

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

раздел

“СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ”

ВВЕДЕНИЕ

3.1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов выполняются расчеты, на основании которых определяются необходимые размеры деталей машин и конструкций инженерных сооружений.

Вследствие общности основных положений, сопротивление материалов рассматривается как раздел механики твердых деформируемых тел.

В состав механики деформируемых тел входят также такие дисциплины, как: теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория разрушения и др., рассматривающие, по существу, те же вопросы, что и сопротивление материалов. Различие между сопротивлением материалов и другими теориями механики твердого деформируемого тела заключается в подходах к решению задач.

Строгие теории механики деформируемого тела базируются на более точной постановке проблем, в связи с чем, для решения задач приходится применять более сложный математический аппарат и проводить громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого возможности применения таких методов в практических задачах ограничены.

В свою очередь, методы сопротивления материалов базируются на упрощенных гипотезах, которые, с одной стороны, позволяют решать широкий круг инженерных задач, а с другой, получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. То есть данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям.

3.2. РЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ И РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о прочности или жесткости реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Расчетная схема конструкции – его упрощенная схема, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материалов сооружения. В сопротивлении материалов принято рассматривать все материалы как однородную сплошную среду, независимо от их микроструктуры. Под однородностью материала понимают независимость его свойств от величины выделенного из тела объема. И хотя в действительности реальный материал, как правило, неоднороден (уже в силу его молекулярного строения), тем не менее указанная особенность не является существенной, поскольку в сопротивлении материалов рассматриваются конструкции, размеры которых существенно превышают не только межатомные расстояния, но и размеры кристаллических зерен.

С понятием однородности тесно связано понятие сплошности среды, под которым подразумевают тот факт, что материал конструкции полностью заполняет весь отведенный ему объем, а значит в теле конструкции нет пустот.

Под действием внешних сил реальное тело меняет свои геометрические размеры. После снятия нагрузки геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки *называется упругостью*. При решении большинства задач в сопротивлении материалов принимается, что материал конструкций абсолютно упругий.

Обычно сплошная среда принимается изотропной, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Отдельно взятый кристалл материала анизотропен, но т.к. в объеме реального тела содержится бесконечно большое количество хаотично расположенных кристаллов, принимается, что материал изотропен.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схемам бруса (стержня) или оболочки. Как известно, любое тело в пространстве характеризуется тремя измерениями. *Брусом называется геометрический объект, одно из измерений которого (длина) много больше двух других.* Геометрически брус может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой, как это показано на рис. 3.1.

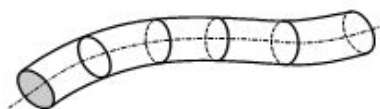


Рис. 3.1

Эта кривая называется осью бруса, а плоская замкнутая фигура, располагающая свой центр тяжести на оси бруса и нормальная к ней, называется его поперечным сечением. Брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение. Второй основной геометрической формой, рассматриваемой в сопротивлении материалов, является оболочка, под которой подразумевается тело, у которого одно из измерений (толщина) намного меньше, чем два других.

3.3. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Силы являются мерилем механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются внешними. Внешние силы, действующие на тело, можно разделить на активные (независимые) и реактивные. Реактивные усилия возникают в связях, наложенных на тело, и определяются действующими на тело активными усилиями.

По способу приложения внешние силы делятся на объемные и поверхностные.

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице. В частности, к объемным силам относятся собственный вес сооружения, магнитное притяжение или силы инерции. Единицей измерения объемных сил является сила, отнесенная к единице объема – кН/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами. В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные нагрузки подразделяются на сосредоточенные и распределенные. К первым относятся нагрузки, реальная площадь приложения которых несоизмеримо меньше полной площади поверхности тела (например, воздействие колонн на фундаментную плиту достаточно больших размеров можно рассматривать как действие на нее сосредоточенных усилий). Если же площадь приложения нагрузки сопоставима с площадью поверхности тела, то такая нагрузка рассматривается как распределенная. Сосредоточенные усилия измеряются в кН, а распределенные – кН/м^2 .

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется внутренними силами, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия.

Величины внутренних усилий определяются с применением метода сечений, суть которого заключается в следующем. Если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними усилиями также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 3.2, а).

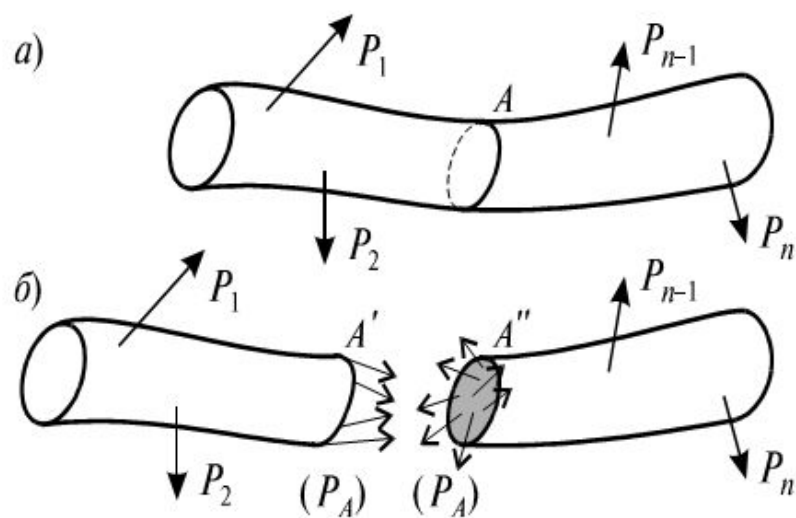


Рис. 3.2

Пусть к нему приложена некоторая система внешних сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

Если расечь брус сечением A на две части и правую отбросить, то, т.к. связи между частями тела устранены, необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил (P_A), действующей в сечении A (рис. 3.2, б).

Обозначая через $P_{\text{лев}}$ и $P_{\text{прав}}$ суммы внешних сил, приложенных соответственно, к левой и правой частям бруса (относительно сечения A), и учитывая, что

$$P_{\text{лев}} + P_{\text{прав}} = 0 \quad (3.1)$$

для отсеченных частей бруса получим следующие очевидные соотношения:

$$P_{\text{лев}} + P_A = 0; \quad P_{\text{прав}} + P_A = 0. \quad (3.2)$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил P_A в сечении A может определяться с равным успехом из условий равновесия либо левой, либо правой частей расеченного тела. В этом суть метода сечений.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения A при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование в механике твердого деформируемого тела носит название условия неразрывности деформаций.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил P_A к центру тяжести сечения A в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил \vec{R} и главный вектор момента \vec{M} (рис. 3.3). Далее выбираем декартову систему координат x, y, z , с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения A . Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил \vec{R} и главный момент \vec{M} на координатные оси x, y, z , получаем шесть составляющих: три силы N_z, Q_x, Q_y , и три момента M_z, M_x, M_y , называемых внутренними силовыми факторами в сечении бруса.

Составляющая N_z называется нормальной, или продольной силой в сечении. Силы Q_x и Q_y называются поперечными усилиями. Момент M_z

называется крутящим моментом, а моменты M_x и M_y – изгибающими моментами относительно осей x и y , соответственно.

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части.

Пусть \vec{R} , \vec{M} – результирующая сила и результирующий момент действующие на отсеченной части тела. Если тело при действии полной системы внешних сил находится в равновесном состоянии, то условия равновесия отсеченной части тела имеет вид:

$$R^* = 0; M^* = 0. \quad (3.3)$$

Последние два векторные уравнения равновесия дают шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовых осях координат:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \\ \sum m_x &= 0; \sum m_y = 0; \sum m_z = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которые в общем случае составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно шести неизвестных внутренних усилий: $Q_x, Q_y, N_z, M_x, M_y, M_z$.

Следовательно, если полная система внешних сил известна, то по методу сечений, всегда можно определить все внутренние усилия действующих в произвольно взятом сечении тела. Данное положение является основополагающим обстоятельством в механике твердого деформируемого тела.

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют, такие виды нагружения бруса получили специальные названия.

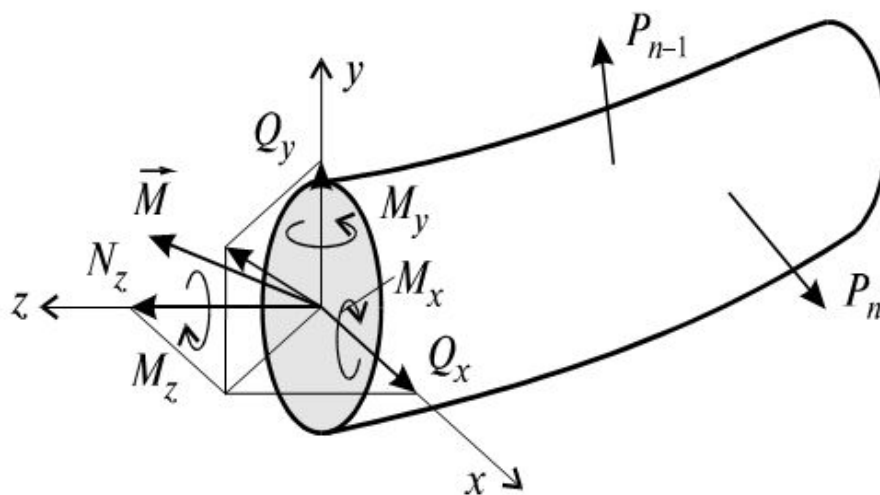


Рис. 3.3

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует одно внутреннее усилие, условно называются простыми. При одновременном действии в сечении бруса двух и более усилий сопротивление бруса называется СЛОЖНЫМ.

При выполнении практических расчетов, для наглядности, как правило, определяются графики функций внутренних силовых факторов относительно координатной оси, направленной вдоль продольной оси стержня. Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются эпюрами.

3.4. НАПРЯЖЕНИЯ

В окрестности произвольной точки K , принадлежащей сечению A некоторого нагруженного тела, выделим элементарную площадку ΔF , в пределах которой действует внутреннее усилие $\Delta \vec{R}$ (рис. 1.4, а). Векторная величина

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta F} \right) = \vec{P} \quad (3.5)$$

называется полным напряжением в точке K . Проекция вектора полного напряжения \vec{P} на нормаль к данной площадке обозначается через σ и называется *нормальным напряжением*.

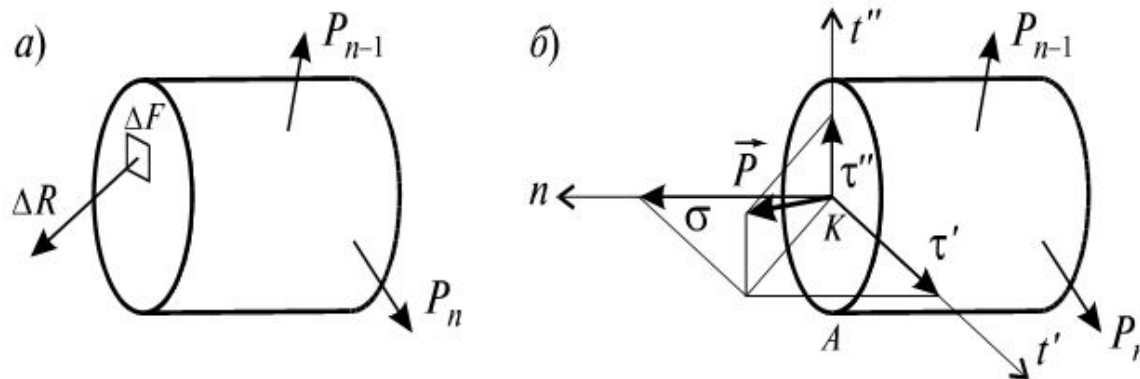


Рис.3.4

Проекции вектора \vec{P} на перпендикулярные оси в плоскости площадки (рис. 1.4, б) называются касательными напряжениями по направлению соответствующих осей и обозначаются τ' и τ'' . Если через ту же самую точку K провести другую площадку, то, в общем случае будем иметь другое полное напряжение. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку, образует напряженное состояние в этой точке.

3.5. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою геометрическую форму, а точки тела неодинаково перемещаются в пространстве. Вектор \vec{T} , имеющий свое начало в точке A недеформированного состояния, а конец в т. A' деформированного состояния, называется вектором полного перемещения т. A (рис. 1.5, а). Его проекции на оси x, y, z , называются осевыми перемещениями и обозначаются u, v , и w , соответственно.

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки A и его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии S друг от друга (рис. 3.5, б).

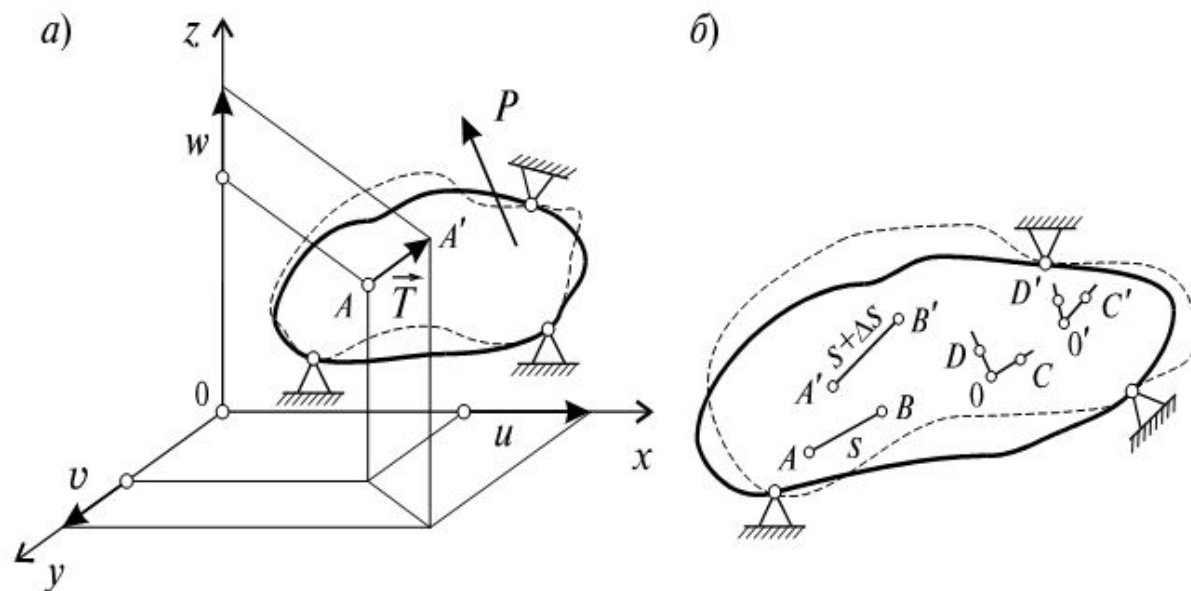


Рис. 3.5

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положение A' и B' , соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину ΔS и составило $S + \Delta S$. Величина

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{S}}{S} \right) = \vec{\varepsilon} \quad (3.6)$$

называется линейной деформацией в точке A по направлению AB .

Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей x, y, z , то в обозначения соответствующих проекций линейной деформации вводятся индексы $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ характеризуют изменения объема тела в процессе деформирования, а формоизменения тела – угловыми деформациями. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном состоянии двумя отрезками OD и OC (рис. 3.5, б). При действии внешних сил указанный угол $\angle DOC$ изменится и примет новое значение $\angle D'O'C'$. Величина

$$\lim_{OC \rightarrow 0, OD \rightarrow 0} \angle D'O'C' - \angle DOC = \gamma \quad (3.7)$$

называется угловой деформацией, или сдвигом в точке O в плоскости COD . Относительно координатных осей деформации сдвига обозначаются $\gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}$.

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует деформированное состояние в точке.

3.6. ЗАКОН ГУКА И ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ

В соответствии с этим законом перемещение произвольно взятой точки A (рис. 3.5, а) нагруженного тела по некоторому направлению, например, по оси x , а может быть выражено следующим образом:

$$u = \delta_x \cdot P, \quad (3.8)$$

где P – сила, под действием которой происходит перемещение u ; δ_x – коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.

Коэффициент δ_x зависит от физико–механических свойств материала, взаимного расположения точки A и точки приложения и направления силы P , а также от геометрических особенностей системы. Таким образом, последнее выражение следует рассматривать как закон Гука для данной системы.

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжениями и деформациями, а не между силой и перемещением. Коэффициенты пропорциональности в этом случае представляют собой физико–механические характеристики материала и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, *подчиняются принципу суперпозиции, или принципу независимости действия сил.*

В соответствии с этим принципом перемещения и внутренние силы, возникающие в упругом теле, считаются независимыми от порядка приложения внешних сил. То есть, если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил получить как сумму действий каждой силы в отдельности. Принцип независимости действия сил является одним из основных способов при решении большинства задач механики линейных систем.

3.7. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

3.7.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

Под *растяжением (сжатием)* понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а прочие силовые факторы равны нулю.

Однородный прямолинейный стержень длиной L и площадью поперечного сечения F , на двух концах которого приложены две равные по величине и противоположно направленные центральные продольные силы P (рис. 3.6, а). Поместим начало плоской системы координат uz в центре тяжести левого сечения, а ось z направим вдоль продольной оси стержня.

Для определения величин внутренних усилий используется метод сечений. Задавая некоторое сечение на расстоянии z ($0 \leq z \leq L$) от начала системы координат и рассматривая равновесие левой относительно заданного сечения части стержня (рис. 3.6, б), приходим к следующему уравнению:

$$\sum z = 0 \rightarrow P + N_z = 0,$$

откуда следует, что

$$N_z = P = \text{const.}$$

Нормальная сила N_z приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и, в соответствии с этим, определяется следующим образом:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF.$$

Для определения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня рассмотрим характера его деформирования.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 3.6, б), то после нагружения поперечные линии $a-a, b-b$ и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует гипотезе плоских сечений, введенной швейцарским ученым Д. Бернулли, гласящей, что плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации.

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N_z}{F},$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 3.6, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций. Основанием для такого утверждения служит принцип Сен-Венана, справедливый для любого типа напряженного состояния и формулируемый следующим образом: особенности приложения внешних нагрузок проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня.

3.7.2. УДЛИНЕНИЕ СТЕРЖНЯ И ЗАКОН ГУКА

Однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 3.7). До нагружения стержня его длина равнялась l , после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 3.7). Величину Δl называют абсолютным удлинением стержня.

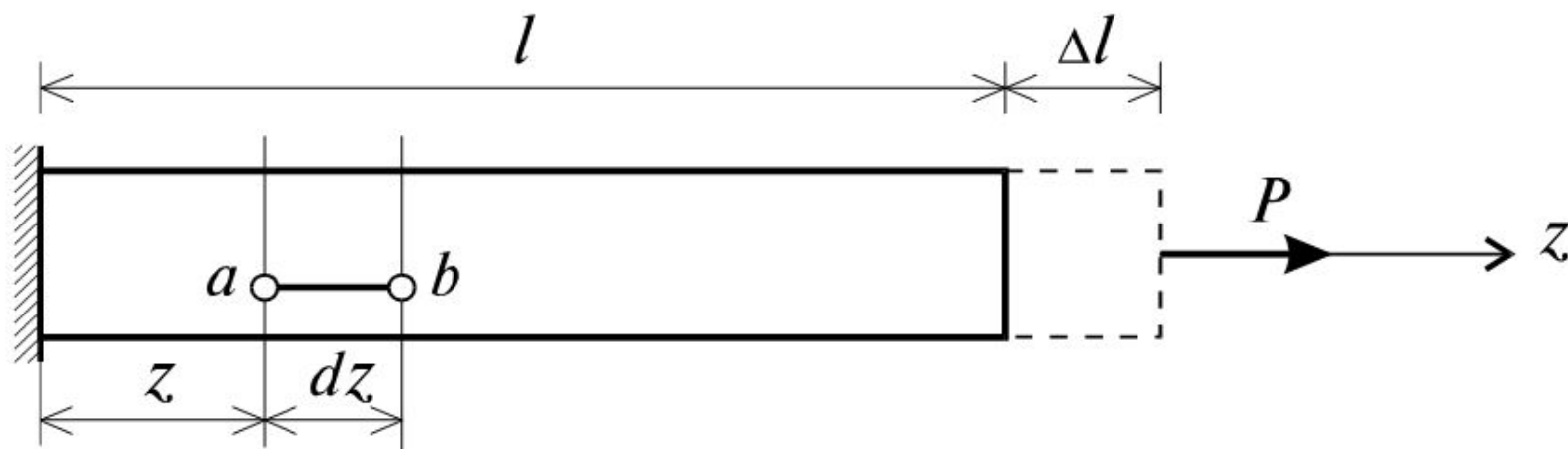


Рис. 3.7

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.9)$$

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (рис. 3.7). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (3.10)$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (3.11)$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости материала первого рода. Из совместного рассмотрения уравнений (3.10) и (3.11) получим:

$$\Delta dz = \sigma \cdot \frac{dz}{E}$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \quad \text{и} \quad \Delta l = \int_0^l \Delta dz,$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z \cdot dz}{E \cdot F} \quad (3.12)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = const$, имеет постоянное поперечное сечение $F = const$, и нагружен по концам силой P , то из (3.12) получим

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \quad (3.13)$$

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot t, \quad (3.14)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала; t – перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} + l \cdot \alpha \cdot t \quad (3.15)$$

3.7.3. НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Рассмотрим более подробно особенности напряженного состояния, возникающего в однородном растянутом стержне. Определим напряжения, возникающие на некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения (рис. 3.10, а).

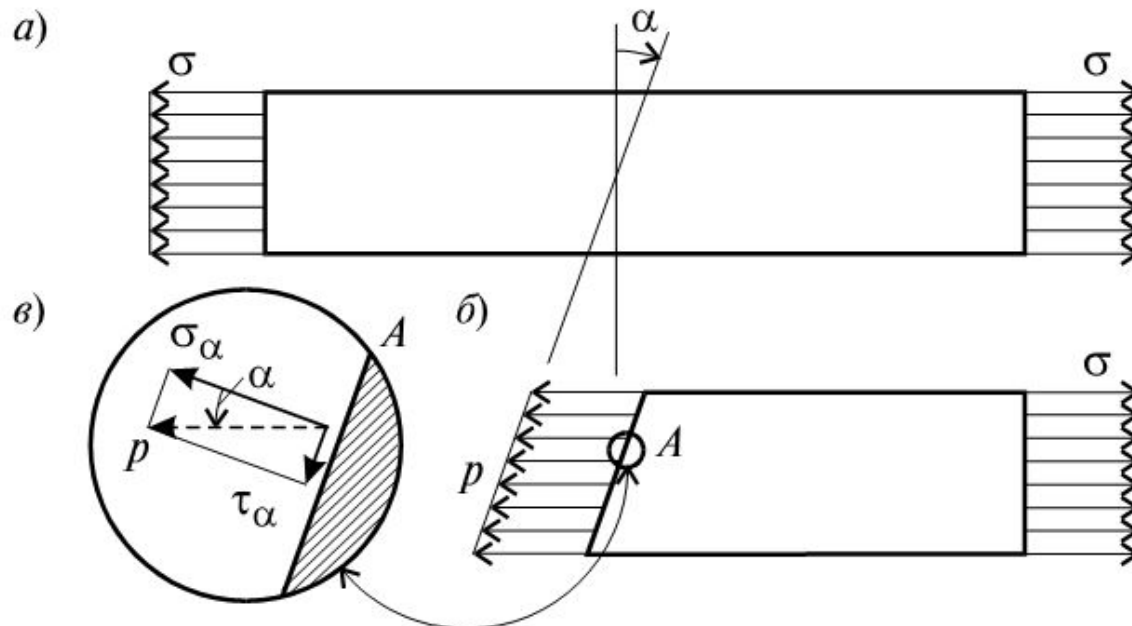


Рис. 3.10

Из условия $\sum z = 0$, записанного для отсеченной части стержня (рис. 3.10, б), получим:

$$p \cdot F_a = \sigma \cdot F \quad (3.25)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, $F_a = F / \cos a$ – площадь наклонного сечения. Из (3.25) легко установить:

$$p = \sigma \cdot \cos a. \quad (3.26)$$

Раскладывая напряжение p по нормали и касательной к наклонной площадке (рис. 3.10, в), с учетом (3.26) получим:

$$\sigma_a = p \cdot \cos a = \sigma \cdot \cos^2 a; \quad \tau_a = p \cdot \sin a = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2a. \quad (3.27)$$

Полученные выражения показывают, что для одной и той же точки тела величины напряжений, возникающих в сечениях, проходящих через эту точку, зависят от ориентации этой площадки, т.е. от угла. При $\alpha = 0$ из (3.27)

следует, что $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. на продольных площадках,

$\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$. Это означает, что продольные слои растянутого стержня не взаимодействуют друг с другом. Касательные напряжения τ_α принимают

наибольшие значения при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и их величина составляет $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$. Важно отметить, как это следует из (3.27), что $|\tau_{\alpha}| = |\tau_{(\alpha+\pi/2)}|$. Следовательно, в любой точке тела на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны между собой по абсолютной величине. Это условие является общей закономерностью любого напряженного состояния и носит название *закона парности касательных напряжений*.

Удлинение в продольном направлении сопровождается пропорциональным уменьшением поперечных размеров стержня (рис. 3.11).

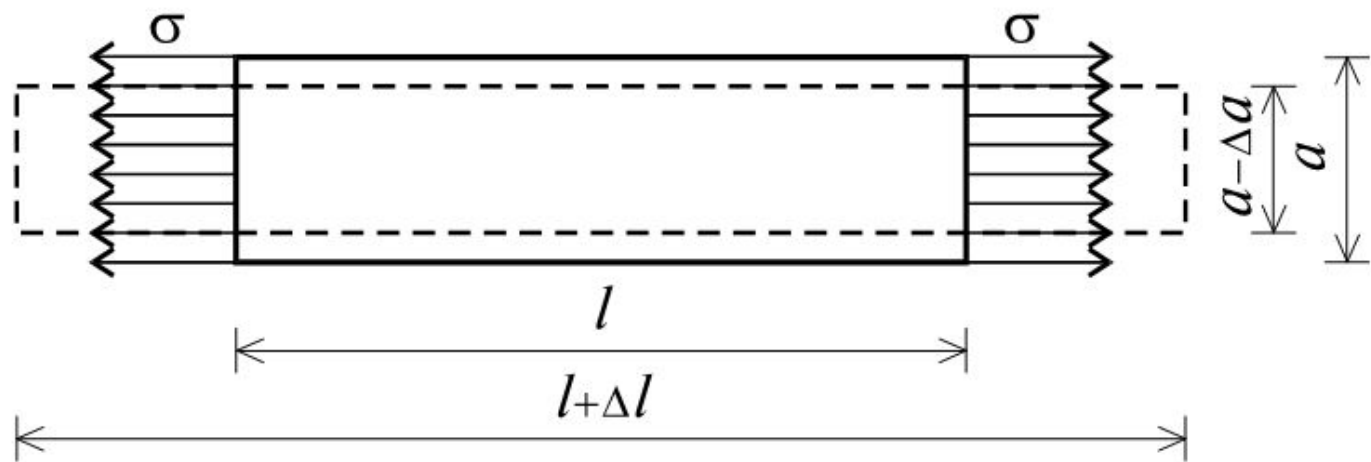


Рис. 3.11

Если обозначить:

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_{\text{попер}} = -\frac{\Delta}{a}, \quad \mu = \frac{\varepsilon_{\text{прод}}}{\varepsilon_{\text{попер}}},$$

то, как показывают эксперименты, $\mu = \text{const}$ для данного материала и является *безразмерным коэффициентом Пуассона*. Величина μ является важной характеристикой материала и определяется экспериментально. Для реальных материалов μ принимает значения $0,1 \div 0,45$.

При растяжении стержня возникают не только линейные, но и угловые деформации.

Рассмотрим прямой угол ABC (рис. 3.12, а), образованный отрезками AB и AC , в недеформированном состоянии.

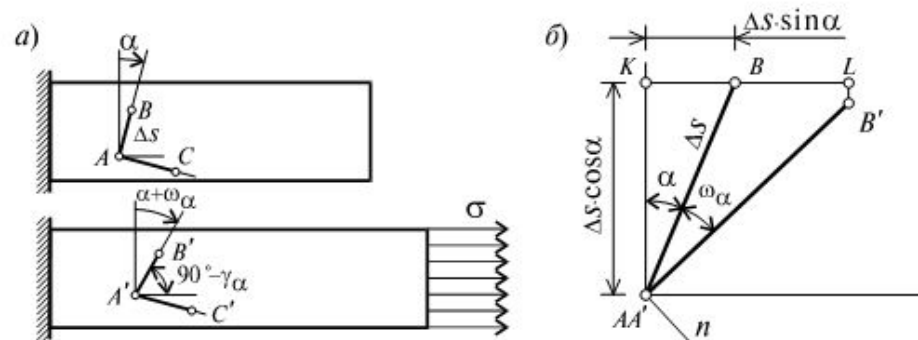


Рис. 3.12

При растяжении стержня точки A, B и C займут положение A', B', C' соответственно. Величина

$$\gamma_a = \angle BAC - \angle A'B'C'$$

называется *угловой деформацией* или *угловым сдвигом* в точке A .

Совместим точки A и A' и рассмотрим взаимное расположение отрезков AB и $A'B'$ (рис. 3.12, б). На этом рисунке отметим вспомогательные точки K и L и прямую n , перпендикулярную отрезку $A'B'$. Из рис. 3.12, б имеем:

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{BL}{KB}; \quad \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{LB'}{AK},$$

откуда с учетом $\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\sigma}{E}$ получим:

$$BL = \frac{\sigma}{E} \Delta S \sin \alpha; \quad LB' = \mu \frac{\sigma}{E} \Delta S \cos \alpha. \quad (3.28)$$

Для определения ω_α спроектируем ломаную $BLB'A'$ на ось n
 $\Delta S \cdot \sin \omega_\alpha = BL \cos(\alpha + \omega_\alpha) + LB' \sin(\alpha + \omega_\alpha)$, откуда, учитывая малость угла ω_α , т.е. $\sin \omega_\alpha \approx \omega_\alpha$, $\cos \omega_\alpha \approx 1$, получим:

$$\omega_\alpha = \frac{B \cdot L \cdot \cos \alpha + L \cdot B' \cdot \sin \alpha}{\Delta S}. \quad (3.29)$$

В результате совместного рассмотрения (3.28) и (3.29) получим:

$$\omega_{\alpha} = \frac{\sigma}{2 \cdot E} \cdot (1 + \mu) \cdot \sin 2\alpha.$$

Откуда

$$\omega_{(\alpha+\pi/2)} = -\frac{\sigma}{2 \cdot E} \cdot (1 + \mu) \cdot \sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$\gamma_{\alpha} = \omega_{\alpha} - \omega_{(\alpha+\pi/2)} = \frac{\sigma}{E} (1 + \mu) \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.30)$$

Сопоставляя выражение γ_{α} с выражением τ_{α} из (3.25) окончательно получим закон Гука для сдвига:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3.31)$$

где величина $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ называется модулем сдвига или модулем упругости материала второго рода.

3.7.4 ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

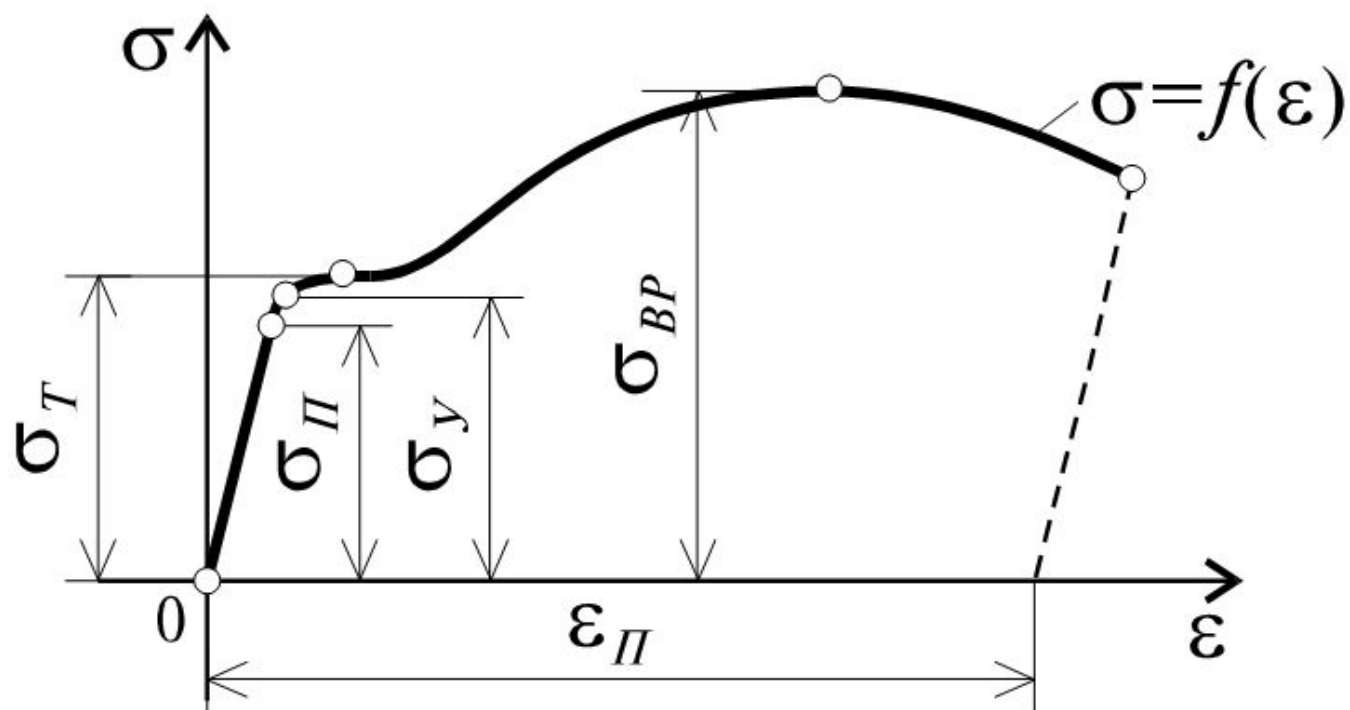


Рис. 3.13

Для количественной оценки основных свойств материалов, как правило, экспериментально определяют диаграмму растяжения в координатах σ и ε (рис. 3.13). На диаграмме отмечены характерные точки. Дадим их определение.

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется *пределом пропорциональности* σ_{II} . В пределах закона Гука тангенс угла наклона прямой $\sigma = f(\varepsilon)$ к оси ε определяется величиной E .

Упругие свойства материала сохраняются до напряжения σ_y , *называемого пределом упругости*. Под пределом упругости σ_y понимается такое наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций, т.е. после полной разгрузки последняя точка диаграммы совпадает с начальной точкой 0.

Величина σ_T называется *пределом текучести материала*. Под пределом текучести понимается то напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки.

Если необходимо различать предел текучести при растяжении и сжатии σ_T соответственно заменяется на σ_{TP} и σ_{TC} . При напряжениях больших σ_T в теле конструкции развиваются пластические деформации ε_{II} , которые не исчезают при снятии нагрузки.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения носит название предела прочности, или временного сопротивления, и обозначается через, σ_{BP} (при сжатии σ_{BC}).

При выполнении практических расчетов реальную диаграмму (рис. 3.13) упрощают, и с этой целью применяются различные аппроксимирующие диаграммы. Для решения задач с учетом упруго–пластических свойств материалов конструкций чаще всего применяется диаграмма Прандтля. По этой диаграмме напряжение изменяется от нуля до предела текучести по закону Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$, а далее при росте ε , $\sigma = \sigma_T$

3.8. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИИ

Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов сооружений на прочность является расчет по напряжениям. В основу этого метода положено предположение, что определяющим параметром надежности конструкции является напряжение или, точнее говоря, напряженное состояние в точке. Расчет выполняется в следующем порядке.

На основании анализа напряженного состояния конструкции выявляется та точка сооружения, где возникают наибольшие напряжения. Расчетная величина напряжений сопоставляется с предельно допустимой величиной напряжений для данного материала, полученной на основе предварительных лабораторных испытаний. Из сопоставления найденных расчетных напряжений и предельных напряжений делается заключение о прочности конструкции.

Указанный метод является не единственным. Например, на практике в некоторых случаях используется метод расчета конструкций по разрушающим нагрузкам. В этом методе путем расчета определяется предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не изменяя существенно свою форму. Предельная (разрушающая) нагрузка сопоставляется с проектной нагрузкой, и на этом основании делается вывод о несущей способности конструкции в эксплуатационных условиях.

Методы расчета конструкций выбираются в зависимости от условий работы конструкций и требований, которые к ней предъявляются. Если необходимо добиться наименьших изменений формы конструкции, то *производится расчет по допускаемым перемещениям*. Это не исключает и одновременной проверки системы на прочность по напряжениям.

При расчете конструкций по напряжениям условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.32)$$

где σ_{\max} – расчетное значение напряжения в точке, где возникают наибольшие напряжения, $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Величина $[\sigma]$ определяется по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\alpha}}{n} \quad (3.33)$$

Здесь n – число, большее единицы, называемое коэффициентом запаса по прочности. Для особо ответственных конструкций, для которых требуется не допускать возникновения пластических деформаций, за величину σ_{α} принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_y$. В тех случаях, когда допустимо возникновение пластических деформаций, как правило, принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_T$. Для хрупких материалов, а в некоторых случаях и умеренно пластических материалов, принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_B$. Здесь σ_B – временное сопротивление материала.

Критерий прочности, принятый в методе допускаемых напряжений, а именно, напряжения в точке, не всегда и не полностью характеризует условие наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать заданная система, не разрушаясь и несущественно изменяя свою форму.

3.9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСА

3.9.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ СЕЧЕНИЯ

При решении практических задач возникает необходимость в использовании различных геометрических характеристик поперечных сечений бруса. Настоящий раздел посвящен методам их определения. Рассмотрим некоторое поперечное сечение в системе координат x, y (рис. 3.16) и рассмотрим два следующих интегральных выражения:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \quad S_y = \int_F x \cdot dF \quad (3.37)$$

где нижний индекс y знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения F . Каждый из этих интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок dF на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется статическим моментом сечения относительно оси x , а второй – относительно оси y .

При выполнении практических расчетов важно знать, как меняются статические моменты сечения при параллельном переносе координатных осей (рис 3.17).

Очевидно, что

$$x = x_1 + a, y = y_1 + b. \quad (3.38)$$

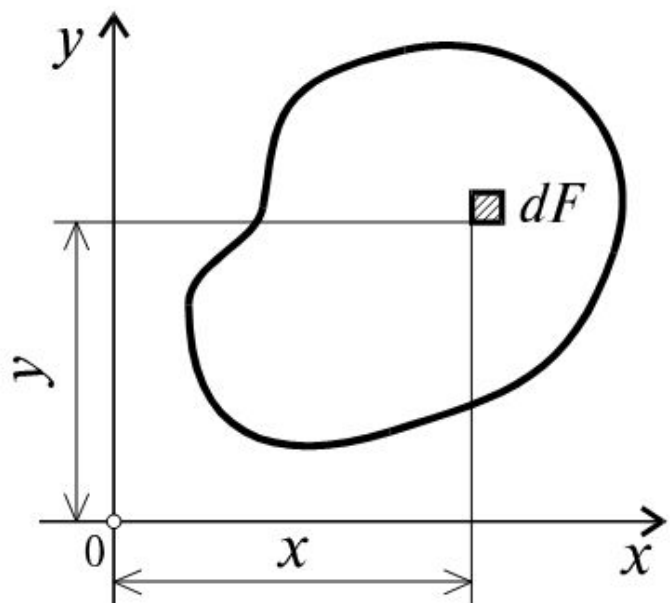


рис. 3.16

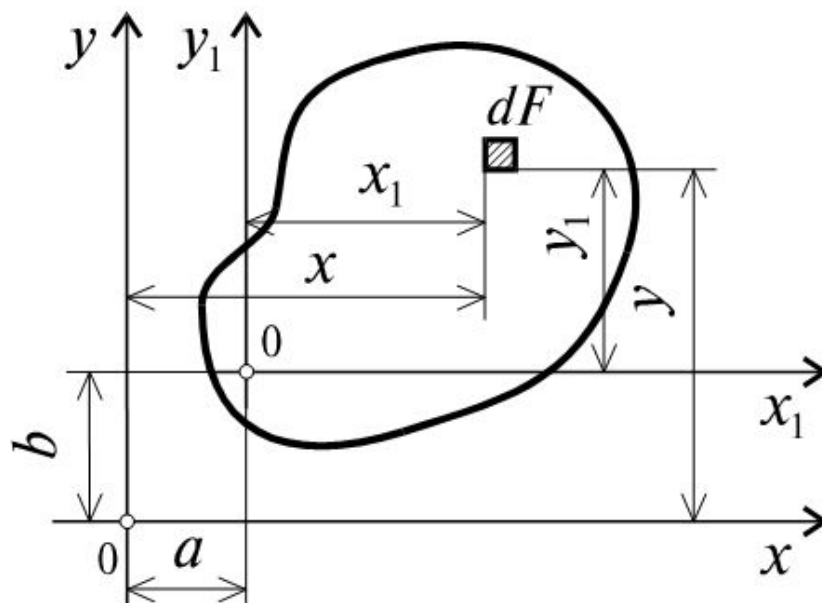


рис. 3.17

Подставляя (3.38) в (3.37) получим:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_F (y_1 + b) \cdot dF = \int_F y_1 \cdot dF + b \cdot F \\ S_y &= \int_F (x_1 + a) \cdot dF = \int_F x_1 \cdot dF + a \cdot F \end{aligned} \quad (3.39)$$

Величины a и b можно подобрать (причем единственным образом) так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$b \cdot F = S_x; \quad a \cdot F = S_y, \quad (3.40)$$

тогда статические моменты $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной. Точка $C (x_c, y_c)$ пересечения центральных осей называется центром тяжести сечения в системе координат (x, y) и определяется из (3.40):

$$x_c = a = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = b = \frac{S_x}{F}. \quad (3.41)$$

Далее предположим, что брус имеет составное сечение (рис. 3.39) с общей площадью F . Обозначим через F_k ($k=1,2,3,\dots,n$) площадь k -ой области, принадлежащей к составному сечению бруса. Тогда выражение (3.37) можно преобразовать в следующем виде:

$$S_x = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} y \cdot dF = \sum_{k=1}^n S_x^k; \quad S_y = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} x \cdot dF = \sum_{k=1}^n S_y^k, \quad (3.42)$$

где $S_x^{(k)}, S_y^{(k)}$ – статические моменты k -той области относительно осей x и y . Следовательно, статический момент составного сечения равен сумме статических моментов составляющих областей.

3.9.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

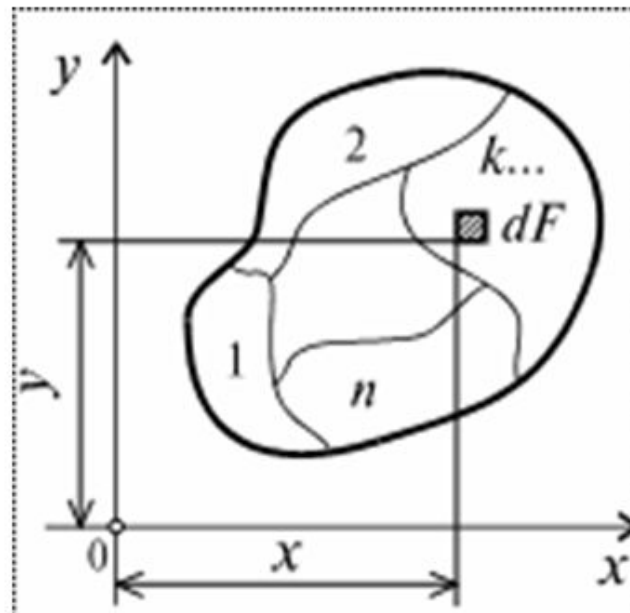


рис.

В дополнение к статическим моментам в системе координат x_0y (рис. 3.16) рассмотрим три интегральных выражения:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_F y^2 \cdot dF; & I_y &= \int_F x^2 \cdot dF; \\
 I_{xy} &= \int_F y \cdot x \cdot dF;
 \end{aligned}
 \tag{3.43}$$

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y , а третье – центробежным моментом инерции сечения относительно осей x, y .

Для сечений, состоящих из n -числа областей (рис. 3.18), формулы (3.43) по аналогии с (3.43) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum_{k=1}^n \int_{F_k} y^2 \cdot dF = \sum_{k=1}^n I_x^k; & I_y &= \sum_{k=1}^n \int_{F_k} x^2 \cdot dF = \sum_{k=1}^n I_y^k \\
 I_{xy} &= \sum_{k=1}^n \int_{F_k} x \cdot y \cdot dF = \sum_{k=1}^n I_{xy}^k
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 3.17). Преобразуя формулы (3.43) с учетом выражения (3.38), получим :

$$\begin{aligned}I_x &= I_{x_1} + 2 \cdot b \cdot S_{x_1} + b^2 \cdot F \\I_y &= I_{y_1} + 2 \cdot a \cdot S_{y_1} + a^2 \cdot F \\I_{xy} &= I_{x_1 y_1} + a \cdot S_{x_1} + b \cdot S_{y_1} + a \cdot b \cdot F\end{aligned}\tag{3.44}$$

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 3.38) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и выражения (3.44) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}I_x &= I_{x_1} + b^2 \cdot F \\I_y &= I_{y_1} + a^2 \cdot F \\I_{xy} &= I_{x_1 y_1} + a \cdot b \cdot F\end{aligned}\tag{3.44}$$

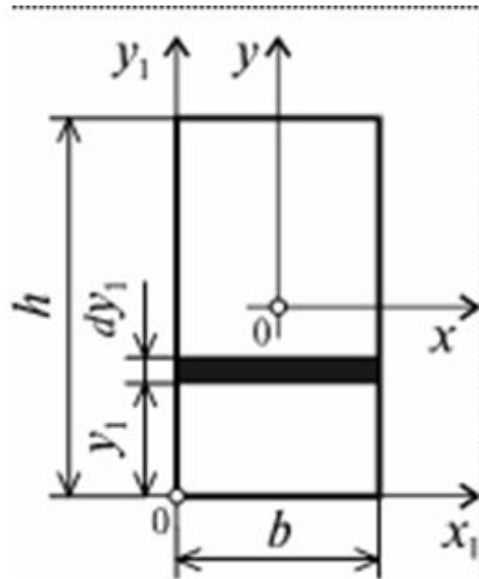


рис. 3.19

Осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести (рис. 3.19). В качестве элементарной площадки dF возьмем полоску шириной b и высотой dy (рис. 3.19). Тогда будем иметь:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF = \int_{h/2}^{h/2} y^2 \cdot dF \cdot b \cdot dy = \frac{b}{3} \cdot \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$.

3.9.3. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции плоского сечения при повороте осей координат из положения x и y к положению u и v .

Из рис. 3.5, б легко установить, что

$$u = y \cdot \sin a + x \cdot \cos a; \quad v = y \cdot \cos a - x \cdot \sin a. \quad (3.10)$$

Из выражений:

$$I_u = \int_F v^2 \cdot dF; \quad I_v = \int_F u^2 \cdot dF; \quad I_{uv} = \int_F u \cdot v \cdot dF;$$

с учетом (3.10) после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\ I_v &= I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= 0,5 \cdot (I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (3.11)$$

Складывая первые два уравнения, получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p, \quad (3.12)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$; I_ρ – полярный момент инерции сечения, величина которого, как видно, не зависит от угла поворота координатных осей.

Дифференцируя в (3.11) выражение I_u по α и приравнявая его нулю, находим значение $\alpha = \alpha_0$, при котором функция I_u принимает экстремальное значение:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (3.13)$$

С учетом (3.12) можно утверждать, что при $\alpha = \alpha_0$ один из осевых моментов I_u или I_v будет наибольшим, а другой наименьшим. Одновременно при $\alpha = \alpha_0$ I_{uv} обращается в нуль, что легко установить из третьей формулы (3.11).

Декартовы оси координат, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными и определяются из (3.11) с учетом (3.13) и имеют вид:

$$I_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (3.14)$$

4. КРУЧЕНИЕ

4.1. КРУЧЕНИЕ БРУСА С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы, т.е. N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y равны нулю.

Для крутящего момента, независимо от формы поперечного сечения бруса, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_z направленным по часовой стрелке, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается отрицательный знак.

При расчете бруса на кручение (вала) требуется решить две основные задачи. Во – первых, необходимо определить напряжения, возникающие в бруссе, и, во – вторых, надо найти угловые перемещения сечений бруса в зависимости от величин внешних моментов.

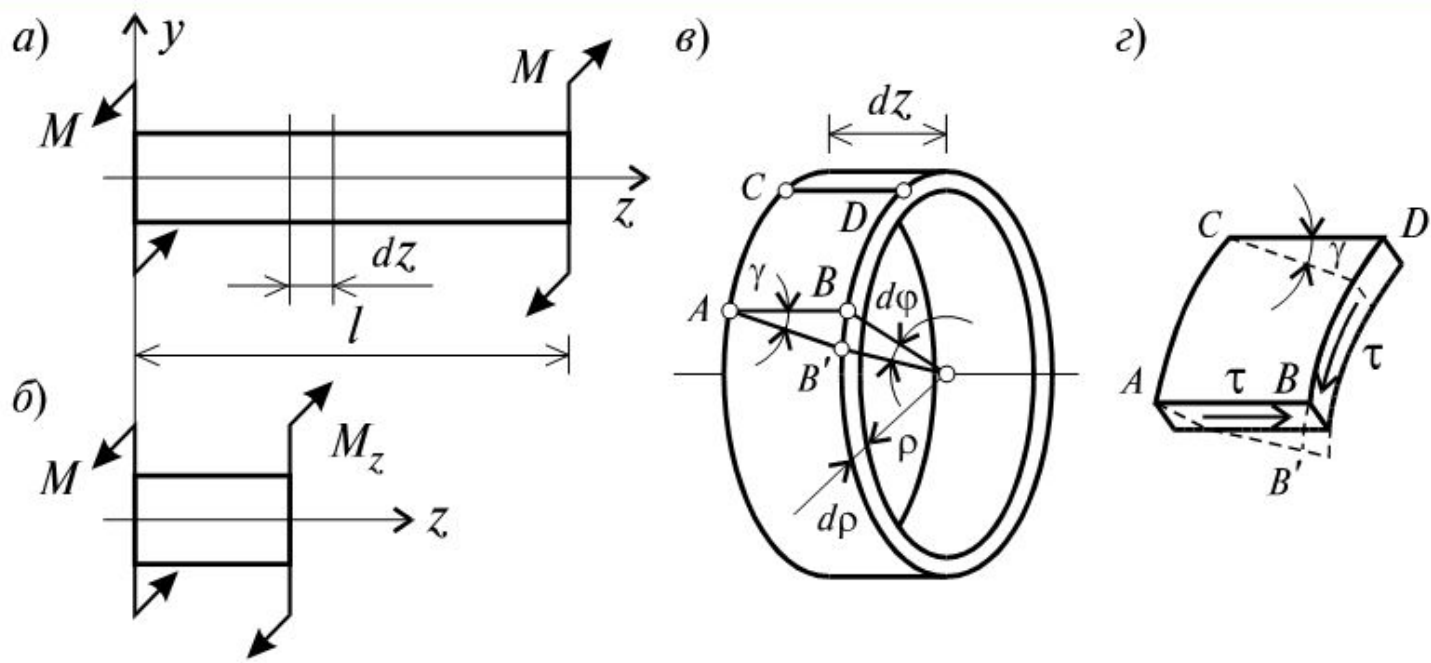


Рис. 4.1

Наиболее просто можно получить решение для вала с круглым поперечным сечением (рис. 4.1 а). Механизм деформирования бруса с круглым поперечным сечением можно представить в виде. Предполагая, что каждое поперечное сечение бруса в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое.

Данное предположение, заложенное в основу теории кручения, носит название *гипотезы плоских сечений*.

Для построения эпюры крутящих моментов M_z применим традиционный метод сечений – на расстоянии z от начала координат рассежем брус на две части и правую отбросим (рис. 4.1, б). Для оставшейся части бруса, изображенной на рис. 4.1, б, составляя уравнение равенства нулю суммы крутящих моментов $\sum M_z = 0$, получим:

$$M_z = M \quad (4.1)$$

Поскольку сечение было выбрано произвольно, то можно сделать вывод, что уравнение (4.1) верно для любого сечения вала – крутящий момент M_z в данном случае постоянен по всей длине бруса.

Далее двумя поперечными сечениями, как это показано на рис. 4.1, а, из состава бруса выделим элемент длиной dz , а из него свою очередь двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим элементарное кольцо, показанное на рис. 4.1, в. В результате кручения правое торцевое сечение кольца повернется на угол $d\varphi$. При этом образующая цилиндра АВ повернется на угол γ и займет положение АВ'. Дуга ВВ' равна с одной стороны, $\rho d\varphi$, а с другой стороны – γdz . Следовательно,

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (4.2)$$

Если разрезать образовавшуюся фигуру по образующей и развернуть (рис. 4.1, з), то можно видеть, что угол γ представляет собой не что иное, как угол сдвига данной цилиндрической поверхности под действием касательных напряжений τ , вызванных действием крутящего момента. Обозначая

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \quad (4.3)$$

где Θ – относительный угол закручивания. Этот угол представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними. Величина Θ аналогична относительному удлинению при простом растяжении или сжатии стержня.

Из совместного рассмотрения (4.2) и (4.3) и после некоторых преобразований, получим:

$$y = \rho \cdot \theta. \quad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в выражение закона Гука для сдвига (2.23), в данном случае выражение касательных напряжений принимает следующий вид:

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad (4.5)$$

где τ – касательные напряжения в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях в осевых сечениях. Величину крутящего момента M_z можно определить через τ с помощью следующих рассуждений.

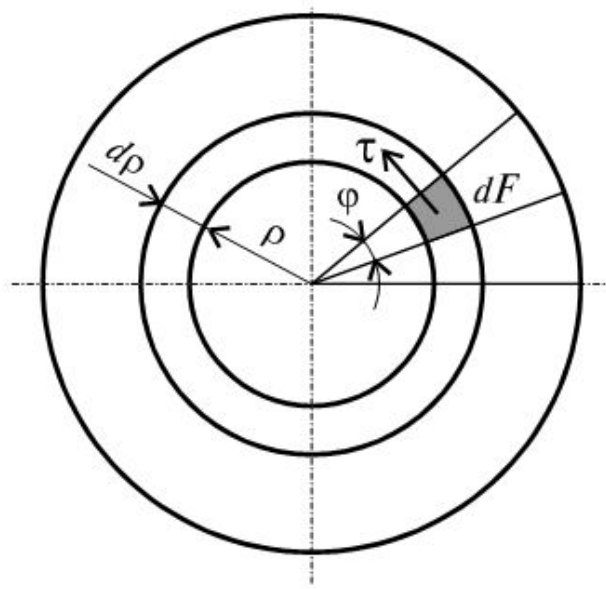


рис. 4.2

Момент относительно оси z от действия касательных напряжений τ на элементарной площадке dF равен (рис. 4.2):

$$dM = \tau \cdot \rho \cdot dF$$

Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим:

$$M_z = \int_F \tau \cdot \rho \cdot dF \quad (4.6)$$

Из совместного рассмотрения (4.5) и (4.6) получим:

$$M_z = G \cdot \theta \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF = G \cdot \theta \cdot I_\rho \quad (4.7)$$

Откуда

$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} \quad (4.8)$$

Величина $G \cdot I_\rho$ называется жесткостью бруса при кручении.

Из (4.8), с учетом (4.3), интегрируя полученное выражение по параметру z , получим:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_z \cdot z}{G \cdot I_p} \cdot dz \quad (4.9)$$

Если крутящий момент M_z и жесткость $G \cdot I_p$ по длине бруса постоянны, то из (4.9) получим:

$$\varphi(z) = \frac{M_z \cdot dz}{G \cdot I_p} + \varphi \quad (4.10)$$

где $\varphi(0)$ – угол закручивания сечения в начале системы отсчета.

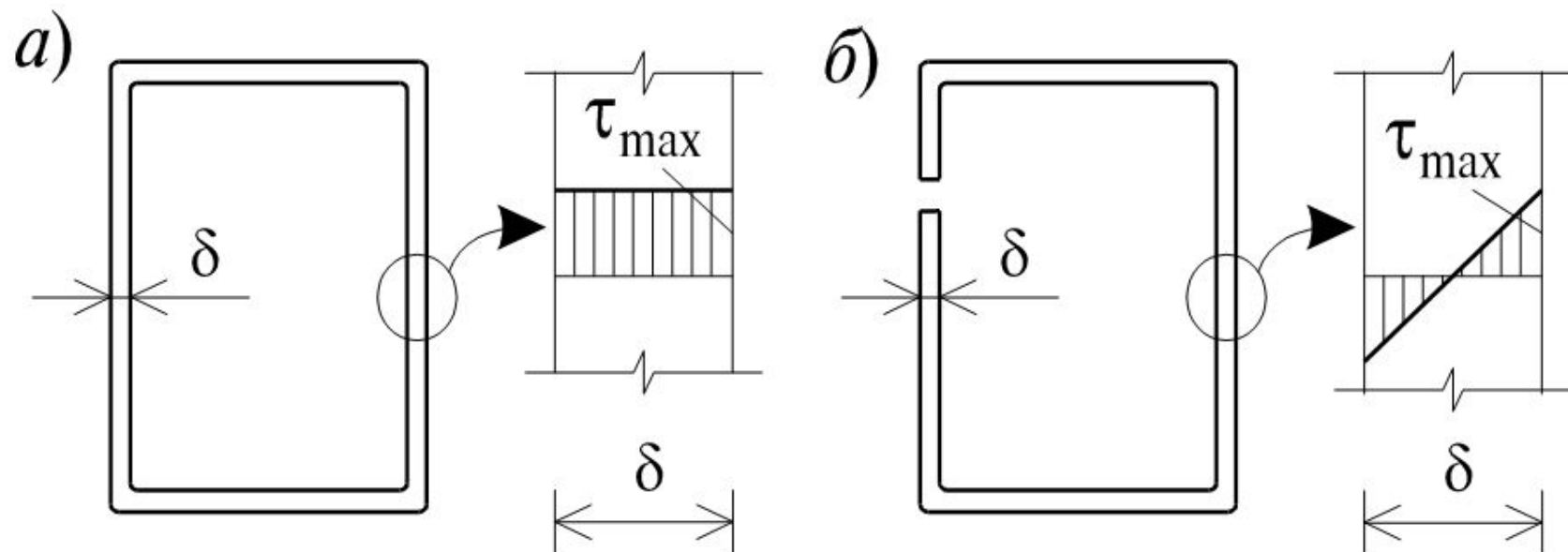
Для определения выражения напряжений, возвращаясь к формуле (4.5) и исключая из него θ , согласно (4.8), получим:

$$\tau(\rho) = \frac{M_z \cdot dz}{G \cdot I_p} \cdot \rho \quad (4.11)$$

Величина $W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$ называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения бруса в форме сплошного круга радиусом R .

4.4. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО БРУСА

В машиностроении, авиастроении и вообще в технике широко применяются тонкостенные стержни с замкнутыми (рис. 4.7, а) и открытыми профилями (рис. 4.7, б) поперечных сечений. Поэтому расчеты на кручение таких тонкостенных стержней имеет большое практическое значение.



Характерной геометрической особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно (на порядок и более) меньше других геометрических размеров (длиной срединной линии контура поперечного сечения и длины стержня).

Характер распределения напряжений по толщине тонкостенного стержня открытого профиля близок к равномерному (рис. 4.7, б), а замкнутого профиля меняется по линейному закону, как это показано на рис. 4.7, а. Откуда следует, что напряжения в поперечных сечениях открытого профиля практически не изменятся, если профиль сечения распрямить. Иначе говоря, напряжения в криволинейном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом.

В соответствии с формулами $\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}$ и $\varphi(z) = \frac{M_z \cdot z}{G \cdot I_k}$ и при предельном переходе $h/b \rightarrow \infty$, получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_k}{\delta^2 \cdot s}; \quad \varphi = \frac{3 \cdot M_k}{G \cdot \delta^2 \cdot s}, \quad (4.17)$$

где δ – толщина профиля; s – длина контура профиля; l – длина стержня.

В случае, если тонкостенный незамкнутый профиль является составным (рис. 4.8) и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, воспользовавшись почленной аналогией, легко определить выражения напряжений на i -ом произвольном участке:

$$\tau_{\max(i)} = \frac{3 \cdot M_{k(i)}}{\delta_i^2 \cdot s_i} \quad (4.18)$$

где $M_{K(i)}$ – доля крутящего момента, соответствующего i -му участку:

$$M_{k(i)} = \frac{\varphi \cdot G}{3 \cdot l} \cdot \delta_i^3 \cdot s_i,$$

где φ – угловое перемещение, единое для всех участков:

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_k \cdot l}{G \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^3 \cdot s_i}. \quad (4.19)$$

5. ИЗГИБ

5.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты M_x или M_y . Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, то изгиб называется *чистым* (рис. 5.1, а).

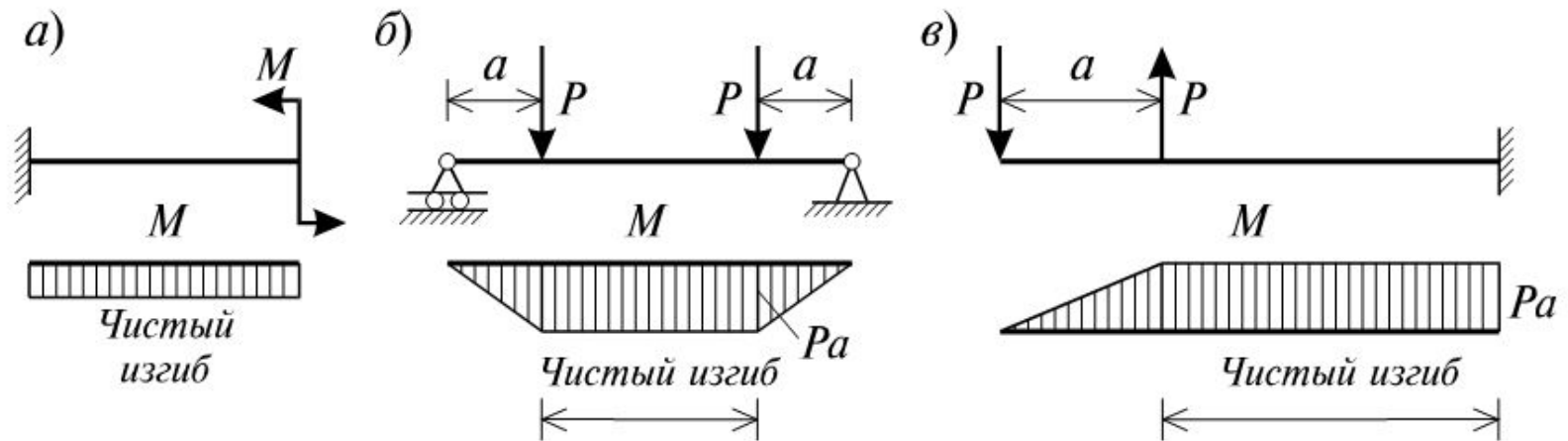


Рис. 5.1

В тех случаях, когда в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающим моментом возникают и поперечные силы изгиб называется *поперечным*. Брус, работающий в основном на изгиб, часто называют *балкой*. Для того, чтобы правильно ориентироваться в вопросах, связанных с расчетом бруса на изгиб, необходимо прежде всего научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, т.е. научиться строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Для определения внутренних силовых факторов – изгибающего момента $M(z)$ и поперечной силы $Q(z)$ как функций от продольной координаты z , воспользуемся *методом сечений*. Для получения этих зависимостей балку разбивают на участки, границами которых являются следующие точки: начало и конец балки; точки приложения сосредоточенных усилий; начало и конец действия распределенных усилий; сечения, в которых скачкообразно изменяется жесткость балки; в точках, где происходит изменение ориентации элементов, если имеем дело с стержневой системой со сложной структурой.

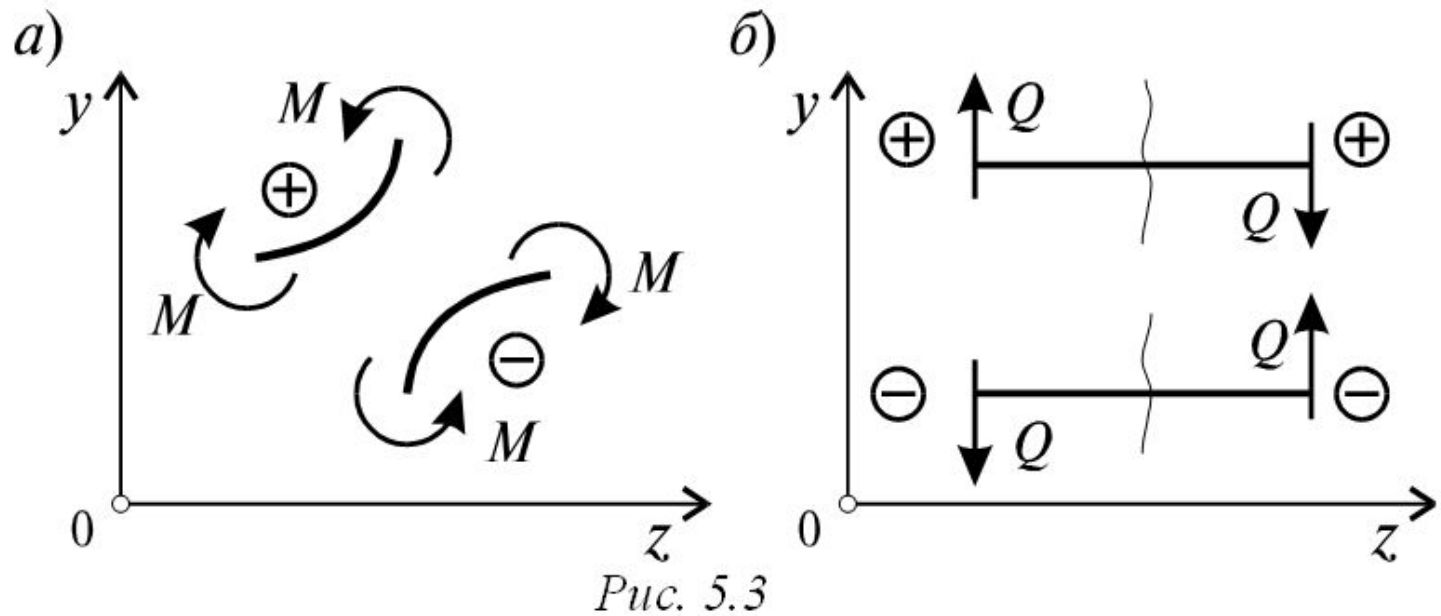


Рис. 5.3

Для поперечных сил, независимо от направления координатных осей, устанавливается следующее правило знаков: если результирующая поперечная сила Q_y вращает рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она считается положительной, в обратном случае – отрицательной (рис. 5.3, б).

Эпюры M_x и Q_y изображены на *рис. 5.4*. Заметим, что эпюры изгибающих моментов M_x , как и поперечных сил Q_y строятся на оси бруса, однако в отличие от эпюры поперечных сил знак момента не указывается, а ординаты изгибающего момента откладываются со стороны растянутых волокон.

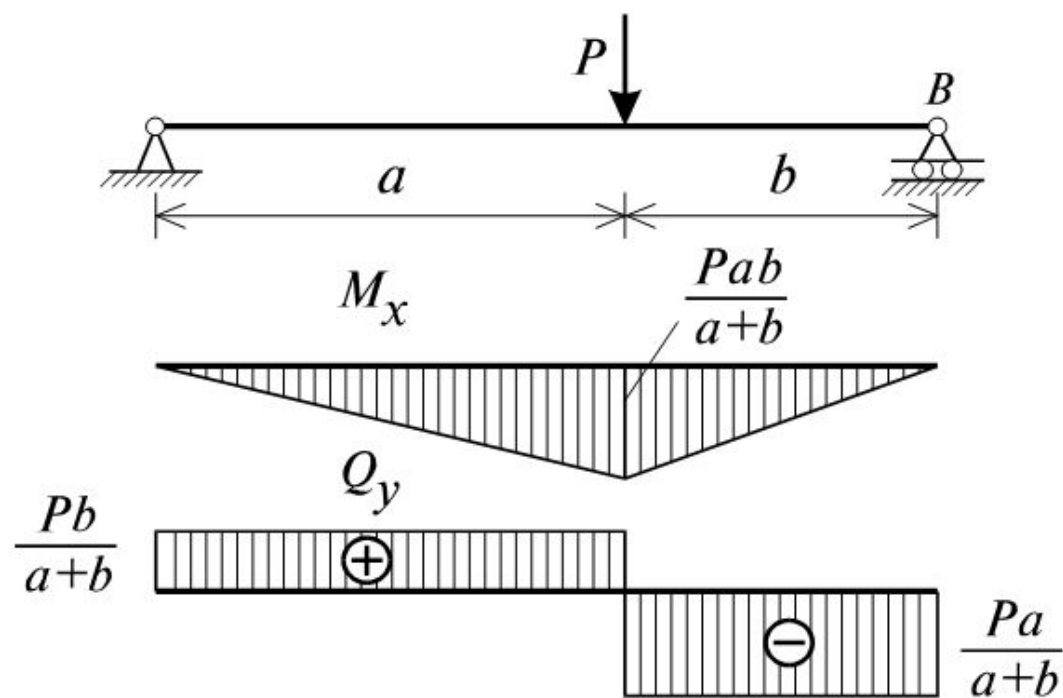


Рис. 5.4

5.2. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗГИБА

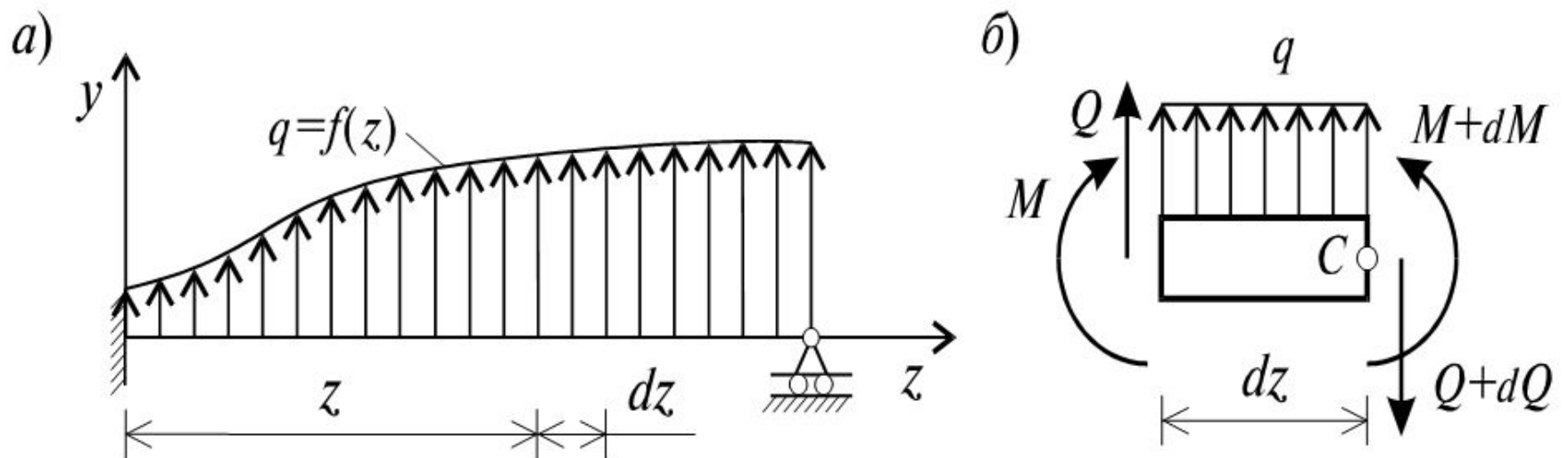


Рис. 5.5

Пусть брус нагружен произвольным образом распределенной нагрузкой $q = f(z)$ (рис. 5.5, а).

Выделим из бруса элемент длиной dz и приложим по его краям положительные внутренние усилия (рис. 5.5, б). В пределах малого отрезка dz нагрузку q можно считать распределенной равномерно. Приравняем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось y и сумму моментов всех сил относительно поперечной оси x , проходящей через точку C (рис. 5.5, б), получим:

$$\begin{aligned} Q_y + q dz - Q_y - dQ_y &= 0; \\ M_x + Q_y dz + q dz \cdot dz/2 - M_x - dM_x &= 0. \end{aligned}$$

Производя упрощения и отбрасывая величины высшего порядка малости, получим:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (5.4)$$

откуда

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (5.5)$$

5.3. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба, называемый *чистым изгибом*. Как было отмечено выше, под чистым изгибом понимается такой вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. Для тех участков бруса, где соблюдается данное условие, изгибающий момент, согласно второго выражения (5.4), вдоль продольной оси z принимает постоянное значение. Так как в любом сечении стержня при чистом изгибе $M_x(z) = \text{const}$, то для однородного бруса постоянного поперечного сечения изменение кривизны постоянно вдоль оси z . Под действием изгибающих моментов ось бруса искривляется. Исходя из этого, ось бруса принимает форму дуги окружности с радиусом кривизны ρ (рис. 5.6). В данном случае с высокой степенью точности справедлива гипотеза плоских сечений. Следовательно, точки, расположенные до изгиба в плоскости поперечного сечения бруса, в результате изгиба переместятся в пространстве таким образом, что их совокупность снова образует плоскость.

Процесс формирования деформаций при чистом изгибе может рассматриваться как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга.

Рассмотрим два смежных сечения, отстоящих один от другого на расстоянии dz (рис. 5.6).

Растяжение

*Нейтральная
линия*

Сжатие

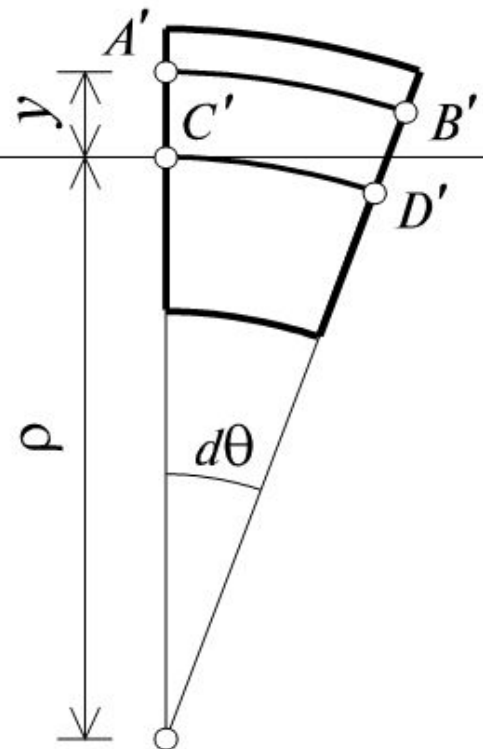
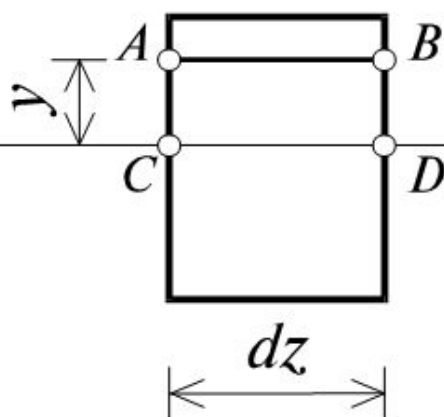
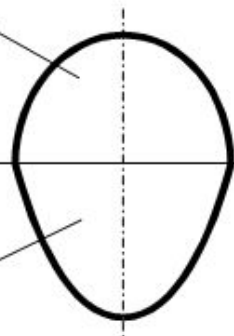


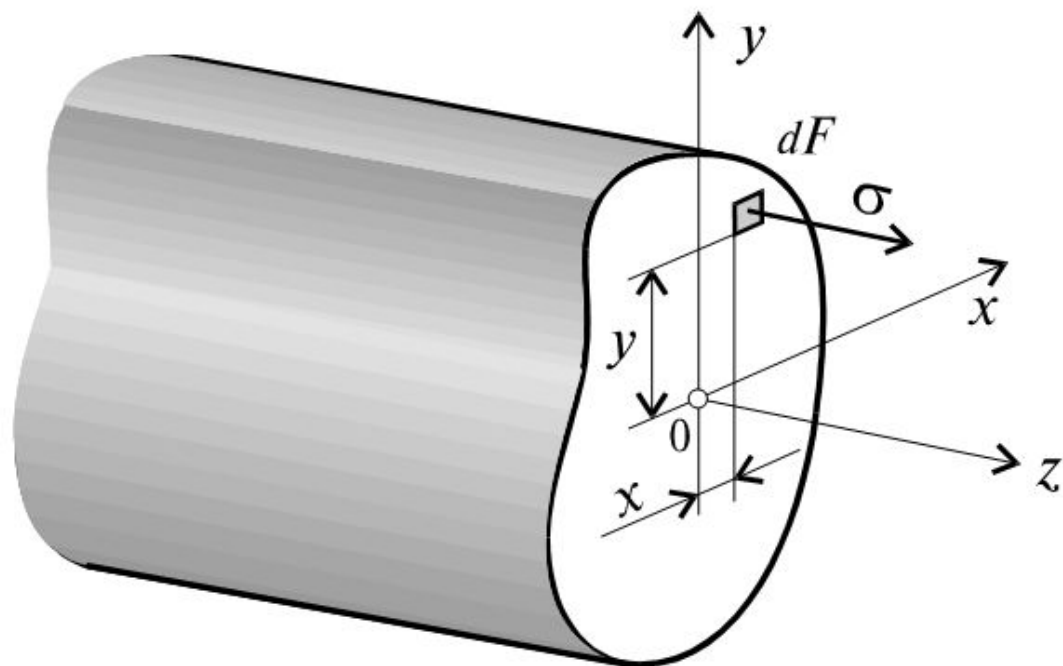
Рис. 5.6

В результате изгиба эти сечения наклонятся, образуя между собой угол $d\theta$, в связи с чем верхние волокна удлиняются, а нижние – укоротятся. Очевидно, что при этом существует слой, длина которого не изменилась. Назовем его *нейтральным слоем* и обозначим отрезком CD . При этом $CD = C'D' = dz = \rho d\theta$. Произвольный отрезок AB , расположенный от CD на расстоянии y , в результате изгиба удлинится на величину $A'B' - AB$. С учетом построений, изображенных на *рис. 5.6*, легко определить величину его линейной деформации:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dz}{dz} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - dz}{dz} = y \cdot \frac{d\theta}{dz} = \frac{y}{\rho} \quad (5.6)$$

Если предположить, что продольные волокна не давят друг на друга, то каждое из них будет находиться в условиях простого растяжения – сжатия. Тогда переход от деформаций к нормальным напряжениям σ можно осуществить посредством закона Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (5.7)$$



Установив положение нейтральной оси x , от которой происходит отсчет координаты y (рис. 5.7) и учитывая, что сумма элементарных сил σdF по площади поперечного сечения F дает нормальную силу N_z . Но при чистом изгибе $N_z = 0$, следовательно:

$$N_z = \int_F y \cdot dF = 0 \rightarrow \int_F y \cdot dF = 0$$

Как известно, последний интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии (оси x). Статический момент равен нулю, значит, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

Выразим момент внутренних сил относительно нейтральной оси M_x через σ .

$$M_x = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF \quad (5.8)$$

С учетом выражения (5.7) получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 \cdot dF = \frac{E}{\rho} \cdot I_x.$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \quad (5.9)$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна нейтрального волокна; $E \cdot I_x$ – жесткость бруса.

Из формулы (5.7), исключая $1/\rho$, окончательно получим:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad (5.10)$$

Откуда следует, что нормальные напряжения σ в поперечном сечении бруса при его изгибе изменяются по линейному закону в зависимости от координаты y и принимают максимальное значение на уровне крайних волокон (при $y = y_{max}$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x},$$

где $W_x = \frac{I_x}{y}$ – момент сопротивления сечения.

5.5. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

В случае поперечного изгиба в сечениях балки возникают не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Следовательно, в этом случае в поперечных сечениях бруса возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Так как касательные напряжения в общем случае распределены по сечению неравномерно, то при поперечном изгибе поперечные сечения балки

строго говоря не остаются плоскими. Однако при $\frac{h}{l} \ll 1$ (где h – высота

поперечного сечения, l – длина балки) оказывается, что эти искажения заметным образом не сказываются на работе балки на изгиб. В данном случае гипотеза плоских сечений и в случае чистого изгиба с достаточной точностью приемлема. Поэтому для расчета нормальных напряжений σ применяют ту же формулу (5.10).

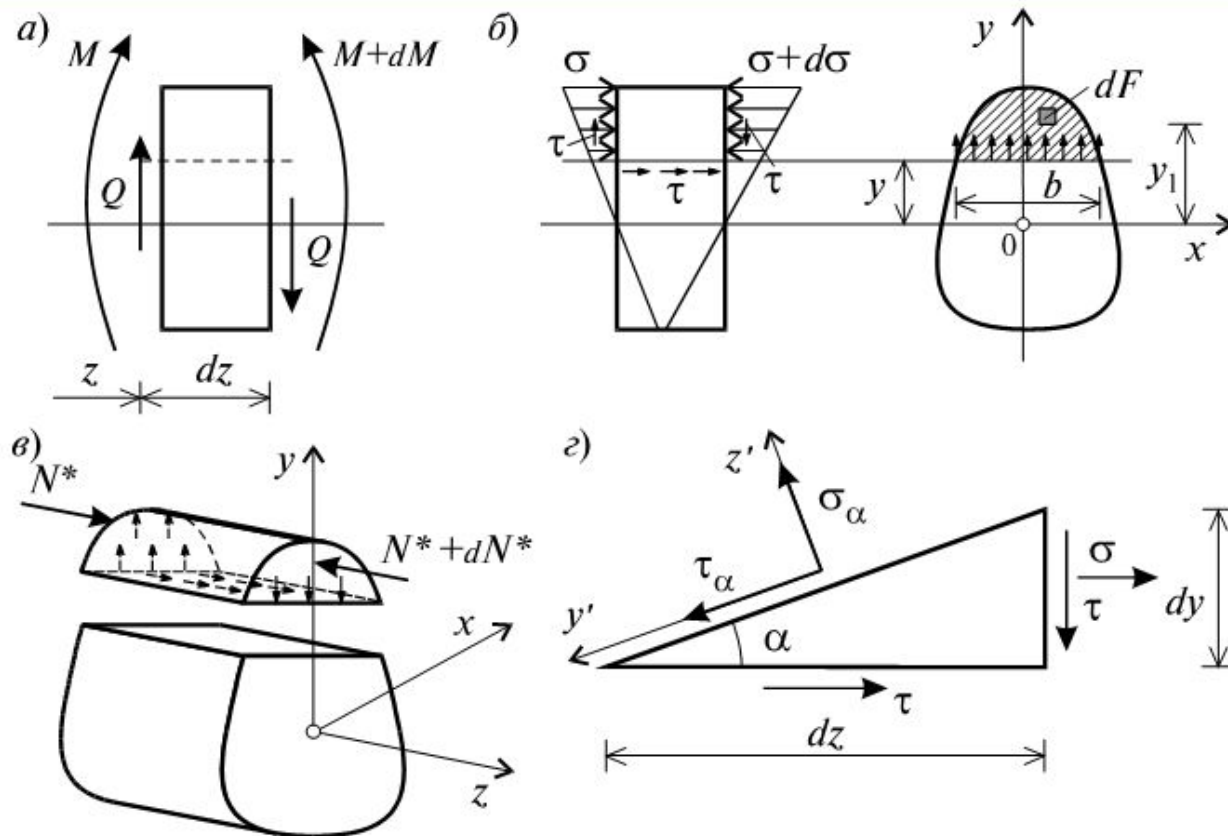


рис. 5.21.

Рассмотрим вывод расчетных формул для касательных напряжений. Выделим из бруса, испытывающего поперечный изгиб, элемент длиной dz

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси, разделим элемент на две части (рис. 5.21, в) и рассмотрим равновесие верхней части, имеющей основание шириной b . При этом с учетом закона парности касательных напряжений, получим, что касательные напряжения в поперечном сечении равны касательным напряжениям, возникающим в продольных сечениях (рис. 5.21, б). С учетом данного обстоятельства и из допущения о том, что касательные напряжения по площади $b \cdot dz$ распределены равномерно, используя условие $\sum z = 0$, получим:

$$N^* - N^* - dN^* + \tau \cdot b \cdot dz = 0$$

откуда

$$\tau = \frac{dN^*}{b \cdot dz} \quad (5.12)$$

где N^* – равнодействующая нормальных сил $\sigma \cdot dF$ в левом поперечном сечении элемента dz в пределах заштрихованной площади F^* (рис. 5.21, з):

$$N^* = \int_{F^*} \sigma \cdot dF \quad (5.13)$$

С учетом (5.10) последнее выражение можно представить в виде

$$N^* = \frac{M_x}{I_x} \cdot \int y_1 \cdot dF \quad (5.14)$$

где $S_x^* = \int_{F^*} y_1 \cdot dF$ – статический момент части поперечного сечения, расположенной выше координаты y (на рис. 5.21, б эта область заштрихована). Следовательно, (5.14) можно переписать в виде

$$N^* = \frac{M_x \cdot S_x^*}{I_x}$$

откуда

$$dN^* = \frac{dM_x \cdot S_x^*}{I_x} \quad (5.15)$$

В результате совместного рассмотрения (5.12) и (5.15) окончательно получим

$$\tau = \frac{S_x^* \cdot Q_y}{b \cdot I_x} \quad (5.16)$$

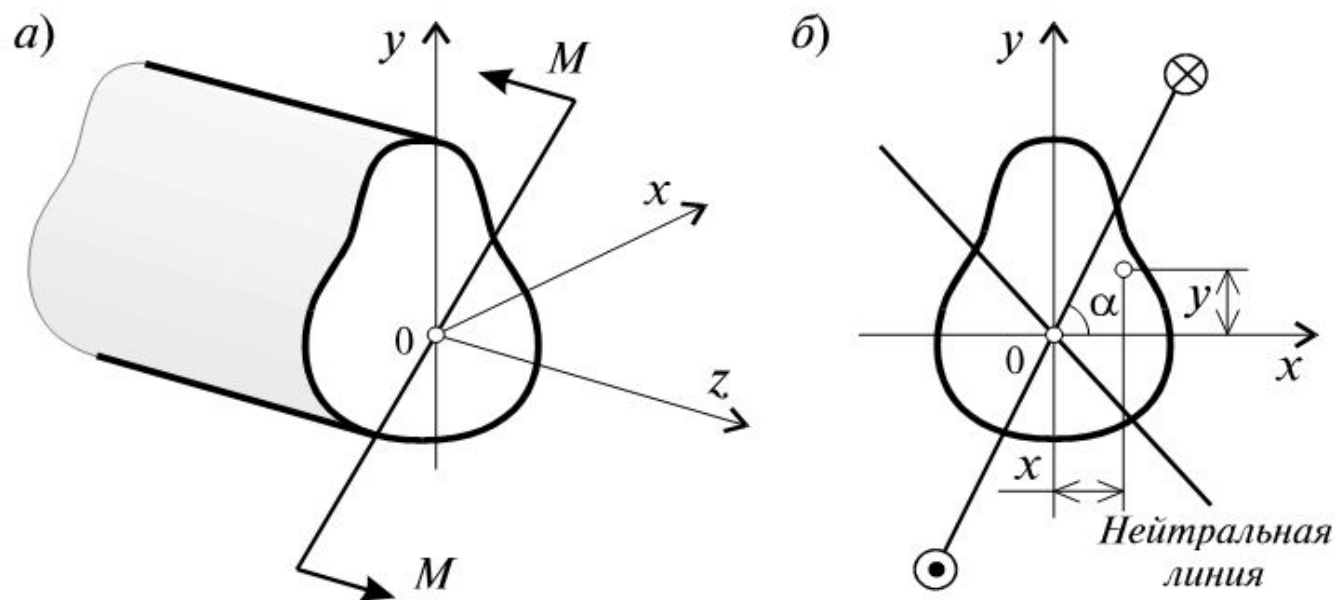
Полученная формула (5.16) носит имя русского ученого Д.И. Журавского.

Для исследования напряженного состояния в произвольной точке балки, испытывающей поперечный изгиб, выделим из состава балки вокруг исследуемой точки элементарную призму (рис. 5.21, *з*), таким образом, чтобы вертикальная площадка являлась частью поперечного сечения балки, а наклонная площадка составляла произвольный угол α относительно горизонта. Принимаем, что выделенный элемент имеет следующие размеры по координатным осям: по продольно оси – dz , т.е. по оси z ; по вертикальной оси – dy , т.е. по оси y ; по оси x – равный ширине балки.

Так как вертикальная площадка выделенного элемента принадлежит поперечному сечению балки, испытывающему поперечный изгиб, то нормальные напряжения σ на этой площадке определяются по формуле (5.10), а касательные напряжения τ – по формуле Д.И. Журавского (5.16). С учетом закона парности касательных напряжений, легко установить, что касательные напряжения на горизонтальной площадке также равны τ . Нормальные же напряжения на этой площадке равны нулю, согласно уже известной нам гипотезе теории изгиба о том, что продольные слои не оказывают давления друг на друга.

§.9. КОСОЙ ИЗГИБ

Под *косым изгибом* понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения (рис. 5.27, а).



Косой изгиб удобнее всего рассмотреть как одновременный изгиб бруса относительно главных осей x и y поперечного сечения бруса.

Для этого общий вектор изгибающего момента M , действующего в поперечном сечении бруса, раскладывается на составляющие моменты относительно этих осей (рис. 5.27, б):

$$M_x = M \cdot \sin \alpha; \quad M_y = M \cdot \cos \alpha \quad (5.25)$$

Введем следующее правило знаков для моментов M_x и M_y – момент считается положительным, если в первой четверти координатной плоскости (там, где координаты x и y обе положительны) он вызывает сжимающие напряжения.

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в произвольной точке, принадлежащей к поперечному сечению бруса и имеющей координаты x, y , определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y , т.е.

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad (5.26)$$

Подставляя выражения M_x и M_y из (5.25) в (5.26), получим:

$$\sigma(x, y) = M \cdot \left(\frac{y}{I_x} \cdot \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cdot \cos \alpha \right)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что последнее выражение представляет собой уравнение плоскости. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор напряжения σ , то концы векторов образуют геометрическое место точек, принадлежащих одной плоскости, как и при поперечном изгибе.

Уравнение *нейтральной линии*, т.е. геометрического места точек, где нормальное напряжение принимает нулевые значения, найдем, полагая в (5.26) $\sigma=0$:

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0, \quad \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} = 0$$

Откуда определяется:

$$y = -\frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} \cdot x = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x \quad (5.27)$$

Поскольку свободный член в (5.27) равен нулю нейтральная линия всегда проходит через начало координат. Как видно из выражения (5.26), эпюра напряжений в поперечных сечениях бруса линейна, следовательно, максимальные напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии.

§5.13. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Как показывают экспериментальные исследования, прочность материалов существенно зависит от вида напряженного состояния. В общем случае нагруженного тела напряженное состояние в какой-либо точке вполне может быть определено величиной напряжений в трех координатных плоскостях, проходящих через эту точку. При произвольном выборе положения координатных плоскостей, в каждой из них, вообще говоря, имеются и нормальные, и касательные напряжения. Для них вводятся соответствующие обозначения в плоскости xy : σ_{zz} , τ_{zx} , τ_{zy} ; в плоскости xz : σ_{yy} , τ_{yx} , τ_{yz} ; в плоскости yz : σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} . Здесь первый индекс показывает ориентацию площадки, в которой действует напряжение, т.е. какой из координатных осей она перпендикулярна. Вторым индексом указывается направление напряжения по координатной оси.

В каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные плоскости, свободные от касательных напряжений, носящие название *главных площадок*. Нормальные напряжения в этих площадках называются главными напряжениями и обозначаются σ_1 , σ_2 , σ_3 .

При этом всегда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Заметим, что более подробно вопросы теории напряженного состояния в точке обсуждены в десятом разделе настоящей книги, и по данному вопросу имеется обширная литература.

Напряженные состояния разделяются на три группы. Напряженное состояние называется: а) *объемным* или *трехосным*, если все главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не равны нулю; б) *плоским* или *двухосным*, если одно из трех главных напряжений равно нулю; в) *одномерным* или *одноосным*, если два из трех главных напряжений равны нулю.

Основной задачей теории прочности является установление критерия прочности, позволяющего сравнить между собой опасность различных напряженных состояний материала.

Выбранный критерий прочности должен быть обоснован на основе экспериментальных данных путем проведения испытаний различных материалов в зависимости от вида напряженного состояния, как функция от соотношений между значениями главных напряжений.

Заметим, что, так как в настоящее время строгой единой теории прочности материалов, в зависимости от вида напряженного состояния, не существует, поэтому при выполнении практических расчетов применяются упрощенные критерии.

Наиболее распространенным и наглядным критерием проверки конструкций на прочность, при простейших случаях напряженного состояния (сжатие–растяжение, кручение, чистый изгиб), является выполнение условия:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (5.38)$$

где σ_{\max} – максимальное расчетное значение напряжения, возникающее в наиболее опасной точке конструкции; $[\sigma]$ – допускаемое значение напряжения для материала конструкции.

В настоящее время при выполнении расчетов конструкций на прочность, при произвольных напряженных состояниях, широко используются три теории прочности.

Согласно *первой теории* критерием прочности является ограничение главного максимального напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma] \quad (5.39)$$

где $[\sigma]$ – предельное напряжение, полученное из опытов на одноосное растяжение.

Основным недостатком этой теории является не учет двух других главных напряжений.

В основу второй теории прочности заложена гипотеза о том, что критерием оценки работы конструкции является ограничение наибольшего удлинения. В формулировке данного положения через главные напряжения (σ_1 и σ_2) это условие для плоского напряженного состояния записывается следующим образом:

$$\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2 \leq [\sigma]$$

где $[\sigma]$ – напряжение, при котором было вызвано предельное удлинение образца в опытах на одноосное растяжение; μ – коэффициент бокового расширения.

При объемном напряженном состоянии вторая теория прочности записывается в виде:

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (5.40)$$

Экспериментальная проверка не всегда подтверждает правильность теории прочности наибольших линейных деформаций при простых нагружениях, т.е. при чистом растяжении или чистом сдвиге. Однако до настоящего времени эта теория имела широкое применение при выполнении инженерных расчетов.

В основу *третьей теории прочности* заложена гипотеза о том, что причиной разрушения материалов являются сдвиговые деформации, происходящие на площадках максимальных касательных напряжений, т. е.

$$\tau_{\max} < [\tau] \quad (5.41)$$

где τ_{\max} – расчетное максимальное касательное напряжение, возникающее в опасной точке нагруженного тела; $[\tau]$ – предельное значение касательного напряжения, полученное из опытов.

Для плоского напряженного состояния по третьей теории условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_2 < [\sigma] \quad (5.42)$$

В случае поперечного изгиба балки ($\sigma_2 = 0$), если выразить главные напряжения σ_1 и σ_3 через σ и τ , то условие прочности (5.42) преобразуется в виде:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq R \quad (5.43)$$

где R – расчетное сопротивление материала балки при изгибе.