Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 16 сентября 2020г

§ Особые решения для уравнения

$$F(x,y,y')=0 \qquad (*)$$

Будем предполагать, что $F(x,y,p)\in C(G)$, $G\subset R^3$ и $\exists\ \frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$

Опр) Функция $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ называется особым решением уравнения $(*)$ если:
1) $\varphi(x)$ — решение уравнения $(*)$, т.е $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$ для $\forall x\in\langle a,b\rangle$. 2) в $\forall$ точке $(x_0,\varphi(x_0))$, $x_0\in\langle a,b\rangle$ нарушается единственность решения задачи Коши для уравнения $(*)$, то есть через $\forall$ точку $(x_0,\varphi(x_0))$ проходит по крайней мере хотя бы ещё одно решение $y=\psi(x)$, причём $\psi(x)\not\equiv\varphi(x)$ ни в какой окрестности точки x_0.
3) для $\forall x_0\in\langle a,b\rangle$, $\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)$, то есть кривые касаются.

Из ТСЕ решения задачи Коши для $(*)$ следует, что особое решение уравнения $(*)$ может существовать только если $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)=0$

Следовательно, особое решение уравнения $(*)$ может существовать, если выполнены условия

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Опр) Кривая $\Phi(x,y)=0$ называется дискриминантной кривой, если она получена из (1₀) исключением параметра p.

Замечание Особое решение следует искать среди ветвей дискриминантной кривой.

Правило нахождения особого решения для уравнения $F(x, y, y')=0$.

1) Находим дискриминантную кривую.

2) Исследуем каждую ветвь дискриминантной кривой, является ли она решением (*)

3) Если она является решением, проверяем будет ли она особым решением.

Замечание Проверка условия 3) может быть очень сложным и общих методов проверки нет.

Пример 1) $(y')^2=1 \Longrightarrow \begin{cases} p^2-1=0 \\ 2p=0 \end{cases} \Longrightarrow$ нет дискриминантной кривой. Следовательно нет особых решений.

Пример 2) $(y')^2=y^2-x^2 \Longrightarrow \begin{cases} p^2-y^2+x^2=0 \\ 2p=0 \end{cases}$

Следовательно, $y=\pm x$ — дискриминантная кривая.

Ни одна из ветвей этой кривой не является решением. Следовательно, нет особого решения.

Пример 3) $y=xy'+f(y')$ — уравнение Клеро.

$F(x, y, p)=y-xp-f(p)$. Тогда дискриминантная кривая имеет вид $\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x + f'(p) = 0 \end{cases}$

Ранее было доказано, что это решение уравнения Клеро в параметрическом виде и оно особое.

§ Огибающая семейства кривых

Пусть $\Phi(x, y, c) = 0$ — общий интеграл ①
уравнения $F(x, y, y') = 0$ ⊛
и пусть множество кривых семейства ① заполняют множество $\Omega \subset R^2$, то есть через $\forall$ точку $\in \Omega$ проходит хотя бы одна кривая семейства, но конечное число.

Опр. Кривая $Z \subset \Omega$ называется огибающей семейства ①, если в $\forall$ своей точке она касается хотя бы одной кривой из ① и $\forall$ куска этой кривой касается бесконечное число кривых из семейства ①.

Теорема. Функция $y = \varphi(x)$ является особым решением уравнения ⊛ $\Longleftrightarrow$ когда её график является огибающей семейства интегральных кривых уравнения ⊛

Док-во #.

Огибающая семейства находится из системы
$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$
после исключения параметра c.

Пример $\Phi(x, y, c) = y - (x + c)^3 = 0$

$\Phi'_c = -3(x+c)^3 = 0 \Rightarrow c = -x$

Следовательно, $y=0$ – огибающая семейства

Так как $\Phi'_y = 1 \neq 0$

Глава. Системы ОДУ

Рассмотрим

$$F_i\left(x, y_1, \dots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}, y_2, \dots, \frac{d^{m_2}y}{dx^{m_2}}, \dots, y_n, \dots, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right) = 0 \quad (*)$$

$i=\overline{1,n}$, где F_i определена в области

$\Omega \subset R^{m_1+m_2+\dots+m_n+n+1}$

Максимальный порядок производной функции y_i равен m_i

Опр) Максимальный порядок m_i производной функции y_i, входящей в (*) называется порядком системы относительно функции y_i. Число $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ называется порядком системы.

Опр) Решением системы (*) называется упорядоченный набор функций $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, определенных на $\langle\alpha, \beta\rangle$ таких что

1) для $\forall x \in \langle\alpha, \beta\rangle$ точка $(x, \varphi_1, \dots, \varphi_1^{(m_1)}, \dots, \varphi_n, \dots, \varphi_n^{(m_n)}) \in \Omega$

2) Функции $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ имеют все производные, входящие в (*), 3) при подстановке функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ в (*) получаем тождество по $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$.

Если уравнения (*) могут быть разрешены относительно старших производных $y_1^{(m_1)}, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n^{(m_n)}$, то уравнения (*) примут вид:

$$\frac{dy_i^{(m_i)}}{dx^{m_i}} = f_i(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m_n-1)}) \quad (1)$$

Это система разрешённая относительно старших производных.

<u>Опр:</u> Система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1^\circ)$$

называется нормальной системой ОДУ.

<u>Утв-ние.</u> Любую систему (1), разрешённую относительно старших производных порядка N можно свести к эквивалентной системе (1°) того же порядка N.

<u>Док-во</u> <u>Частный случай.</u>

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Обозначим $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$

Тогда $\frac{dy_1}{dx} = y_2, \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ или}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad \#$$

Опр.) Решением системы (1°) называется упорядоченный набор функций $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ таких что 1) $\varphi_k(x) \in C^1\langle\alpha, \beta\rangle$, 2) для $\forall x \in \langle\alpha, \beta\rangle$ точка $(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n(x)) \in \Omega$, $\Omega \subset R_{n+1}$, где Ω – область определения функций $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, 3) при подстановке этих функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ в (1°) получаем тождество по $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$.

Опр.) Общим решением системы (1°) называется упорядоченный набор n-функций $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, где $\varphi_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ таких, что 1) при любых фиксированных $C_1, C_2, \dots, C_n$ получаем решение системы (1°), 2) любое частное решение системы (1°) может быть получено из общего решения при соответствующем выборе постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Введём обозначения

$$\vec{y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)); \ \vec{f}(x, \vec{y}) = (f_1(x, \vec{y}), f_2(x, \vec{y}), \dots, f_n(x, \vec{y}))$$

Тогда систему (1°) можно записать в виде $\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y})$ (1)

Это нормальная система, записанная в векторном виде.

<u>Опр.</u> Задача Коши для системы (1) состоит в том, чтобы среди всех решений системы (1) найти те, которые удовлетворяют условиям

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \in R_n \qquad (2)$$

или $(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Геометрически решение уравнения (1) задаёт в пространстве $R^{n+1} = R^1_x \otimes R^n_{\vec{y}}$ кривую Γ: $\begin{cases} x = t \\ y_1 = y_1(t) \\ \dots \\ y_n = y_n(t) \end{cases}$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, заданную в параметрическом виде. Она называется <u>интегральной кривой</u>.

<u>Итак</u>, геометрически решение задачи Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (1) найти те, которые проходят через точку $(x_0, \vec{y}_0)$.

<u>Теорема</u> (ТСЕ) Если $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C^{(1)}(\Omega)$ и $\exists \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$ и $\exists M > 0$:

$$|f| \le M; \; \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M \text{ для } \forall i, j = \overline{1, n}$$

Тогда $\exists h>0: \forall (x_0, \vec{y}_0) \in \Omega \subset R^{n+1}$ существует единственное решение $\vec{y}(x)$ задачи Коши (1), (2) определённое на $[x_0 - h; x_0 + h]$.

§ Линейные нормальные системы

Вводные определения

Введем обозначения

$\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$

$\vec{y}\,'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))$

$\|\vec{y}(x)\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k(x)|$ – это не является нормой, но для каждого фиксированного x – это норма

$\|\vec{y}(x)\|_C = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k(x)|\right)$ – это норма

Очевидны свойства: 1) $\|\vec{y}\|_C \geq 0$, $\|\vec{y}\|_C = 0 \Leftrightarrow \vec{y}(x) = \vec{0}$

2) $\|\lambda \vec{y}\|_C = |\lambda| \cdot \|\vec{y}\|_C$; 3) $\|\vec{y} + \vec{z}\|_C \leq \|\vec{y}\|_C + \|\vec{z}\|_C$

Опр. $\int\limits_a^b \vec{y}(t)dt = \left(\int\limits_a^b y_1(t)dt, \dots, \int\limits_a^b y_n(t)dt\right)$

Очевидно, $\left\|\int\limits_a^b \vec{y}(t)dt\right\| \leq \left|\int\limits_a^b \|\vec{y}(t)\|dt\right|$

Рассмотрим матрицу $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $i,j = \overline{1,n}$

Опр. $\|A(t)\| = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$

Очевидно, 1) $\|A(t)\| \geq 0$, $\|A(t)\| = 0 \Leftrightarrow A = \Theta$

2) $\|\lambda A(t)\| = |\lambda| \cdot \|A(t)\|$, 3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Лемма. Для любых матриц A и B, для которых определено произведение AB справедливо: 1) $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$, 2) $\|A\vec{y}\| \le \|A\|\cdot\|\vec{y}\|$.

Док-во. 1) $\|AB\| = \sum\limits_{i,k} \left|\sum\limits_{j} a_{ij} b_{jk}\right| \le \sum\limits_{i,k}\sum\limits_{j} |a_{ij}||b_{jk}| \le$

$\le \sum\limits_{i,j} |a_{ij}| \sum\limits_{j,k} |b_{jk}| = \|A\|\cdot\|B\|$

2) следует из 1).

§5 Линейные системы 1-ого порядка. Задача Коши.

Опр. Линейной системой 1-ого порядка называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t) y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + f_1(t) \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(t) y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n + f_n(t) \end{cases}$$

где $a_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ и $f_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – заданные функции, а $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ – неизвестные функции.

Если ввести обозначения

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = [a_{ij}(t)], \ i,j=\overline{1,n}$$

то данную систему можно записать в виде (в матричном виде)

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y} + \vec{f}(t), \; t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad (1)$$

Опр. Решением системы (1) называется упорядоченный набор функций $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in \vec{C}^1 \langle \alpha, \beta \rangle$ таких, что при подстановке их в (1) получаются тождества по $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Задача Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{f}(t) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2). \end{cases}$$

Опр. Задача Коши для уравнения (1) состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых $\vec{y}(t)$ системы (1) найти те, которые проходят через точку (x_0, y_0).

Теорема (ТСЕ) Если $A(t)$ и $\vec{f}(t) \in \vec{C}[a, b]$, то для любого $t_0 \in [a, b]$ и любого $\vec{y}_0 \in R^n$ существует и единственное решение задачи Коши (1), (2), определённое на всём $[a, b]$. Кроме того это решение может быть найдено методом итераций, то есть $\vec{y}(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \vec{y}_n(t)$, где

$$\vec{y}_0(t) = \vec{y}_0, \text{ а } \vec{y}_{n+1}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)\vec{y}_n(\tau) + \vec{f}(\tau)]\,d\tau$$

при этом справедлива оценка погрешности

$$\|\vec{y}(t) - \vec{y}_n(t)\| \le \frac{M[\alpha(t - t_0)]^n}{n!},$$ где M и α — некоторые постоянные.