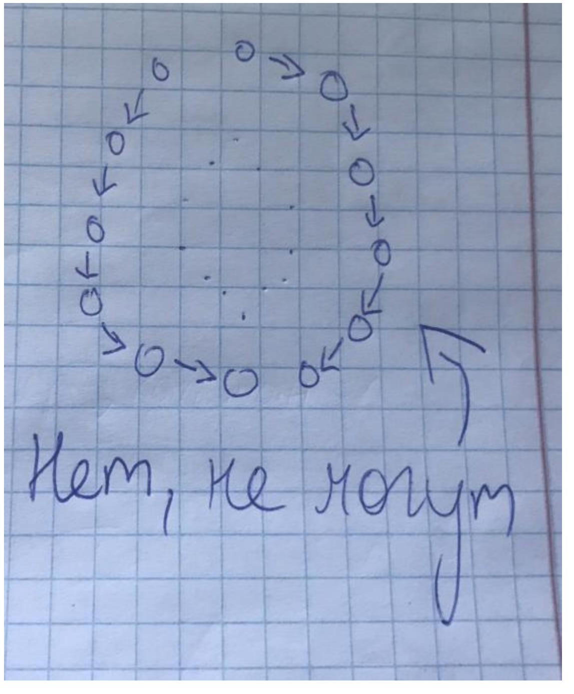
Этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике: особенности задач, основные ошибки

Монина Мария Дмитриевна, к.ф.-м.н.,
член региональной ПМК,
член жюри МЭ и РЭ

Типичные проявления нарушения полноценности аргументации

1) незаконные обобщения;

Перебор частных случаев ≠ решение



Типичные проявления нарушения полноценности аргументации

1) незаконные обобщения;

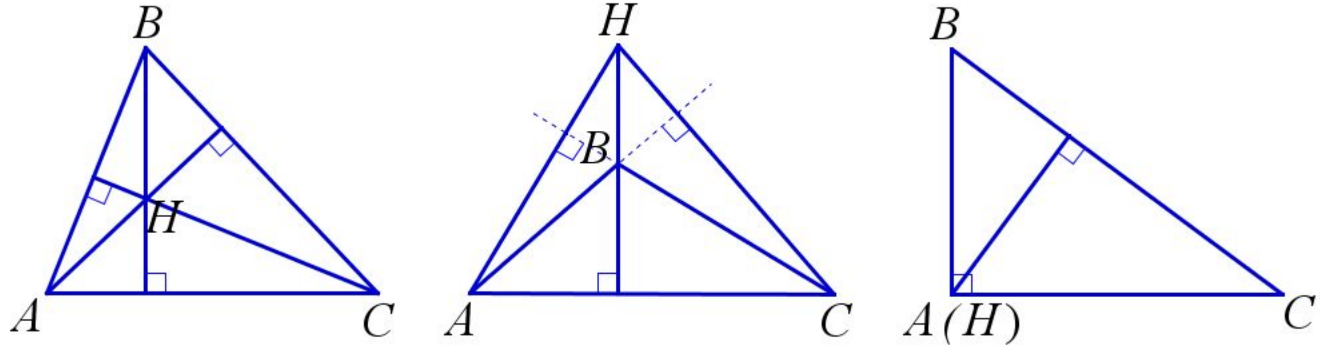
Перебор частных случаев ≠ решение

1.а) Разбейте квадрат на два равных пятиугольника.
б) Как разбить квадрат на два равных 11-угольника?
в) Как разбить квадрат на два равных n-угольника, если n − нечётное число?
2. Докажите, что клетчатый квадрат с вырезанной левой верхней клеткой можно разбить на клетчатые уголки из трёх клеток. Для квадрата со стороной
а) 4 клетки
б) 8 клеток
в) 1024 клетки

Типичные проявления нарушения полноценности аргументации

2) необоснованные аналогии;

По аналогии…



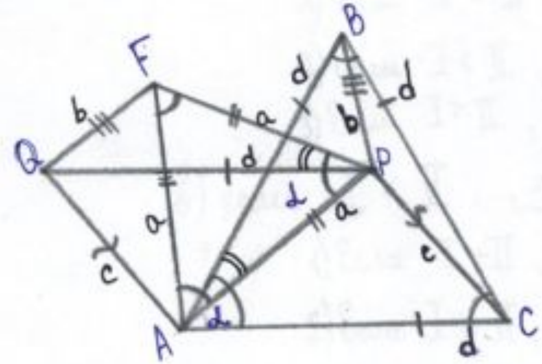
Типичные проявления нарушения полноценности аргументации

3) неполнота дизъюнкций;

Рассмотрены не все возможные ситуации в задаче

Задача 4.

Построим равносторонний треугольник согласно условию. (Назовём его ABC).



Дано:
$AB = BC = AC = d$
$AF = AP = PF = a$
ACPQ - параллелограм

Найти: QF, QP, QA.

От стороны a (AP) построим вверх равносторонний треугольник ($\triangle APF$)
Теперь построим такую (·)Q, что $AQ \parallel CP$ и $PQ \parallel AC$. У нас получился параллелограм ACPQ. $\Rightarrow AC = PQ = d$ и $PC = AQ = c$.

Теперь рассмотрим треугольник APF, т.к. он равносторонний, все его углы равны $60°$. Треугольники APC и APQ равны по трём сторонам $\Rightarrow \angle APQ = \angle PAC = \alpha$.

Треугольник ABC также равносторонний $\Rightarrow$ все его углы $= 60°$.

$\Rightarrow \angle BAP = 60° - \alpha$ и $\angle QPF = 60° - \alpha \Rightarrow \angle BAP = \angle QPF$

$\Rightarrow \triangle QPF = \triangle ABP$ по 2 сторонам и прилежащему углу. $\Rightarrow QF = BP = b$, т.к. против равных углов лежат равные стороны.

Типичные проявления нарушения полноценности аргументации

4) неполнота (невыдержанность) классификации.

Потерян класс некоторого понятия

а) простые и составные (единица)

б) остроугольные и тупоугольные (прямоугольные)

в) положительные и отрицательные (нуль)

Ошибки: Неумение работать с условием

Ошибки: ох уж эти числа

1) Нуль – никакое (и снова неполнота классификации)
2) Тип числа
3) Различные/равные

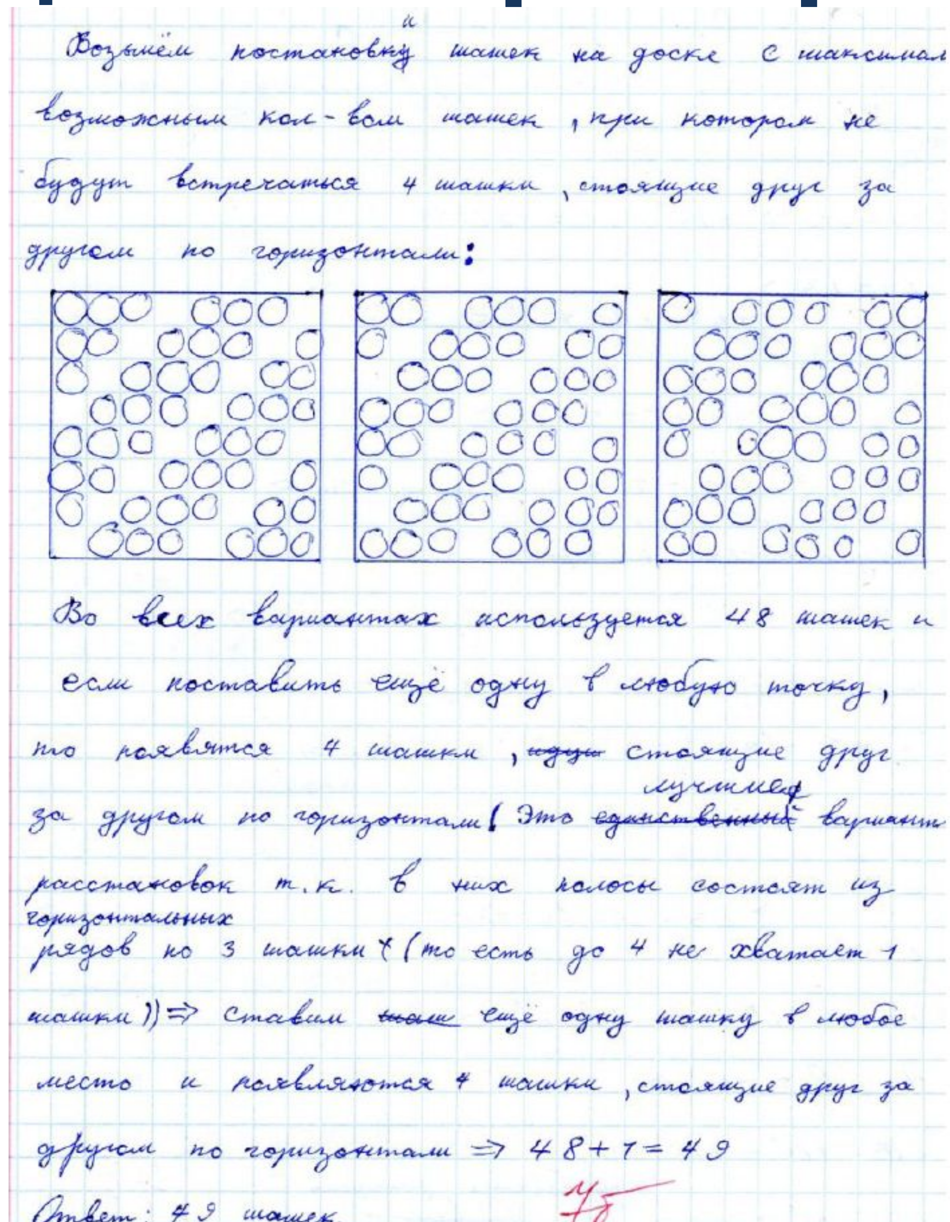
Ошибки: Оценка + пример

Какое наибольшее/
наименьшее…?

- Пример

- Оценка

Задача. Какое минимальное число шашек надо взять, чтобы при любой их расстановке на клетках шахматной доски (8×8) обязательно встретились 4 шашки, стоящие друг за другом по горизонтали?



Возьмём постановку шашек на доске с максимал возможным кол-вом шашек, при котором не будут встречаться 4 шашки, стоящие друг за другом по горизонтали:

Во всех вариантах используется 48 шашек и если поставить ещё одну в любую точку, то появятся 4 шашки, ~~одну~~ стоящие друг за другом по горизонтали (Это ~~единственный~~ лучший вариант расстановок т.к. в них полосы состоят из горизонтальных рядов по 3 шашки (то есть до 4 не хватает 1 шашки)) ⇒ ставим ~~шаш~~ ещё одну шашку в любое место и появляются 4 шашки, стоящие друг за другом по горизонтали ⇒ 48 + 1 = 49

Ответ: 49 шашек.

Ошибки: Доказательство неравенств

Если $a; b \geq 0$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$a^2+b^2-2ab \geq$$

$$|a-b|^2 \geq 0$$

Ошибки: Доказательство неравенств

10.2) $0 < y < x < 1$

$$\frac{x-y}{1-xy} < 1 \quad \Big| \cdot -1$$

$$\frac{y-x}{1-xy} > -1 \quad \Big| +1$$

$$\frac{y-x}{1-xy} + 1 > 0$$

$$\frac{y-x+1-xy}{1-xy} > 0$$

② числитель, ① знаменатель

① $1-xy > 0$

т.к $0 < xy < 1$

=> докажем, что $y-x+1-xy > 0$

$$\underset{②}{y}\,\underset{①}{(1-x)} + \underset{②}{1} - \underset{①}{x} > 0$$

① $1-x > 0$ т.к $0<x<1$

② $y(1-x) > 0$ т.к $y>0$.

③ $1 + y(1-x) > 1$

④ $1 + y(1-x) - x > 0$

т.к $x<1$

Ошибки: Доказательство неравенств

2. $0<y<x<1;$

?

$$\frac{x-y}{1-xy}<1 \Leftrightarrow x-y<1-xy$$

$$\Leftrightarrow x-1<y-xy$$

$$\Leftrightarrow x-1<y(1-x) \quad | \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x>-y(1-x) \quad | : 1-x$$

$$\Leftrightarrow 1>-y \qquad 0<y<1 \Leftrightarrow 0>-y>-1$$

$$\Rightarrow -y<0 \Rightarrow -y<1$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{1-xy}<1.$$

Ошибки по незнанию:
Вписанные углы

1. Угол:
- центральный,
- вписанный,
- с вершиной внутри круга,
- с вершиной вне круга,
- между хордой и касательной.
2. Свойства вписанного в окружность четырёхугольника
3. Признаки вписанного в окружность четырёхугольника

Общие подходы, методы, приемы

1. Метод перебора (не подбор);
2. Прямое или конструктивное доказательство («Существует(ют) ли…?», «Можно ли?»);
3. Способ доказательства «от противного»;
4. Косвенные доказательства (принцип Дирихле);
5. Метод «крайнего»;
6. Рассуждения по индукции (ММИ).

Специальная олимпиадная тематика

- Числовые ребусы. Взвешивания, переливания. (4-11)
- Логические задачи. Истинные и ложные утверждения (4-11).
- Построение примеров и контрпримеров (4-11).
- Разрезания (4-11).
- «Оценка + пример» (7-11).
- Инвариант (7-11).
- Принцип Дирихле (7-11).
- Раскраски (7-11).
- Игры (7-11).
- Элементы комбинаторики (9-11).
- Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах) (9-11).
- Метод математической индукции (10-11).
- Геометрические свойства графиков функций (10-11).