ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Точечная оценка погрешности среднего значения

Среднее значение $\overline{x}$ из n независимых значений случайной величины x также является случайной величиной. Дисперсия x σ^2, следовательно дисперсия $\overline{x}$ δ^2 в n раз меньше:

$$\delta^2 = \sigma^2 / n \quad \text{или} \quad \delta = \sigma / \sqrt{n}$$

δ - *абсолютная* среднеквадратичная случайная погрешность среднего значения $\overline{x}$.

$$\tau = \frac{\delta}{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\overline{x}^* \sqrt{n}} = \frac{V}{\sqrt{n}}$$ *относительная* погрешность

V — коэффициент вариации. τ может быть выражена в долях единицы или в %.

Формулы δ и τ показывают, что погрешность среднего значения прямо пропорциональна изменчивости случайной величины и обратно пропорциональна корню квадратному из числа измерений.

Это позволяет решать 2 задачи:

1) оценивать абсолютную или относительную погрешность при известном числе наблюдений *n*;

2) находить необходимое число измерений *n* для достижения заданной погрешности среднего значения.

Содержания меди (Ci , %)	
Среднее	0.8742
Стандартная ошибка	0.028882719
Медиана	0.865
Мода	0.96
Стандартное отклонение	0.204231661
Дисперсия выборки	0.041710571
Эксцесс	-0.02813976
Асимметричность	0.38519861
Интервал	0.93
Минимум	0.47
Максимум	1.4
Сумма	43.71
Счет	50
Уровень надежности(95.0%)	0.058041995

Среднеквадратические погрешности:

среднего	σ C = S / корень (N) =	0.02888
стандарта	σ S = S / корень (2*N) =	0.02042
асимметрии	σ A = корень (6 / N) =	0.346410162
эксцесса	σ E = корень (24 / N)= 2 *σ A =	0.692820323

Пример В результате анализа 16 проб гранита рассчитано среднее содержание кремнезема $\overline{x}$ = 70,35 % и среднеквадратичное отклонение σ = 3,20 %. Определить, чему равна среднеквадратичная погрешность среднего содержания и сколько дополнительно нужно взять проб, чтобы снизить относительную погрешность до 1 %.

Абсолютная среднеквадратичная случайная погрешность $\delta = 3{,}2/\sqrt{16} = 0{,}80\%$; относительная случайная погрешность τ = 0,80/70,35= 1,14%.

Если τ =1% = 0,01, то из формулы $\tau = \dfrac{\delta}{\overline{x}} = \dfrac{V}{\sqrt{n}}$ получим $\delta = \tau * \overline{x} = 0{,}01 * 70{,}35 = 0{,}70$ Из формулы $\tau = \dfrac{\delta}{\overline{x}} = \dfrac{V}{\sqrt{n}}$ имеем

$$n = \sigma^2 / \delta^2 = 3{,}202 / 0{,}702 = 21$$

дополнительно нужно взять и проанализировать 21 - 16 = 5 проб.

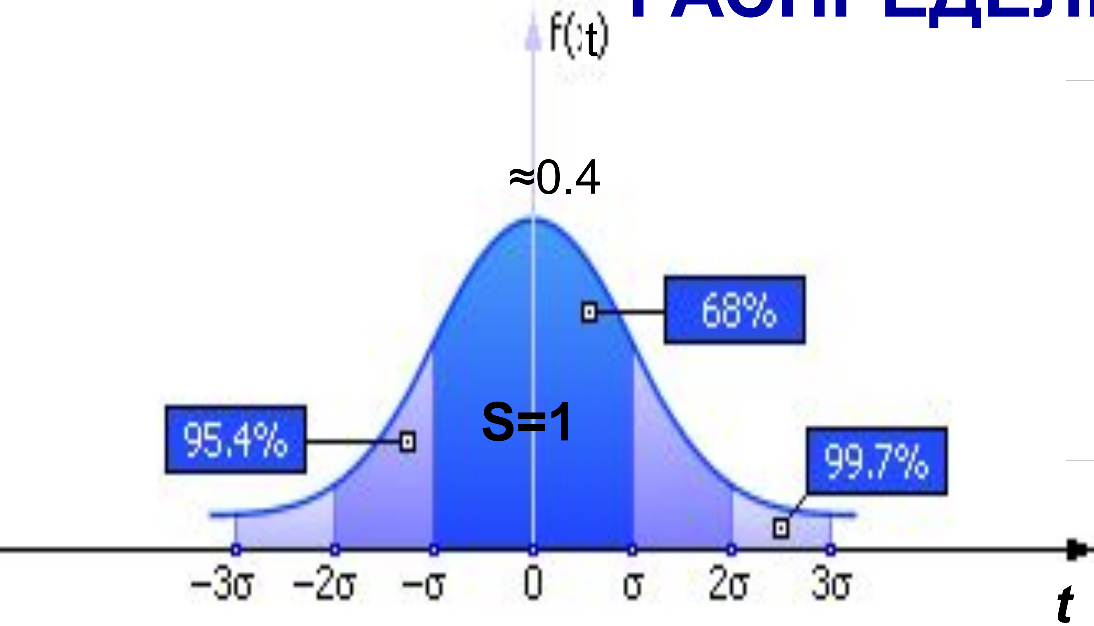
2. Интервальная оценка математического ожидания случайной величины

M(x) в генеральной совокупности обычно неизвестно. Его можно приближенно оценить с помощью выборочного среднего значения $\bar{x}$, которое является случайной величиной и имеет дисперсию δ^2. Предполагается, что случайная величина имеет распределение, близкое к нормальному. Размах значений нормально распределенной величины составляет приближенно $\pm 3\delta$. Где-то в этом интервале и заключено математическое ожидание ***M(x)***. Наиболее вероятно, что оно совпадает со средним значением $\bar{x}$, которое является ***точечной оценкой*** математического ожидания. Менее вероятно, что ***M(x)*** смещено в ту или иную сторону от среднего значения. Интервал возможных значений ***M(x)*** зависит от вероятности ***q*** **= Ф(t)** и выражается через коэффициент вероятности ***t*** соотношением

$$\bar{x} - t\delta \angle M(x) \angle \bar{x} + t\delta$$

доверительный интервал или *интервальная оценка* математического ожидания

СТАНДАРТНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ



$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}}dx\ ;$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}}$$

$$t=\frac{x-Mx}{\sigma}$$

Из симметричности следует:

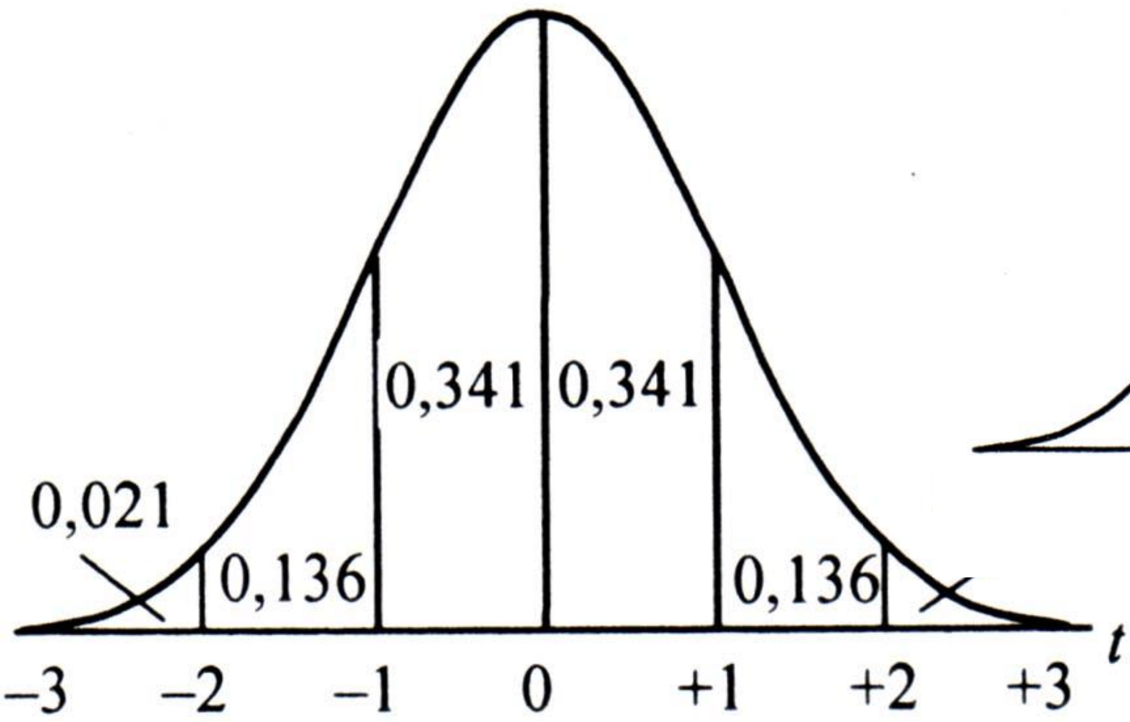
F(-t)=1-F(t)

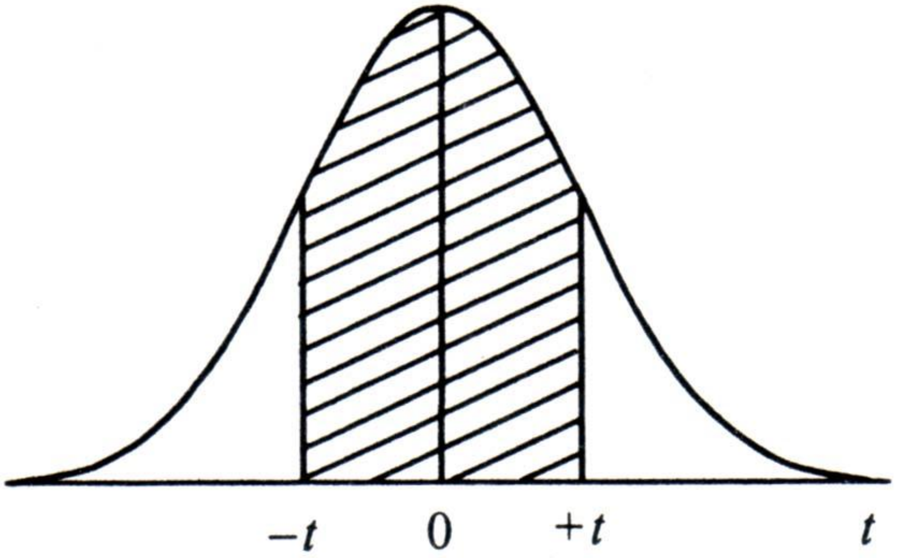
Функция F(t) для t≥0 нормированная функция Лапласа. Обозначается $\Phi_0(t)$ и имеет вид

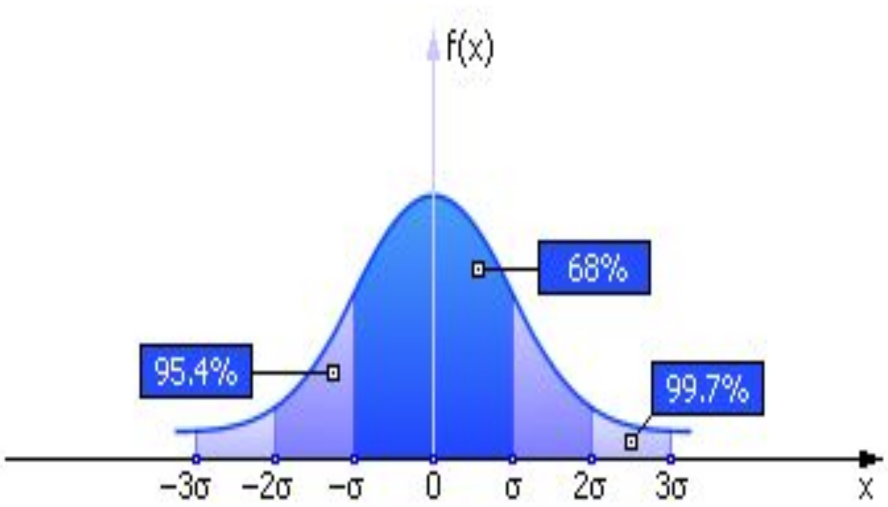
$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\Phi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\varphi(t)=Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$


0,021
0,136
0,341
0,341
0,136
t
–3
–2
–1
0
+1
+2
+3


–t
0
+t
t


f(x)
68%
95,4%
99,7%
–3σ
–2σ
–σ
0
σ
2σ
3σ
x

Каждому значению вероятности q соответствует определенный коэффициент вероятности t и размер доверительного интервала:

Вероятность $q = \Phi(t)$	Коэффициент Вероятности t	Доверительный интервал
0.683	1	$\bar{x} - \delta < M(x) < \bar{x} + \delta$
0.954	2	$\bar{x} - 2\delta < M(x) < \bar{x} + 2\delta$
0.997	3	$\bar{x} - 3\delta < M(x) < \bar{x} + 3\delta$

Используя данные примера, где среднее содержание кремнезема в граните $\bar{x}$ = 70,35 %, и δ = 0,80 %, получаем доверительные интервалы:

Вероятность q	Доверительный интервал
0.683	$69,55 < M(x) < 71,15$
0.954	$68,75 < M(x) < 71,95$
0.997	$67,95 < M(x) < 72,75$

Если $\bar{x}$ или другая оцениваемая величина подчиняются не нормальному закону распределения, то вероятность q будет иная.

3. Выделение аномальных значений

Когда в однородную совокупность попадают единичные значения, значительно отличающиеся от среднего (аномальные или ураганные) происходит искажение статистических характеристик. Поэтому актуальной является задача

- о разделении неоднородной совокупности на однородные,
- о выделении из неоднородных совокупностей аномальных значений.

Наиболее распространенный способ выделения аномальных значений (если известен или задан закон распределения случайной величины) - правило ***«трех сигм»*** основан на том, что случайная величина при нормальном законе распределения практически полностью (на 99,7 %) заключена в пределах от $\bar{x} - 3\delta$ до $\bar{x} + 3\delta$.

Если значение случайной величины отличается от $\bar{x}$ больше чем на 3δ, то оно является аномальным.

Испытуемое значение не должно участвовать в расчете $\bar{x}$ и среднеквадратичного отклонения. Для удобства случайную величину нормируют по формуле

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

И правило «трех сигм» преобразуется:

если нормированное значение $|t| > 3$, то оно является аномальным.

Аномальные значения можно выявить на графике пробит-функции, с помощью критерия Титьена-Мура.

Пример.

Средняя зольность угля $\bar{x}$ = 6,5 %, среднеквадратичное отклонение
σ = 2,1%. Определить, не является ли аномальной проба угля с зольностью
15 %.

Найдем нормированное значение $\boldsymbol{t}$ =(15 -6,5)/2,1=4,05.

Поскольку $\boldsymbol{t}$ >3, проба является аномальной и относится к другой совокупности.

На основе приведенных данных можно определить, какие вообще значения зольности являются аномальными.

Так как $\bar{x} - 3\delta$ = 6,5 -3*2,1 = 0,2 %;

$\bar{x} + 3\delta$ = 6,5 + 3*2,1 = 12,8 %,

то аномальными являются значения зольности < 0,2 и > 12,8 %.

4. Выделение однородных совокупностей

Заключение о неоднородности совокупности лучше всего делать по гистограмме частот. Геологическая причина появления двух совокупностей заключается в том, что бедные руды возникли путем замещения алюмосиликатных пород, а богатые - карбонатных пород.

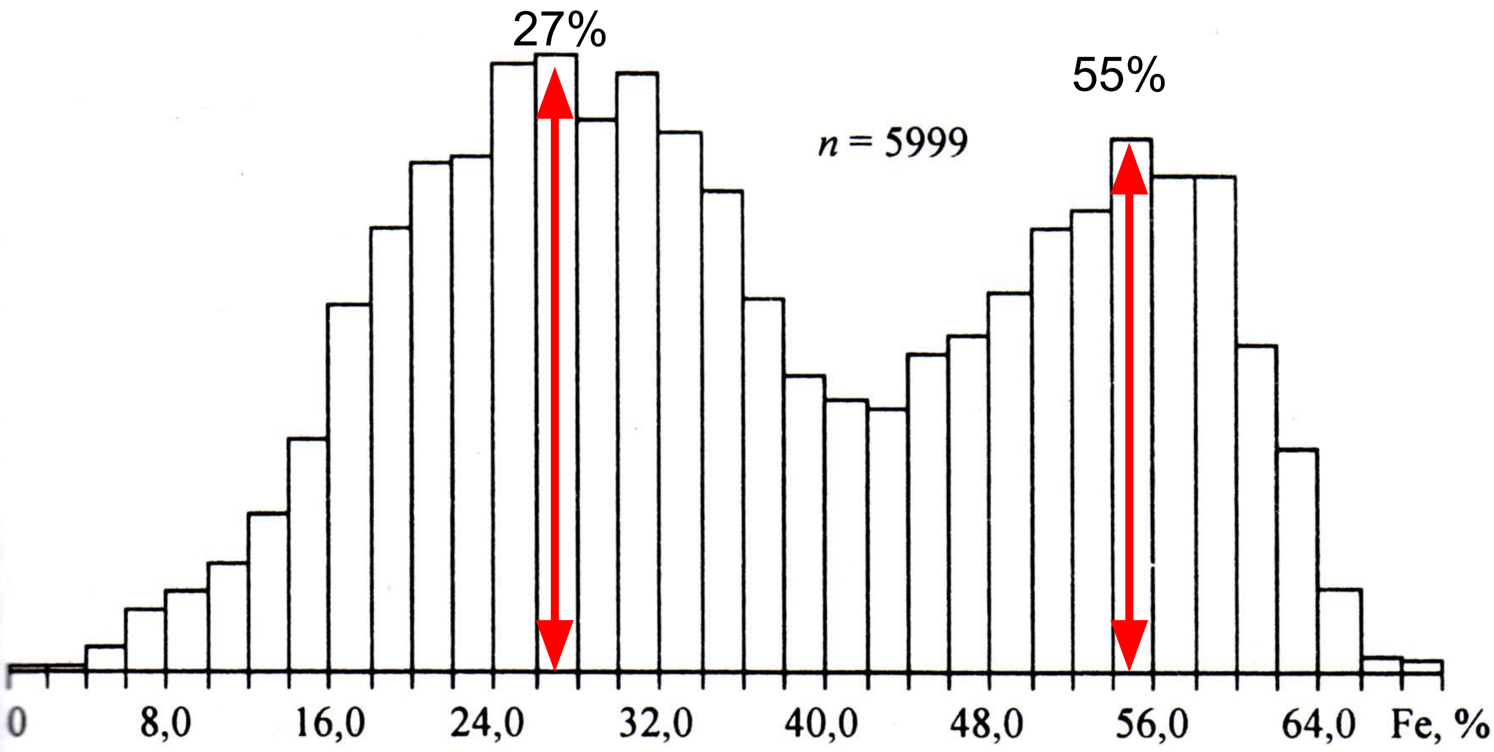


Рис.2.17. Гистограмма содержаний железа в рудах Качарского месторождения

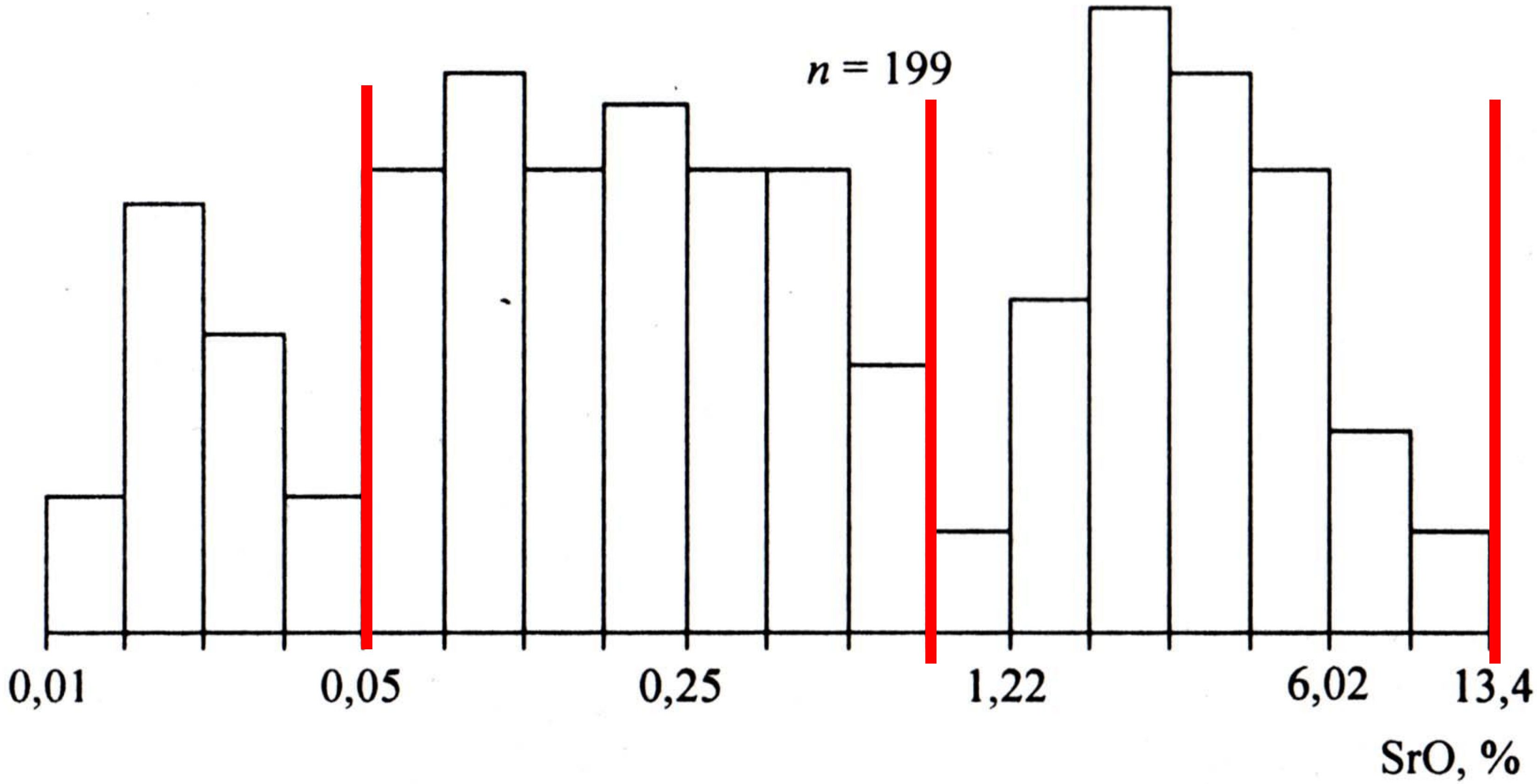
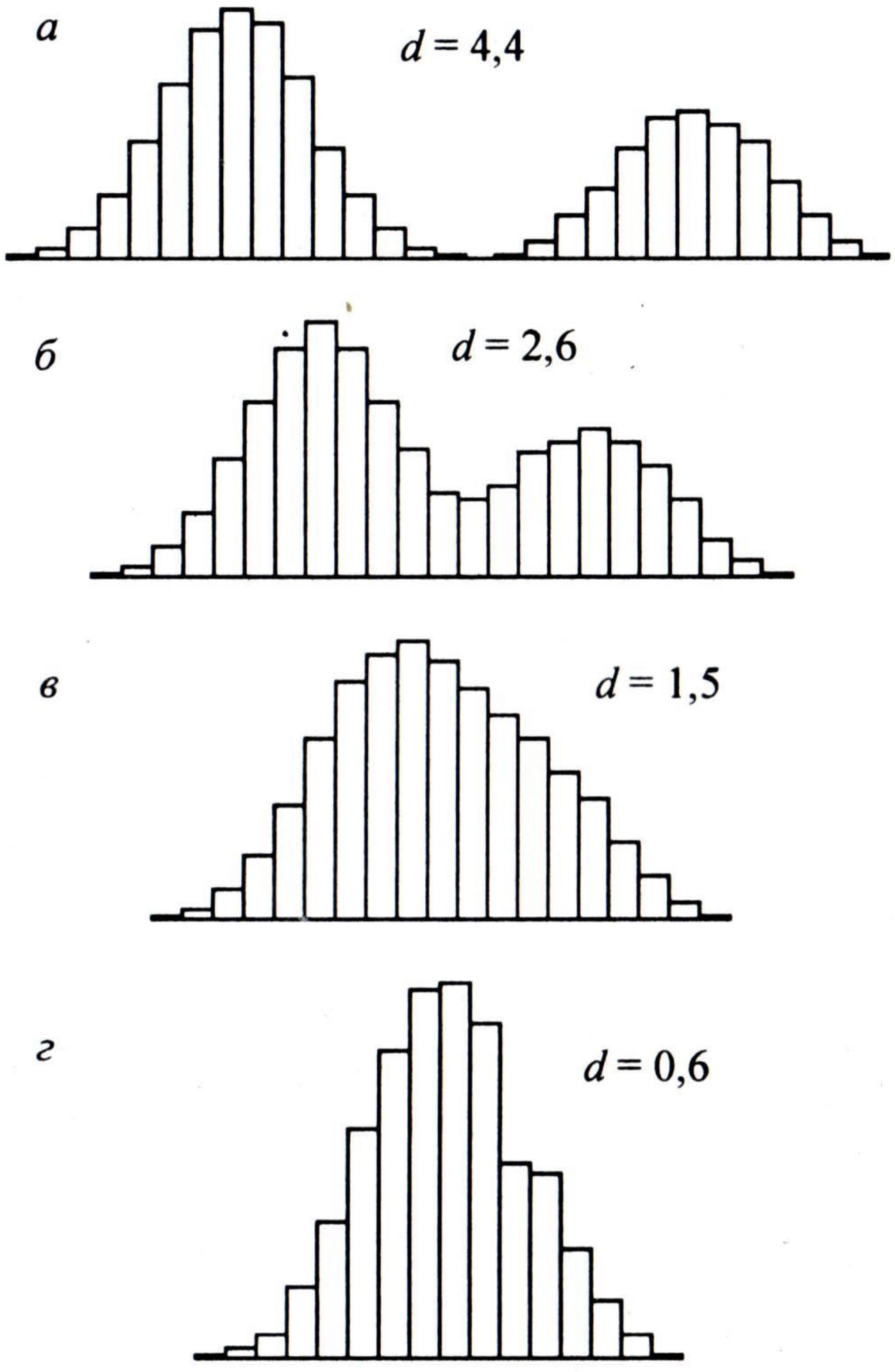


Рис.2.18. Гистограмма содержания стронция в апатитах различных природных образований. Масштаб по горизонтальной оси логарифмический

Наиболее чистыми по содержанию стронция являются апатиты из гранитоидов, ультрабазитов и метаморфических пород. Средние по содержанию стронция - апатиты скарновых месторождений и некоторых массивов щелочных пород. Наиболее высокие содержания стронция наблюдаются в апатитах Хибинской группы месторождений.



Однородные совокупности, входящие в смешанную совокупность, различаются средними значениями $\bar{x}$, $\bar{y}$ и дисперсиями σ_x^2, σ_y^2.

Показателем, определяющим возможность аналитического разделения смешанных совокупностей при условии нормального их распределения, является ***раздвиг*** распределений:

$$d = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

1. очень большой (d>4)
2. большой (d = 2÷4)
3. малый (d= 0,7÷2)
4. незначительный (d<0,7)

С математической точки зрения инженерно-геологический элемент можно принять за генеральную совокупность. Тогда выделения ИГЭ сводятся к установлению, относится ли выборочная совокупность к одной генеральной совокупности или нет?

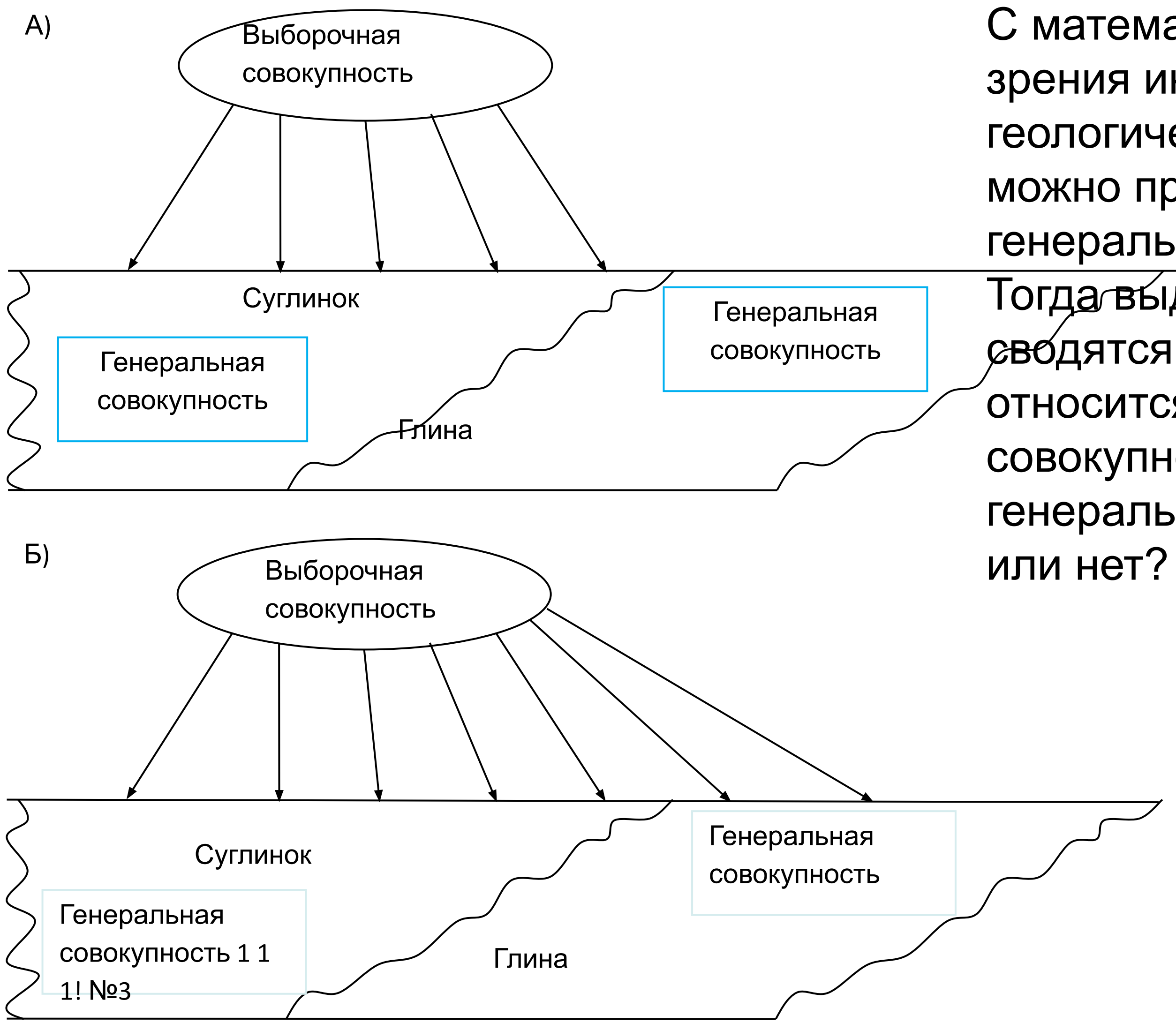


Рис. 5.3. Схема формирования выборочной совокупности из:

А) одной генеральной совокупности;

Б) из двух генеральных совокупностей одновременно.

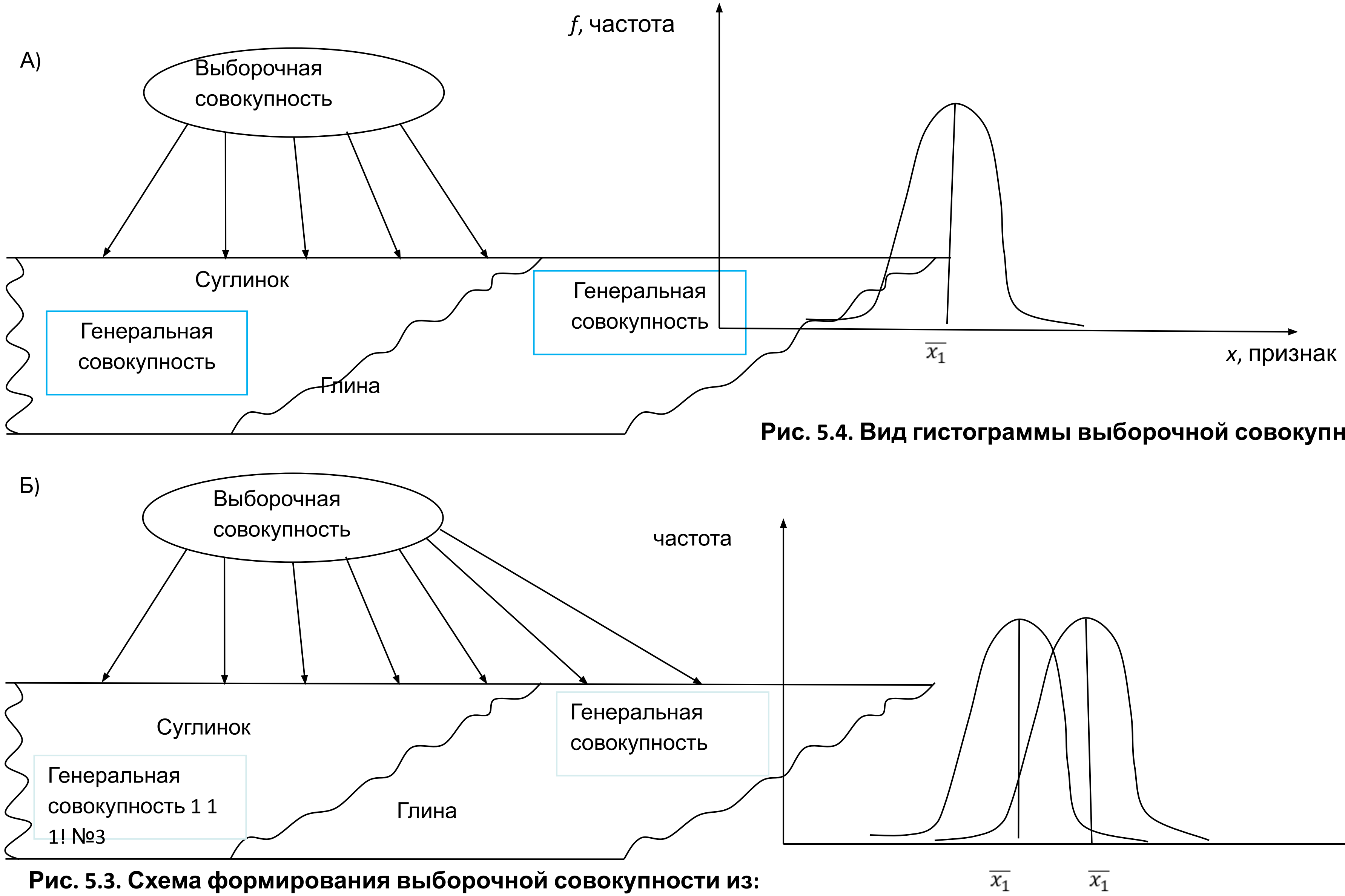


Рис. 5.4. Вид гистограммы выборочной совокупн

Рис. 5.3. Схема формирования выборочной совокупности из:

А) одной генеральной совокупности;

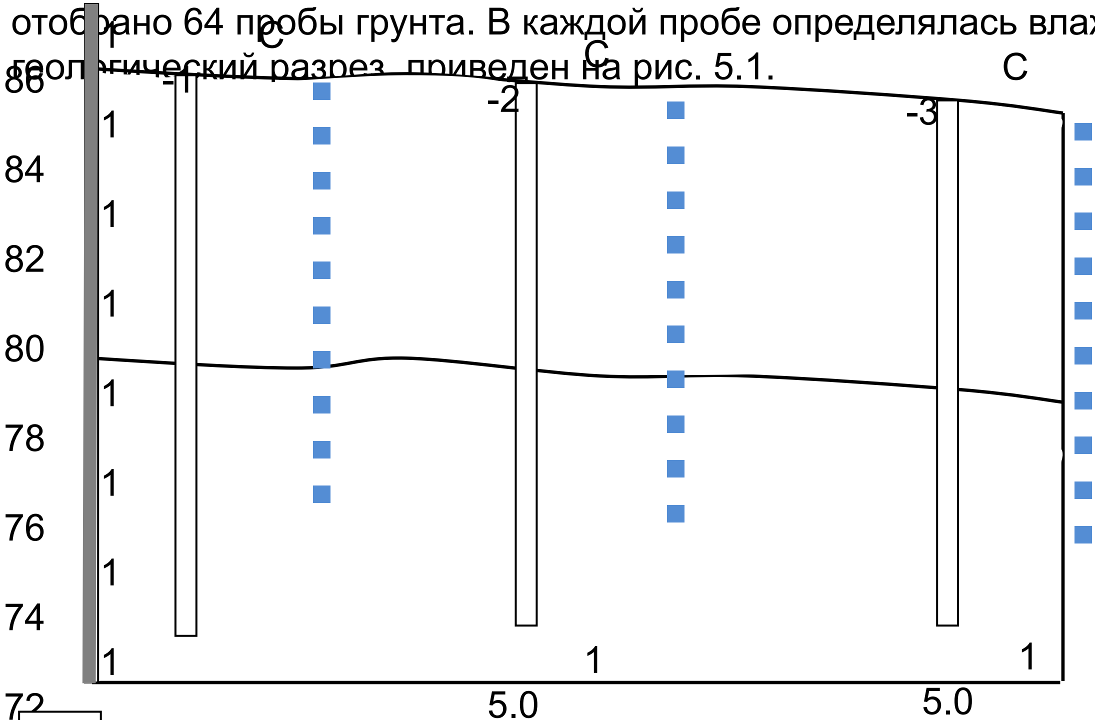
Б) из двух генеральных совокупностей одновременно.

Рис. 5.5. Схема размещения гистограмм одной совокупности представляющих две генер совокупности.

- $\overline{x_1}$

Методика выделения инженерно-геологических элементов статистическим методом.

Пример 5.1. Исследуемый участок представлен суглинком светло-темно-серого цвета. Всего отобрано 64 пробы грунта. В каждой пробе определялась влажность грунта. Схематический геологический разрез приведен на рис. 5.1.



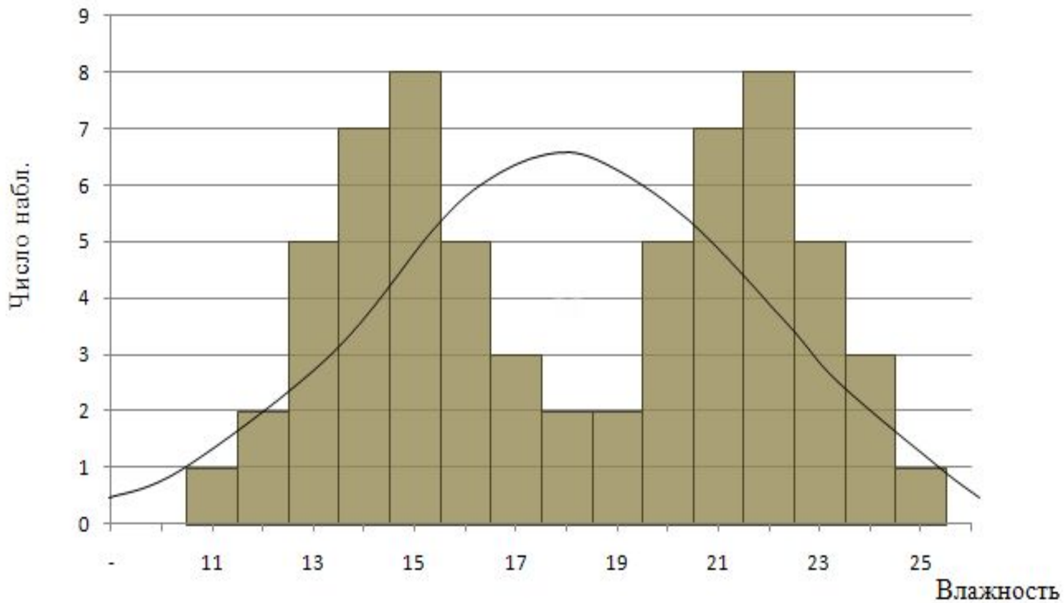
- суглинок темно-серый

- суглинок светло-серый

– место отбора проб

Необходимо определить, геологическое тело представлено одним или несколькими инженерно-геологическими элементами.

Алгоритм решения:



Из рис. 5.2. видно, что в исследуемой выборке наблюдаются два «горба». Отсюда мы можем предположить, что данная выборка представляет две генеральные совокупности (два ИГЭ). Анализ распределения влажности по разрезу показал, что в верхней части разреза суглинок маловлажный и имеет светло-серый цвет, ниже залегает суглинок более влажный темно-серого цвета. Граница между ними установлена на глубине 9м.

Используя в качестве классификационных признаков цвет суглинка и граничную влажность $w \approx 18{,}5\%$, исследуемая выборка разделена на две новые. В каждой выборке имеем по 32 наблюдения, т.е. $n_1=n_2=32$.

N=45

T=140.3град.

$$\sigma = 42$$