

Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 16 сентября 2020

§ Особые решения для уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

Будем предполагать, что $F(x, y, p) \in C(\mathcal{G}), \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$

$$\text{и } \exists \frac{\partial F}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y'}$$

Опр) Функция $y = \varphi(x), x \in \langle a, b \rangle$ называется

особым решением уравнения $(*)$ если:

1) $\varphi(x)$ — решение уравнения $(*)$, т.е. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ для $\forall x \in \langle a, b \rangle$. 2) в \forall точке $(x_0, \varphi(x_0)), x_0 \in \langle a, b \rangle$ нарушается единственность решения задачи Коши для уравнения $(*)$, то есть через

\forall точку $(x_0, \varphi(x_0))$ проходит по крайней мере хотя бы ещё одно решение $y = \psi(x)$, причём $\psi \neq \varphi$ ни в какой окрестности точки x_0 .

3) для $\forall x_0 \in \langle a, b \rangle, \varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$, то есть кривые касаются.

Из ТСР решения задачи Коши для $(*)$

следует, что особое решение уравнения $(*)$

может существовать только если $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) = 0$

Следовательно, особое решение уравнения $(*)$

может существовать, если выполнены

$$\text{условия } \begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Опр) Кривая $F(x, y) = 0$ называется дискриминантной кривой, если она получена

из (10) исключений параметра p .
Замечание Особое решение, следует искать среди ветвей дискриминантной кривой.
Правило нахождения особого решения для уравнения $F(x, y, y') = 0$.

- 1) Находим дискриминантную кривую.
- 2) Исследуем каждую ветвь дискриминантной кривой, является ли она решением \otimes
- 3) Если она является решением, проверим будет ли она особым решением.

Замечание Проверка условия 3) может быть очень сложной и обычных методов проверки нет.

Пример 1) $(y')^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} p^2 - 1 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$
нет дискриминантной кривой. Следовательно нет особых решений.

Пример 2) $(y')^2 = y^2 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 - y^2 + x^2 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases}$

Следовательно, $y = \pm x$ — дискриминантная кривая.

Ни одна из ветвей этой кривой не является решением. Следовательно, нет особого решения.

Пример 3) $y = xy' + f(y')$ — уравнение Клеро.

$F(x, y, p) = y - xp - f(p)$. Тогда дискрими-

каноническая кривая имеет вид $\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$

Ранее было доказано, что это решение уравнения Клеро в параметрическом виде и оно особое.

§. Обгибающая семейства кривых

Пусть $F(x, y, c) = 0$ — общий интеграл (1) уравнения $F(x, y, y') = 0$ (*)

и пусть множество кривых семейства (1) заполняют множество $\Omega \subset R^2$, то есть через \forall точку $\in \Omega$ проходит хотя бы одна кривая семейства, но конечно много.

Опр) Кривая $z \subset \Omega$ называется обгибающей семейства (1), если в \forall своей точке она касается хотя бы одной кривой из (1) и \forall куски этой кривой касается бесконечное число кривых из семейства (1).

Теорема Функция $y = \varphi(x)$ является особым решением уравнения (*) \iff когда её график является обгибающей семейства интегральных кривых уравнения (*)

Док-во II.
Обгибающая семейства находится из системы $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$

после исключения параметра c .

Пример $F(x, y, c) = y - (x+c)^3 = 0$

$$\Phi'_c = -3(x+c)^{-4} = 0 \Rightarrow c = -x$$

Следовательно, $y=0$ — особая семейства
Так как $\Phi'_y = 1 \neq 0$

Глава. Системы ОДУ

Рассмотрим

$$F_i(x, y_1, \dots, \frac{d^{m_1} y_1}{dx^{m_1}}, y_2, \dots, \frac{d^{m_2} y_2}{dx^{m_2}}, \dots, y_n, \dots, \frac{d^{m_n} y_n}{dx^{m_n}}) = 0 \quad (*)$$

$i = \overline{1, n}$, где F_i определена в области

$\Omega \subset \mathbb{R}^{m_1 + m_2 + \dots + m_n + n + 1}$
Максимальный порядок производной функции y_i равен m_i

Опр. Максимальный порядок m_i производной функции y_i , входящей в $(*)$ называется порядком системы относительно функции y_i . Число $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ называется порядком системы.

Опр. Решением системы $(*)$ называется упорядоченный набор функций (y_1, y_2, \dots, y_n) , определенных на $\langle \alpha, \beta \rangle$ таких что

1) для $\forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ точка $(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m_n)}) \in \Omega$

2) Функции $y_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) имеют все производные, входящие в $(*)$ 3) при подстановке функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ в $(*)$ получаем тождество по $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

-5-

Если уравнения $(*)$ можно решить относительно старших производных $y_1^{(m_1)}, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n^{(m_n)}$, то уравнения $(*)$ примут вид:

$$\frac{dy_i^{(m_i)}}{dx^{m_i}} = f_i(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m_n-1)}) \quad (1)$$

Это система разрешенная относительно старших производных.

Опр: Система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1^0)$$

называется нормальной системой ОДУ.

Упр-ние. Любую систему (1) , разрешенную относительно старших производных порядка N можно свести к эквивалентной системе (1^0) того же порядка N .

Док-во заедной судай.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Обозначим $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$

Тогда $\frac{dy_1}{dx} = y_2, \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ или}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \neq$$

Опр) Решением системы (1°) называется упорядоченный набор функций $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ таких, что 1) $y_k(x) \in C^1 \langle \alpha, \beta \rangle$, 2) $y_k \forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ точка $(x, y_1, y_2, \dots, y_n(x)) \in \Omega$, $\Omega \subset R_{n+1}$, где Ω - область определения функций $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, 3) при подстановке этих функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ в (1°) получаем тождество во $\forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Опр. Общим решением системы (1°) называется упорядоченный набор n -функций $(y_1(x), \dots, y_n(x))$, где $y_k(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ таких, что 1) при любых фиксированных c_1, c_2, \dots, c_n получаем решение системы (1°), 2) любое частное решение системы (1°) может быть получено из общего решения при соответствующем выборе постоянных c_1, c_2, \dots, c_n .

Введем обозначения

$$\vec{y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)); \vec{f}(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), \dots, f_n(x, \vec{y})).$$

Тогда систему (1) можно записать в виде $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y})$ (1)

Это нормальная система, записанная в векторном виде.

Опр. Задача Коши для системы (1) состоит в том, чтобы среди всех решений системы (1) найти те, которые удовлетворяют условиям

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \in R^n \quad (2)$$

или $(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Геометрически решение уравнения (1) задаёт в пространстве $R^{n+1} = R_x^1 \otimes R_y^n$

$$\text{Кривую } \Gamma: \begin{cases} x = t \\ y_1 = y_1(t) \\ \vdots \\ y_n = y_n(t) \end{cases}, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

заданную в параметрическом виде. Она называется интегральной кривой.

Итак, геометрически решение задачи Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (1) найти те, которые проходят через точку (x_0, \vec{y}_0) .

Теорема (ТСЕ) Если $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C^1(\Omega)$ и

$$\exists \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \text{ для } \forall i, j = \overline{1, n} \text{ и } \exists M > 0:$$

$$|f| \leq M; \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq M \text{ для } \forall i, j = \overline{1, n}$$

Тогда $\exists h > 0: \forall (x_0, \vec{y}_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$
существует единственное решение $\vec{y}(x)$
задачи Коши ①, ② определенное
на $[x_0 - h; x_0 + h]$

§. Линейные нормальные системы
Вводные определения

Введем обозначения

$$\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

$$\vec{y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))$$

$\|\vec{y}'(x)\| = \sum_{k=1}^n |y_k'(x)|$ - это не является нормой,
но для каждого фиксированного x - это норма

$\|\vec{y}(x)\|_c = \max_{x \in [a, b]} \left(\sum_{k=1}^n |y_k(x)| \right)$ - это норма

Свойства: 1) $\|\vec{y}\|_c \geq 0, \|\vec{y}\|_c = 0 \Leftrightarrow \vec{y}(x) = \vec{0}$

2) $\|\lambda \vec{y}\|_c = |\lambda| \cdot \|\vec{y}\|_c$; 3) $\|\vec{y} + \vec{z}\|_c \leq \|\vec{y}\|_c + \|\vec{z}\|_c$

Опр. $\int_a^b \vec{y}'(t) dt = \left(\int_a^b y_1'(t) dt, \dots, \int_a^b y_n'(t) dt \right)$

Свойство, $\left\| \int_a^b \vec{y}'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{y}'(t)\| dt$

Рассмотрим матрицу $A(t) = [a_{ij}(t)], i, j = \overline{1, n}$

Опр. $\|A(t)\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|$

Свойство, 1) $\|A(t)\| \geq 0, \|A(t)\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$

2) $\|\lambda A(t)\| = |\lambda| \cdot \|A(t)\|$, 3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

-9-

Лемма. Для любых матриц A и B , для которых определено произведение AB справедливо: 1) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, 2) $\|A\vec{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Док-во. 1) $\|AB\| = \sum_{i,k} \left| \sum_j a_{ij} b_{jk} \right| \leq \sum_{i,k} \sum_j |a_{ij}| |b_{jk}| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| \sum_{j,k} |b_{jk}| = \|A\| \cdot \|B\|$

2) следует из 1).

Линейные системы 1-ого порядка.
Задача Коши.

Опр. Линейной системой 1-ого порядка называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(t) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(t) \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(t) \end{cases}$$

где $a_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, n}$ и $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — заданные функции, а $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — неизвестные функции.

Если ввести обозначения

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, A(t) = [a_{ij}(t)], i, j = \overline{1, n}$$

то данную систему можно записать в виде (в матричном виде)

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t), t \in [a, \beta] \quad (1)$$

Опр. Решением системы (1) называется упорядоченный набор функций.

$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \in C^1 [a, \beta]$ такие, что при подстановке их в (1) получаются тождества по $t \in [a, \beta]$.

Задача Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Опр. Задача Коши для уравнения (1) состоит в том, чтобы среди всех интегрируемых кривых $\vec{y}(t)$ системы (1) найти те, которые проходят через точку (t_0, y_0) .

Теорема (ТСЕ) Если $A(t)$ и $\vec{f}(t) \in C^1 [a, b]$, то для любого $t_0 \in [a, b]$ и любого $\vec{y}_0 \in R^n$ существует и единственное решение задачи Коши (1, 2), определенное на всем $[a, b]$. Кроме того это решение можно найти методом итераций, то есть $\vec{y}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n(t)$, где $\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0$, а $\vec{y}_{n+1}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t [A(\sigma)\vec{y}_n(\sigma) + \vec{f}(\sigma)] d\sigma$ при этом справедлива оценка погрешности $\|\vec{y}(t) - \vec{y}_n(t)\| \leq \frac{M[\Delta(t-t_0)]^n}{n!}$, где M и Δ - некоторые постоянные.