Функции многих переменных

Лекция 2. Функции многих переменных: частные производные, дифференциалы,

- ***Частные производные и дифференцируемость***
- ***Дифференцирование неявных функций***
- ***Касательная плоскость и нормаль к поверхности***
- ***Градиент функции***
- ***Производная по направлению***

Дифференцируемость функции многих переменных

Понятие частных производных

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, определенная на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$ и принимающая действительные значения. Точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области определения.

Определение. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) обозначается одним из следующих символов $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $z'_x(x_0, y_0)$ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично, частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Можно вычислять частную производную так же, как производную функции одной переменной, пользуясь правилами и таблицей производных. При вычислении частной производной по переменной x, вторую переменную y считаем фиксированной. Так, для функции $z = x \cdot \sin y$ в точке $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x \cdot \sin y)'_x = \sin y \cdot (x)'_x = \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x \cdot \sin y)'_y = x \cdot (\sin y)'_y = x \cdot \cos y; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Геометрический смысл частной производной

Пусть функция $z = f(x, y)$ задает некоторую поверхность в пространстве, $y = y_0$ – плоскость, параллельная плоскости XOY. В пересечении поверхности с плоскостью получается некоторая кривая. Тогда геометрический смысл частной производной по переменной x в точке (x_0, y_0) выражается формулой $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной прямой в точке (x_0, y_0) к кривой, являющейся пересечением поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$.

Физический смысл частной производной

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ – это скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) в направлении оси Ox.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0,y_0), если ее приращение представимо в виде суммы главной части, линейной относительно приращений переменных, и бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора $(\Delta x,\Delta y)$, составленного из приращений переменных:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

где A,B – числа, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$.

Главная линейная часть $df(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$ приращения $\Delta f(x_0,y_0)$ называется (*полным*) *дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Теорема (необходимое условие дифференцируемости).
Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), тогда

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0);

2) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). Пусть функция $f(x, y)$ имеет обе частные производные в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0). Тогда функция дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то есть выполняется равенство

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot \Delta y + o(\|h\|).$$

Так как последнее слагаемое в правой части является бесконечно малой более высокого порядка, чем норма вектора, составленного из приращений переменных, то при малых приращениях переменной последнее слагаемое в этой формуле можно отбросить, заменив точное равенство приближенным. Таким образом, получаем формулу для приближенных вычислений

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot \Delta y\,.$$

Эта формула будет тем точнее, чем меньше приращения переменных.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}01)^2}$.

Решение. Введем функцию $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда нужно вычислить значение функции $f(2{,}98;4{,}01)$. Выберем близкую точку $x_0=3;\ y_0=4$, в которой значения функции, а также ее частных производных, вычисляются хорошо. Формула для приближенных вычислений примет вид

$$f(2{,}98;4{,}01)\approx f(3{,}4)+\frac{\partial f}{\partial x}(3{,}4)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(3{,}4)\cdot\Delta y.$$

Приращения переменных $\Delta x=2{,}98-3=-0{,}02;\ \Delta y=4{,}01-4=0{,}01$. Значение функции $f(3,4)=5$. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial x}(3{,}4)=\frac{3}{5}=0{,}6;\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(3{,}4)=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

Подставляя все в формулу, получим

$$f(2{,}98;4{,}01)\approx 5+0{,}6\cdot(-0{,}02)+0{,}8\cdot 0{,}01 \text{ или } \sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}01)^2}\approx 4{,}996.$$

Производная сложной функции

Теорема. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Внутренние функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причем $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Тогда сложная функция $f(t) = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема в точке t_0 и ее производная вычисляется по формуле

$\dfrac{df}{dt}(t_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\dfrac{dx}{dt}(t_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\dfrac{dy}{dt}(t_0)$. Или более кратко

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}\,.$$

Теорема. Пусть внешняя функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0). Внутренние функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0,v_0), причем $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. Тогда сложная функция $f(u,v)=f(x(u,v),\,y(u,v))$ также дифференцируема в точке (u_0,v_0) и ее частные производные вычисляются по формулам

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}\,.$$

<u>Пример 1</u>. Для функции $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$ найти частную и полную производные по переменной x.

Решение. 1) Вычислим частную производную по переменной x, считая переменную y постоянной

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Если подставить $y = \sqrt{x^2+1}$, то получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$.

2) Применим формулу полной производной $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Частная производная по переменной y равна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

При $y = \sqrt{x^2+1}$ частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Производная функции y по переменной x равна $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Подставляя эти выражения в формулу для полной производной, получаем

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

<u>Пример 2</u>. Доказать, что функция $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$ удовлетворяет равенству $\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y$.

Решение. Функция $F(\sin y - \sin x)$ является сложной. Внешняя функция $F(t)$, а внутренняя $t = \sin y - \sin x$. Вычислим частные производные функции u, считая производную от второго слагаемого по правилу сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + \frac{dF}{dt} \cdot (\sin y - \sin x)'_x = \cos x - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dF}{dt} \cdot \cos y.$$

Тогда $$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos y = \left(\frac{dF}{dt} \cdot \cos y \right) \cdot \cos x + \left(\cos x - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x \right) \cdot \cos y =$$

$$= \frac{dF}{dt} \cdot \cos y \cdot \cos x + \cos x \cdot \cos y - \frac{dF}{dt} \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y,$$

что и требовалось доказать.

Правила вычисления дифференциала

Рассмотрим функции нескольких переменных $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Справедливы следующие правила для вычисления дифференциалов:

1) $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = const$;

2) $d(u + v) = du + dv$;

3) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Неявные функции и системы неявных функций

Рассматриваем случай, когда функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$.

Если предположить, что неявная функция $y(x)$ существует и функции $y(x)$ и $F(x,y)$ дифференцируемы, то формула для вычисления производной неявной функции выводится легко. В этом случае дифференцируема сложная функция $F(x)=F(x,y(x))$ и ее производная вычисляется по формуле полной производной $F'(x)=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$. Так как $F(x)\equiv 0$, то $F'(x)\equiv 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$. Отсюда получаем формулу для вычисления производной неявной функции $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ или $\boxed{y'(x)=-\dfrac{F_x'}{F_y'}}$.

Пример. Найти производную функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3 + 2y = 2x$.

Решение. Функция $y(x)$ задается неявно уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = y^3 + 2y - 2x$. Частные производные этой функции равны $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Подставляя в формулу для вычисления производной функции, заданной неявно, получаем $y'(x) = \dfrac{2}{3y^2 + 2}$.

Пусть теперь функция $z(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$. Предположим, что функции $z(x,y)$ и $F(x,y,z)$ дифференцируемы. Тогда дифференцируема сложная функция $F(x,y,z(x,y))$. Вычисляя ее частные производные по формуле сложной функции и учитывая, что функция тождественно равна нулю, получаем $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Отсюда следуют формулы для вычисления частных производных неявной функции $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Пример. Найти частные производные функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $e^z + z - x^2y + 1 = 0$.

Решение. Функция $F(x,y,z) = e^z + z - x^2y + 1$ задает неявно функцию $z(x,y)$. Вычислим ее частные производные: $F_x' = -2xy$, $F_y' = -x^2$, $F_z' = e^z + 1$.

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x'}{F_z'} = \dfrac{2xy}{e^z + 1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y'}{F_z'} = \dfrac{x^2}{e^z + 1}$.

Неявные функции от одной переменной, определяемые системой уравнений

Пусть система $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$

задает неявно две функции одного переменного $y(x)$, $z(x)$.

Подставим их в уравнения системы, получим

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0, \\ \Phi(x,y(x),z(x))=0. \end{cases}$$

Дифференцируем эти тождества по переменной x по правилу производной сложной функции

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y'(x) + \Phi'_z \cdot z'(x) = 0. \end{cases}$$

Это система линейных уравнений относительно неизвестных $y'(x)$ и $z'(x)$:

$$\begin{cases} F'_y \cdot y'(x) + F'_z \cdot z'(x) = -F'_x, \\ \Phi'_y \cdot y'(x) + \Phi'_z \cdot z'(x) = -\Phi'_x. \end{cases}$$

то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(x,z)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}; \qquad z'(x) = \frac{dz}{dx} = -\frac{D(F,\Phi)}{D(y,x)} : \frac{D(F,\Phi)}{D(y,z)}.$$

Неявные функции нескольких переменных, определяемые системой уравнений

Рассмотрим функции $z_1 = z_1(x_1,\ldots,x_n), \ldots, z_m = z_m(x_1,\ldots,x_n)$, заданные системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ F_m(z_1,\ldots,z_m,x_1,\ldots,x_n) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Решением этой системы является набор функций, таких, что при подстановке их в систему все уравнения обращаются в тождество.

Введем понятие <u>определителя Якоби</u> – это определитель, составленный из частных производных

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ . & . & . \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix}.$$

Вычисление частных производных функций $z_i = z_i(x_1,\ldots,x_n),\ i=1,\ldots,m,$ определяемых системой $(*)$, можно производить двумя способами.

Первый способ. Дифференцируем каждое уравнение системы $(*)$ по переменной x_l. По правилу сложной функции получаем
$$\frac{\partial F_i}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_l}+\frac{\partial F_i}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_l}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial z_m}\cdot\frac{\partial z_m}{\partial x_l}+\frac{\partial F_i}{\partial x_l}=0\quad (i=1,\ldots,m).$$

Это система линейных уравнений относительно переменных $\frac{\partial z_1}{\partial x_l},\ldots,\frac{\partial z_m}{\partial x_l}$.

Если определитель этой системы (якобиан) $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_m)}\neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера
$$\frac{\partial z_k}{\partial x_l}=-\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_{k-1},x_l,z_{k+1},\ldots,z_m)}:\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(z_1,\ldots,z_m)}.$$

Второй способ. Можно брать дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы $(*)$. Получим систему уравнений относительно переменных $dz_1,\ldots,dz_m$. Так как $dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial x_n}\cdot dx_n$, то найдя дифференциалы, мы найдём частные производные.

Пример. Функции $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} uv = 3x - 2y + z, \\ v^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

1) Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$.

2) Доказать, что выполняется тождество $x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + z\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Решение. Возьмём дифференциалы от правой и левой частей каждого из уравнений системы:

$$\begin{cases} d(uv) = d(3x - 2y + z), \\ d(v^2) = d(x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$

Получим относительно переменных dx, dy, dz систему уравнений:

$$\begin{cases} vdu + udv = 3dx - 2dy + dz, \\ vdv = xdx + ydy + zdz. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выражаем $dv = \frac{x}{v}dx + \frac{y}{v}dy + \frac{z}{v}dz$.

Учитывая формулу полного дифференциала $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$, находим частные производные $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{v}, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{v}$.

Подставив в первое уравнение системы дифференциал dv, получим

$$vdu = \left(3 - \frac{ux}{v}\right)dx - \left(2 + \frac{uy}{v}\right)dy + \left(1 - \frac{uz}{v}\right)dz.$$

Учитывая формулу полного дифференциала $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$,

находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3v - ux}{v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2v + uy}{v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v - uz}{v^2}$.

Для проверки пункта 2) подставим найденные частные производные в левую часть доказываемого тождества:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x(3v - ux) - y(2v + uy) + z(v - uz)}{v^2} =$$

$$= \frac{v(3x - 2y + z) - u(x^2 + y^2 + z^2)}{v^2}.$$

Учитывая первоначальные уравнения системы, получаем требуемое тождество. Пункт 2) доказан.

Геометрические приложения дифференциального исчисления

Касательная плоскость и нормальная прямая к поверхности

Первый случай: поверхность задана явным уравнением.
Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0).

<u>Определение</u>. Плоскость $z = Ax + By + C$ называется касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), если $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = Ax + By + C + o(\|h\|), \qquad (1)$$

где $h = (\Delta x, \Delta y) = (x - x_0, y - y_0)$.

Подставим $x = x_0$, $y = y_0$ в (1), получим $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$. Отсюда находим $C = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$. Подставляя в (1), получаем

$$f(x, y) = Ax + By + f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0 + o(\|h\|) \text{ или}$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\|h\|).$$

Так как функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$. Подставляя найденные значения

констант A, B, C в уравнение касательной плоскости, имеем

$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$ — уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Определение. Нормальная прямая – это прямая, проходящая через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ перпендикулярно к касательной плоскости.

Найдем уравнение нормальной прямой.

Вектор нормали $\{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$ к касательной плоскости также является направляющим вектором для нормальной прямой. Используя уравнение прямой, имеющей заданный направляющий вектор и проходящей через заданную точку, имеем

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

— уравнение нормальной прямой к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Второй случай: поверхность задана неявно.

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, причем функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), а функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда частные производные функции $z = f(x, y)$ вычисляются по формулам $f'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(M)}{F'_z(M)}$, $f'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_y(M)}{F'_z(M)}$. Подставив эти выражения в уравнения касательной плоскости и нормальной прямой, выведенные в первом случае, получаем

$$\boxed{F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0} \text{ —}$$

уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к графику функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(M)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M)}}$$ — уравнение нормальной прямой в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ к графику функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$.

Пример. К эллипсоиду $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$.

Решение. Вектор $\vec{N}_1=\{1,-1,2\}$ является нормальным вектором к данной плоскости. Вектор $\vec{N}_2=\{F'_x(M),F'_y(M),F'_z(M)\}$ является вектором нормали к касательной плоскости в точке $M(x_0,y_0,z_0)$. Вычисляя частные производные функции $F=x^2+2y^2+z^2-1$, находим $\vec{N}_2=\{2x_0,4y_0,2z_0\}$.

Тогда уравнение касательной плоскости в точке (x_0,y_0,z_0) имеет вид

$2x_0\cdot(x-x_0)+4y_0\cdot(y-y_0)+2z_0\cdot(z-z_0)=0$ или

$$x_0 \cdot x + 2y_0 \cdot y + z_0 \cdot z - \left(x_0{}^2 + 2y_0{}^2 + z_0{}^2\right) = 0.$$

Из условия, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде, имеем $x_0{}^2 + 2y_0{}^2 + z_0{}^2 = 1$.

Так как плоскости параллельны, то векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ тоже параллельны, поэтому их координаты пропорциональны: $\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-1} = \frac{2z_0}{2} = k$. Отсюда находим $x_0 = \frac{k}{2}$, $y_0 = -\frac{k}{4}$, $z_0 = k$. Уравнение касательной плоскости примет вид

$$\frac{k}{2} \cdot x - \frac{k}{2} \cdot y + k \cdot z - 1 = 0 \text{ или } x - y + 2z = \frac{2}{k}.$$

Так как точка $x_0 = \frac{k}{2}$, $y_0 = -\frac{k}{4}$, $z_0 = k$ лежит на эллипсоиде, то $\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{8} + k^2 = 1$, отсюда $k = \pm\sqrt{\frac{8}{11}}$. Тогда $x - y + 2z = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$ – искомые касательные плоскости.

Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Ее дифференциал находится по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

С другой стороны, уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$

имеет вид $z = z_0 + \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$. Отсюда видно,

что $dz = z - z_0$. Итак, геометрический смысл дифференциала функции двух переменных состоит в том, что дифференциал функции в точке равен приращению аппликаты касательной плоскости, проведенной к графику функции в данной точке.

Градиент функции

Градиент функции – это вектор, составленный из частных производных.

Так, если функция $f = f(x, y, z)$, то ее градиент $grad f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$.

Геометрический смысл градиента.

1) Рассмотрим кривую γ, заданную неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Зададим кривую параметрически $\gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Подставим параметрические уравнения в функцию $F(x, y)$, получим функцию $\Phi(t) = F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Продифференцируем последнее равенство по правилу сложной функции

$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$. Левая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение градиента $grad F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\}$ и вектора $\vec{a} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\}$, являющегося касательным вектором к кривой γ.

Из равенства $(gradF, \vec{a}) = 0$ видно, что $gradF$ перпендикулярен касательному вектору к кривой, значит $gradF$ является вектором нормали к кривой γ.

Отсюда видно, что $gradF$ является вектором нормали к данной поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

Производная по направлению

Производная по направлению – это обобщение понятия частной производной. Частная производная функции – это производная в направлении координатных осей.

Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Зададим направление вектором, имеющим начало в этой точке $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, где $M(x, y, z)$.

Определение. Производной функции $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$ называется величина $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)=\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{\|M_0M\|}$.

Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0,z_0). Тогда у нее существует производная в этой точке по любому направлению и она вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cdot\cos\gamma},$$

где $\cos\alpha=\dfrac{x-x_0}{\|\vec{l}\,\|}$, $\cos\beta=\dfrac{y-y_0}{\|\vec{l}\,\|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z-z_0}{\|\vec{l}\,\|}$.

Пример 1. Вычислить производную функции $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ в точке $A(1,-1,3)$ по направлению от этой точки до точки $B(0,1,1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = \{-1,2,-2\}$, его длина равна $|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$, направляющие косинусы этого вектора находятся делением соответствующей координаты на длину вектора:

$\cos\alpha = -\dfrac{1}{3},\ \cos\beta = \dfrac{2}{3},\ \cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

Вычислим частные производные данной функции

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot y^2 \cdot z^2,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(A) = 18;\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot x^2 \cdot z^2,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial y}(A) = -18;$

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z \cdot y^2 \cdot x^2,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial z}(A) = 6.$ Подставляя найденные значения в формулу

$\dfrac{\partial u}{\partial l}(A) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(A) \cdot \cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}(A) \cdot \cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}(A) \cdot \cos\gamma$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-18) \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -22.$$

Теорема. Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке M_0. Тогда наибольшее значение производной функции по направлению в этой точке достигается в направлении градиента и равно длине градиента.

Геометрический смысл производной функции f(x,y) по направлению.

Производная функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) по некоторому направлению равна тангенсу угла подъема (крутизне подъема) поверхности $z=f(x,y)$ в этом направлении в точке (x_0, y_0).

<u>Пример</u>**.** Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке $M(2,2,4)$.

если α –искомая крутизна, то $\operatorname{tg}\alpha = \|grad\ f\|$. Найдем частные производные в данной точке: $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M) = 4 \cdot \ln 2$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{4^2 + (4 \cdot \ln 2)^2} \approx 4{,}87$. Отсюда $\alpha \approx 78^\circ$.