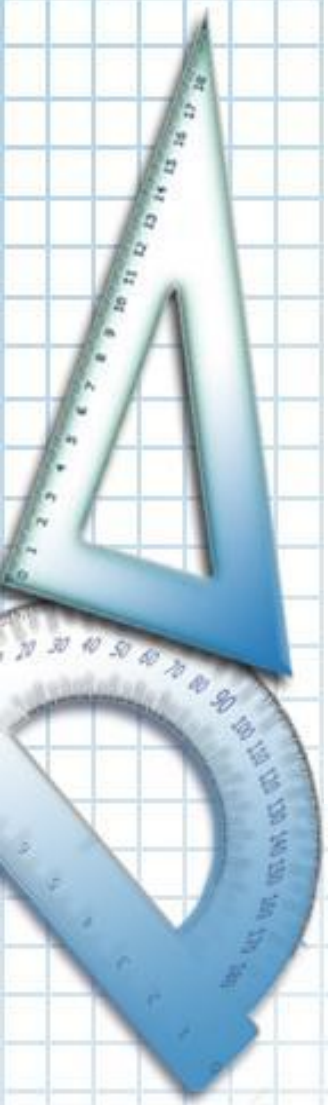
В данном случае имеем дело с геометрической прогрессией $\{c_n\}$.

c_n – прибыль (в рублях) за n-ый год ($n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 2000-ый год считаем первым годом прибыли, 2001-ый – вторым и т.д.).

Известно следующее:

$$c_1 = 1000000;$$

$q = \frac{107}{100}$, так как увеличение **на** 7% – значит увеличение **в** $\frac{107}{100}$ раз.



Требуется узнать c_4.

Согласно формуле n-го члена геометрической прогрессии $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$ имеем:

$c_4 = c_1 \cdot q^3;$

$c_4 = 1000000 \cdot (\frac{107}{100})^3;$

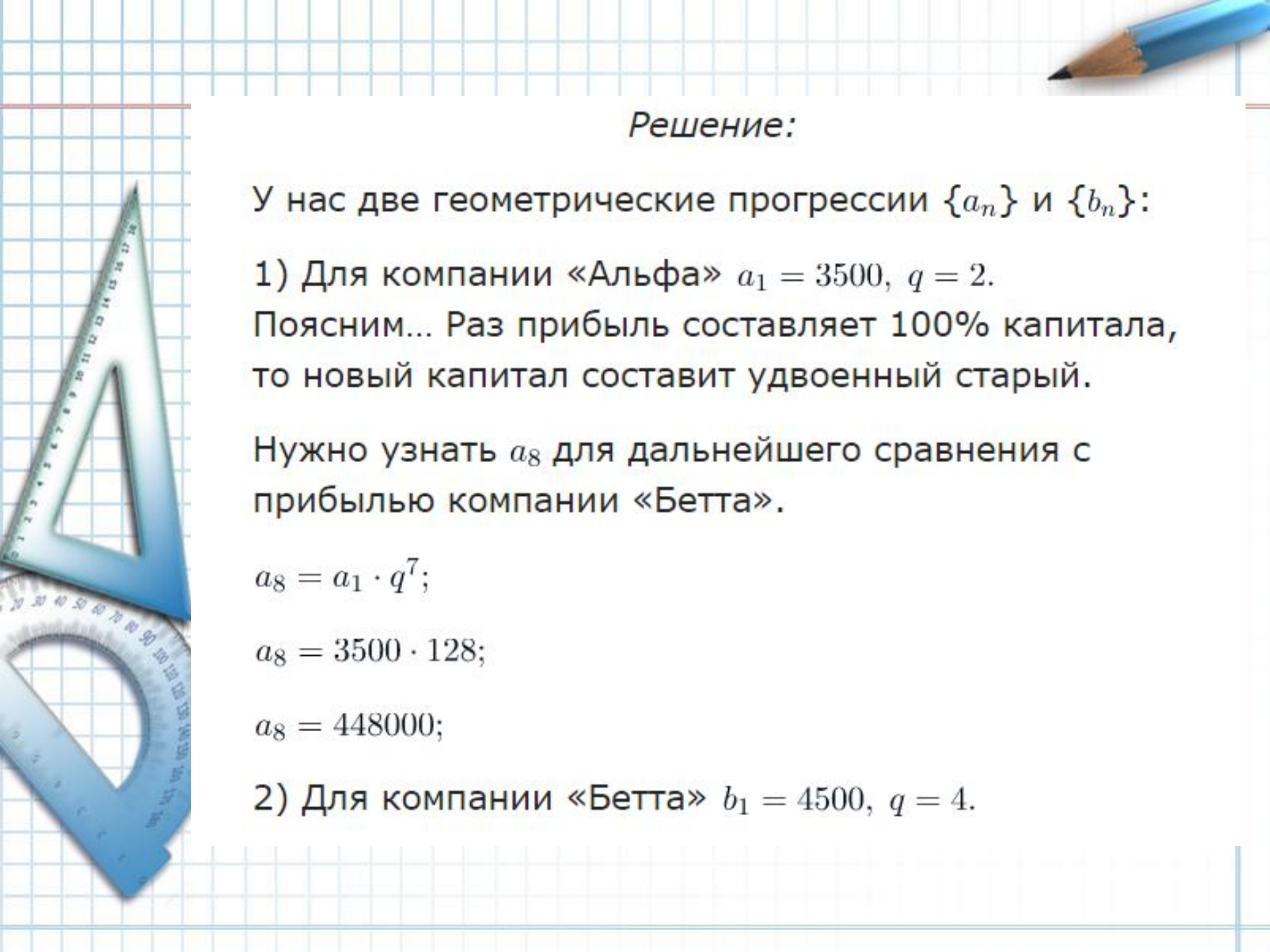
$c_4 = 1225043$ – прибыль за 2003 год.

Ответ: 1225043.

Задача 5.

Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 3500 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 100% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2004 году, имея капитал в размере 4500 долларов, и, начиная с 2005 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 300% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2008 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение:



Решение:

У нас две геометрические прогрессии $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

1) Для компании «Альфа» $a_1 = 3500,\ q = 2.$
Поясним... Раз прибыль составляет 100% капитала, то новый капитал составит удвоенный старый.

Нужно узнать a_8 для дальнейшего сравнения с прибылью компании «Бетта».

$$a_8 = a_1 \cdot q^7;$$

$$a_8 = 3500 \cdot 128;$$

$$a_8 = 448000;$$

2) Для компании «Бетта» $b_1 = 4500,\ q = 4.$

Поясни, почему $q = 4$. Раз по условию прибыль составляет 300%, то новый капитал складывается из старого и утроенного старого, то есть составляет старый капитал, умноженный на 4.

Нужно узнать b_5 для дальнейшего сравнения с прибылью компании «Альфа».

$b_5 = b_1 \cdot q^4;$

$b_5 = 4500 \cdot 256;$

$b_5 = 1152000;$

3) Итак, $1152000 - 448000 = 704000$ – на столько долларов капитал компании «Бетта» был больше капитала компании «Альфа» к концу 2008 года.

Ответ: 704000.