Занятие 12

Решение системы линейных уравнений

Методы решения системы линейных уравнений

Метод обратной матрицы

1. Для нахождения решений системы методом обратной матрицы надо умножить обратную матрицу на столбец свободных членов (предварительно выбрав массив ячеек для столбца решений).

2. Для вычисления обратной матрицы используйте функцию **МОБР**(диапазон исходной матрицы).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

rang(A)=rang(A|b)=3

	2	1	3			9
A=	1	-2	1		B=	-2
	3	2	2			7
	-0,46154	0,30769	0,53846			-1
A^{-1}=	0,07692	-0,38462	0,07692		$X=A^{-1}*B$=	2
	0,61538	-0,07692	-0,38462			3
	9					
A*X=	-2					
	7					

Методы решения системы линейных уравнений

Метод Крамера

1. Для решения системы линейных уравнений методом Крамера, нужно найти определитель матрицы исходного уравнения (***D***), а также определители новых матриц (***d1***, ***d2***, ***d3***), которые получаются путем замены 1-го, 2-го и 3-го столбцов (по-очереди) исходной матрицы столбцом свободных членов исходной системы уравнений.

2. Для нахождения решений используйте формулу: ***x****k* = ***d****k* / ***D***, где ***dk*** – определитель, получающийся из определителя ***D*** при замене ***k***-го столбца соответствующими свободными членами, т.е., к примеру, ***x****1* = ***d****1* / ***D***, где ***d****1* – определитель матрицы с замененным 1-ым столбцом исходной матрицы столбцом свободных членов.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

rang(A)=rang(A|b)=3

	2	1	3			9	
A=	1	-2	1		B=	-2	
	3	2	2			7	
D=	13						
	9	1	3			X1=D1/D=	-1
D1=	-2	-2	1	-13			
	7	2	2			X2=D2/D=	2
	2	9	3			X3=D3/D=	3
D2=	1	-2	1	26			
	3	7	2				
	2	1	9				
D3=	1	-2	-2	39			
	3	2	7				

Проверка показывает, что решение найдено правильно

Методы решения системы линейных уравнений

Метод Гаусса

Метод Гаусса основан на том, чтобы при помощи эквивалентных преобразований получить трапециевидную систему уравнений (у которой в левой нижней части остаются единицы по диагонали, а остальные – нули, см. пример), поэтому от исходной матрицы нужно получить новую. Будем делать это поэтапно.

$$
\begin{aligned}
&6x_1-6x_2+2x_3+8x_4=12\\
&2x_1+2x_2-x_3+4x_4=13\\
&8x_1+6x_2+4x_3-2x_4=5\\
&-3x_1+x_2+7x_3-4x_4=56
\end{aligned}
$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8										
9		Шаг 1								
10		=B4/$B$10	=C4/$B$10	=D4/$B$10	=E4/$B$10	=F4/$B$10				
11		=B5	=C5	=D5	=E5	=F5				
12		=B6	=C6	=D6	=E6	=F6				
13		=B7	=C7	=D7	=E7	=F7				
14										
15		Шаг 2								
16		=B10	=C10	=D10	=E10	=F10				
17		=B11-$B$17*B10	=C11-$B$17*C10	=D11-$B$17*D10	=E11-$B$17*E10	=F11-$B$17*F10				
18		=B12-$B$18*B10	=C12-$B$18*C10	=D12-$B$18*D10	=E12-$B$18*E10	=F12-$B$18*F10				
19		=B13-$B$19*B10	=C13-$B$19*C10	=D13-$B$19*D10	=E13-$B$19*E10	=F13-$B$19*F10				
20										
21		Шаг 3								
22		=B16	=C16	=D16	=E16	=F16				
23		=B17/$C$23	=C17/$C$23	=D17/$C$23	=E17/$C$23	=F17/$C$23				
24		=B18	=C18	=D18	=E18	=F18				
25		=B19	=C19	=D19	=E19	=F19				
26										
27		Шаг 4								
28		=B22	=C22	=D22	=E22	=F22				
29		=B23	=C23	=D23	=E23	=F23				
30		=B24-$C$30*B23	=C24-$C$30*C23	=D24-$C$30*D23	=E24-$C$30*E23	=F24-$C$30*F23				
31		=B25-$C$31*B23	=C25-$C$31*C23	=D25-$C$31*D23	=E25-$C$31*E23	=F25-$C$31*F23				
32										
33		Шаг 5								
34		=B28	=C28	=D28	=E28	=F28				
35		=B29	=C29	=D29	=E29	=F29				
36		=B30/$D$36	=C30/$D$36	=D30/$D$36	=E30/$D$36	=F30/$D$36				
37		=B31/$D$37	=C31/$D$37	=D31/$D$37	=E31/$D$37	=F31/$D$37				
38										
39		Шаг 6								
40		=B34	=C34	=D34	=E34	=F34				
41		=B35	=C35	=D35	=E35	=F35				
42		=B36/$D$42	=C36/$D$42	=D36/$D$42	=E36/$D$42	=F36/$D$42				
43		=B37-$D$43*B36	=C37-$D$43*C36	=D37-$D$43*D36	=E37-$D$43*E36	=F37-$D$43*F36				
44										
45		Шаг 7								
46		=B40	=C40	=D40	=E40	=F40				
47		=B41	=C41	=D41	=E41	=F41				
48		=B42	=C42	=D42	=E42	=F42				
49		=B43/$E$49	=C43/$E$49	=D43/$E$49	=E43/$E$49	=F43/$E$49				

Шаг 1. Деление элементов первой строки на коэффициент при X1.
Шаг 2. Вычитание значений первой строки из последующих строк
Шаг 3. Деление элементов второй строки на коэффициент при X2
Шаг 4. Вычитание значений второй строки из последующих строк
Шаг 5. Деление элементов третьей строки на коэффициент при X3
Шаг 6. Вычитание значений третьей строки из значений четвертой строки

x1=	=F46-E46*J49-D46*J48-C46*J47
x2=	=F47-E47*J49-D47*J48
x3=	=F48-E48*J49
x4=	=F49

Шаг 1

1	-1	0,33333	1,33333	2
2	2	-1	4	13
8	6	4	-2	5
-3	1	7	-4	56

Шаг 2

1	-1	0,33333	1,33333	2
0	4	-1,66667	1,33333	9
0	14	1,33333	-12,6667	-11
0	-2	8	0	62

Шаг 3

1	-1	0,33333	1,33333	2
0	1	-0,41667	0,33333	2,25
0	14	1,33333	-12,6667	-11
0	-2	8	0	62

Шаг 4

1	-1	0,33333	1,33333	2
0	1	-0,41667	0,33333	2,25
0	0	7,16667	-17,3333	-42,5
0	0	7,16667	0,66667	66,5

Шаг 5

1	-1	0,33333	1,33333	2
0	1	-0,41667	0,33333	2,25
0	0	1	-2,4186	-5,93023
0	0	1	0,09302	9,27907

Шаг 6

1	-1	0,33333	1,33333	2
0	1	-0,41667	0,33333	2,25
0	0	1	-2,4186	-5,93023
0	0	0	2,51163	15,2093

Шаг 7

1	-1	0,33333	1,33333	2	x1=	-5,11627907
0	1	-0,41667	0,33333	2,25	x2=	3,863049096
0	0	1	-2,4186	-5,93023	x3=	8,715762274
0	0	0	1	6,05556	x4=	6,055555556

Шаг 5. Деление элементов третьей строки на коэффициент при X3

Шаг последний. Вычисление значений неизвестных

Самостоятельно решить следующие системы уравнений каждую всеми тремя способами

9	-17	14	-14
-7	-1	19	-12
18	9	-18	6

6	-24	-5	-4	-6
1	2	-9	25	25
-9	-9	20	21	-17
-18	4	12	21	16

-3	-18	2	-13	9	2
2	0	8	11	-22	-20
9	2	-10	-22	15	23
9	-21	7	-19	2	-1
-4	10	-13	-10	-9	-2