Теория вероятностей и математическая статистика

Кракашова Ольга Анатольевна

доцент, канд. экон. наук,

доцент кафедры Статистики, эконометрики и оценки рисков РГЭУ (РИНХ)

Лекция № 2

Классическое и статистическое определение вероятности. Основные теоремы теории вероятностей

Классическое определение вероятности

- **Вероятностью появления события *A*** *называют отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех единственно возможных и несовместных элементарных исходов.*
- Обозначим число благоприятствующих событию A исходов через M, а число всех исходов – N.

$$P(A) = \frac{M}{N}, \qquad (1)$$

где M - целое неотрицательное число, $0 \le M \le N$.

Статистическое определение вероятности

- Другой тип объективной вероятности определяется исходя из **относительной частоты (частости) по явления события.**
- **Относительной частотой события** называется отношение числа испытаний *m, при которых со- бытие появилось, к общему числу проведенных испытаний n.*

$$\mathbf{W(A) = \frac{m}{n},} \qquad \mathbf{(1.2)}$$

где m - целое неотрицательное число, $0 \leq m \leq n$

- **Статистической вероятностью события А** называется относительная частота (частость) этого события, вычисленная по результатам большого числа испытаний.

Будем обозначать её $P^*(A)$. Следовательно, $P^*(A) = \underset{\text{при}\, n\to\infty}{W(A)} = \underset{\text{при}\, n\to\infty}{m/n}$.

- При большом числе испытаний статистическая вероятность приближенно равна классической вероятности, т.е.

$$P^*(A) \approx P(A)$$

Для определения вероятности выпадения 1 или 2 при подбрасывании кости нам необходимо только знать “модель игры “, например, кость с 6 гранями. Мы можем определить наши шансы *теоретически*, без подбрасывания кости, это - **априорная** (доопытная) вероятность. Во втором примере мы можем определить вероятность только *по результатам опыта*, это - **апостериорная** (послеопытная) вероятность. То есть классическая вероятность - априорная, а статистическая - апостериорная.

Последовательность решения задач по определению вероятности события

1. Определить состав эксперимента.
2. Определить элементарное событие в данном опыте.
3. Определить полную группу событий, найти число элементарных событий, составляющих полную группу событий.
4. Определить интересующее нас событие, найти число элементарных событий, составляющих интересующее нас событие.
5. Найти вероятность события по формуле (1).

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1, то есть $P(\Omega) = 1$.

Действительно, если событие $A = \Omega$, то $M = N$, значит $P(\Omega) = N/N = 1$.

2. Если событие невозможное, то его вероятность равна 0, то есть $P(\varnothing) = 0$.

Если $A = \varnothing$, то оно не осуществится ни при одном испытании, то есть $M = 0$ и $P(\varnothing) = 0/N = 0$.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1.

В самом деле, так как $0 \le M \le N$, то $0 \le M/N \le 1$, то есть $0 \le P(A) \le 1$.

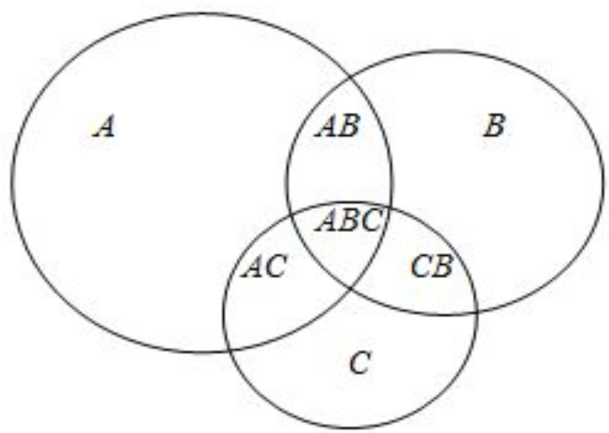
4. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, то есть $\mathbf{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$

Теоремы сложения вероятностей

- **Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.**

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

- В случае нескольких совместных событий необходимо по аналогии с рассуждениями о пересечении двух совместных событий исключить повторный учет областей пересечения событий.
- Рассмотрим три совместных события



Для случая трех совместных событий можно записать:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Пример : Предположим, что вероятность получить выпускнику определенную работу, равна 0,4 ($P(A)$), вероятность получить другую работу 0,5 $(P(B))$, вероятность получить предложения на оба места работы $(P(AB))$ - 0,3. В результате вероятность получения для него по крайней мере одного из мест работы $P(A+B)$ определяется по формуле

$$P(A+B)=0,4+0,5-0,3=0,6$$

Теоремы сложения вероятностей

- **Вероятность суммы несовместных событий. Для несовместных событий их совместное наступление есть невозможное событие, т.е.** $P(AB) = P(\varnothing) = 0.$
- Следовательно, **вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:**

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

- Правило сложения вероятностей справедливо и для конечного числа n попарно несовместных событий, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

или

$$P\sum_{i=1}^{n}(A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Свойство вероятностей событий, образующих полную группу

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$**, образующих полную группу событий, равна 1**.

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$