

Диполь. Поле системы
зарядов.
Теорема Ирншоу.

Электрический диполь

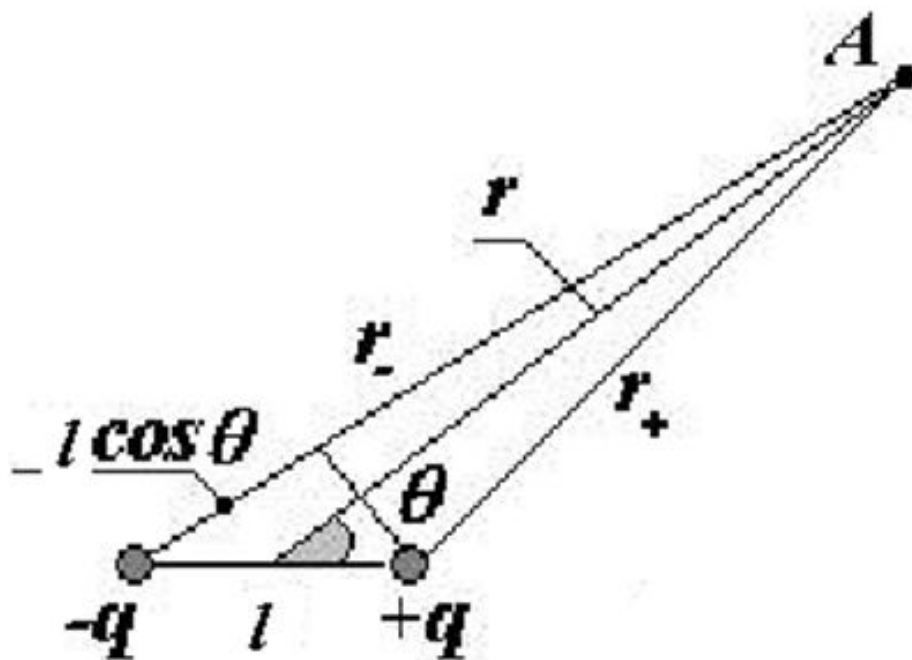
Электрический диполь = 2 равных по модулю разноимённых точечных заряда, находящихся на расстоянии l друг от друга.

Вектор l направлен от «-» заряда к «+».

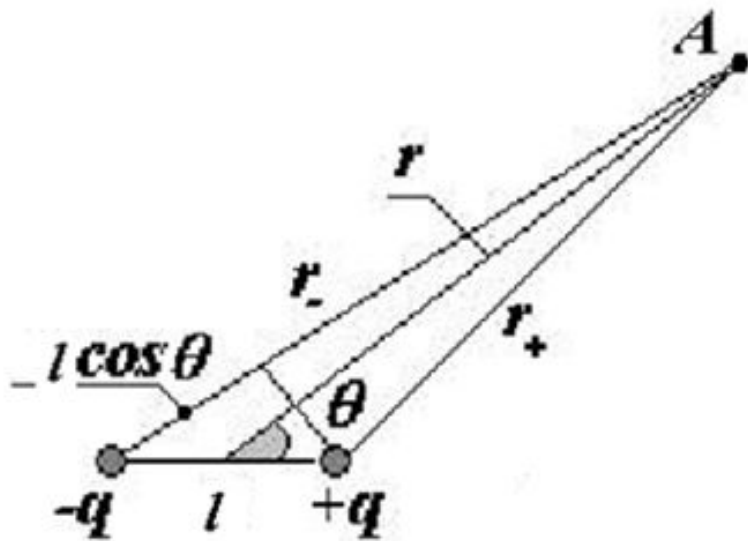
Вектор дипольного момента (ДМ): $\mathbf{p} = q l$.

Ед. изм. ДМ [p] = Кл·м (для ДМ атомного масштаба применяется дебай (1 Д = $3.36 \cdot 10^{-30}$ Кл м)).

Расстояния от центра диполя, от (+) и (-) зарядов до точки наблюдения А и соответствующие радиус-векторы обозначим r , r_+ , r_- и r_- .



Потенциал ЭП точечного диполя



По принципу суперпозиции:

$$\mathbf{E} = kq \left(\left(\frac{1}{r_+^3} \right) \mathbf{r}_+ - \left(\frac{1}{r_-^3} \right) \mathbf{r}_- \right)$$

$$\varphi = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$r_+ = \left(r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 - 2r \left(\frac{l}{2} \right) \cos\theta \right)^{1/2}$$

$$r_- = \left(r^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2r \left(\frac{l}{2} \right) \cos\theta \right)^{1/2}$$

При $r \gg l$ (приближение точечного диполя, на больших расстояниях диполь кажется точкой):

$$r_+ \approx r \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right) \cos\theta \right) \Rightarrow \frac{1}{r_+} \approx \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right) \cos\theta \right)$$

$$r_- \approx r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right) \cos\theta \right) \Rightarrow \frac{1}{r_-} \approx \left(\frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r} \right) \cos\theta \right)$$

После подстановки в φ :

$$\varphi = \left(\frac{kq}{r} \right) \left(\frac{l}{r} \right) \cos\theta = \left(\frac{kp}{r^2} \right) \cos\theta = \left(\frac{k}{r^3} \right) (\mathbf{p}, \mathbf{r})$$

Напряженность ЭП точечного диполя

Для вычисления \vec{E} :

$$\vec{E} = -grad \varphi$$

После подстановки:

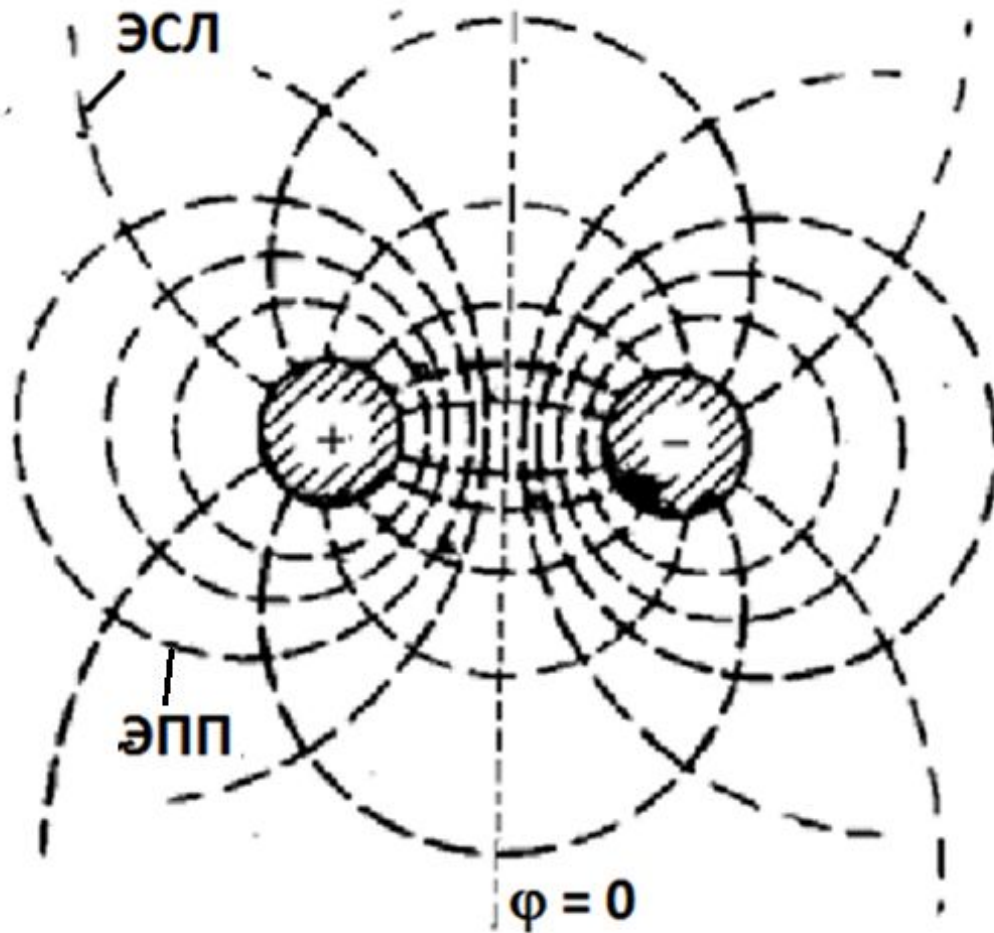
$$\vec{E} = \frac{k}{r^3} \cdot \left(3p \cos\theta \cdot \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p} \right) = \frac{kp}{r^3} \cdot \left(3 \cos\theta \cdot \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{p} \right)$$

Полученные выражения справедливы в *приближении точечного диполя*.

Особенности:

$E \sim 1/r^3$ и $= f(\theta)$ (ср.: $E \sim 1/r^2$ и $\neq f(\theta)$ для точ. заряда);
 $\varphi \sim 1/r^2$ и $= f(\theta)$ (ср.: $\varphi \sim 1/r$ и $\neq f(\theta)$ для точ. заряда).

Графическое представление ЭП диполя

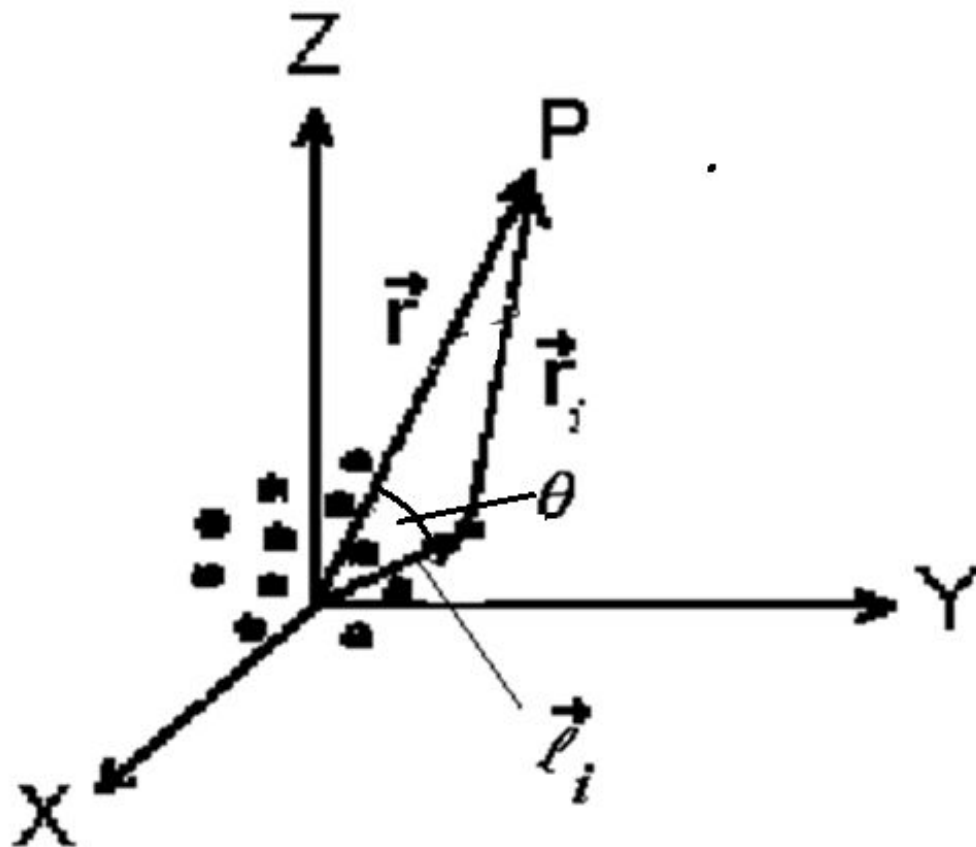


ЭСЛ начинаются и заканчиваются на компонентах диполя.

ЭП охватывают (на картинке – их следы) заряды.

Плоскость, \perp оси диполя и проходящая через ее середину, соответствует $\varphi = 0$.

ЭП системы зарядов



$1/r_i$ по степеням l_i/r .

В некой области ээ N зарядов, потенциал ЭП в т. наблюдения P вычисляется как сумма потенциалов от отдельных зарядов.

$$\varphi = \sum k (q_i / r_i)$$

Если т. P удалена от \forall заряда q_i ($r \gg l_i$, где начало координат находится в некоторой внутр. точке области, содержащей заряды), то можно разложить

Разложение по мультиполям

$$r_i \approx r \left(1 - \frac{l_i}{r} \cos \theta_i \right)$$

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l_i}{r} \cos \theta_i + \left(\frac{l_i}{r} \right)^2 \cos^2 \theta_i + \dots \right)$$

После суммирования по i :

$$\begin{aligned} \varphi &= k \frac{\sum q_i}{r} + \frac{k}{r^2} \sum q_i l_i \cos \theta_i + \frac{k}{r^3} \sum q_i l_i^2 \cos^2 \theta_i + \dots = \\ &= \frac{k}{r} Q + \frac{k}{r^2} P + \frac{k}{r^3} R + \frac{k}{r^4} S + \dots + \end{aligned}$$

Это выражение наз. разложением ЭП системы зарядов по мультиполям.

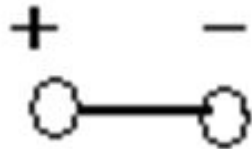
Первое слагаемое - монополюсный член, а $Q = \sum q_i$.

Второе слагаемое - дипольный член, P - дипольный момент системы зарядов, он зависит от величины и положения всех зарядов.

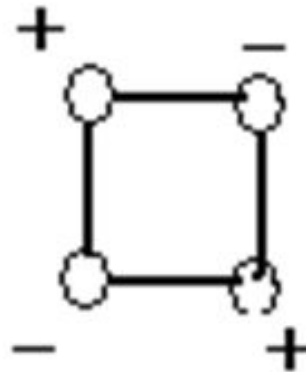
Следующие члены - квадрупольный, октупольный и т.д.

Мультиполи

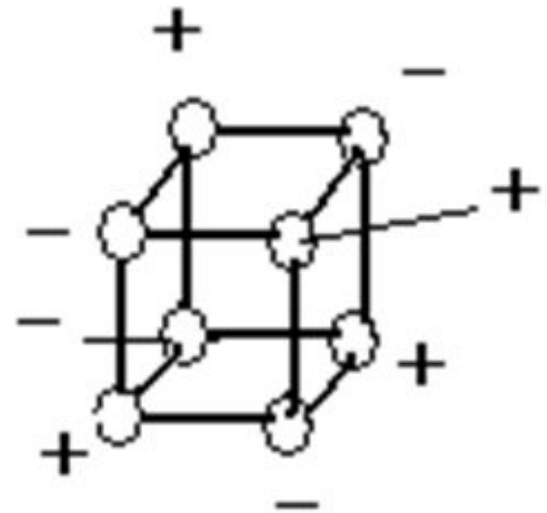
Каждое следующее слагаемое имеет степень $1/r$ на единицу больше и поэтому быстрее убывает с ростом r . На больших расстояниях в разложении можно оставить только monopольный член. Если $Q = 0$, то остается дипольный член и т.д.



Диполь



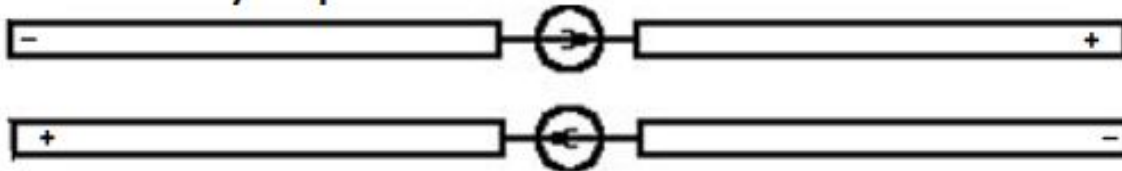
Квадруполь



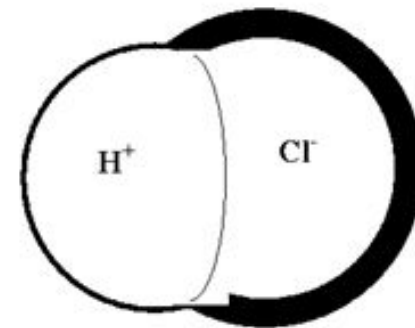
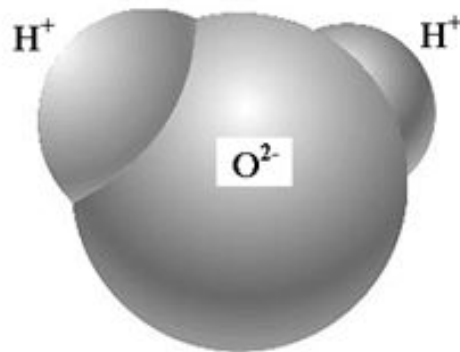
Октуполь

Диполь как источник ЭП

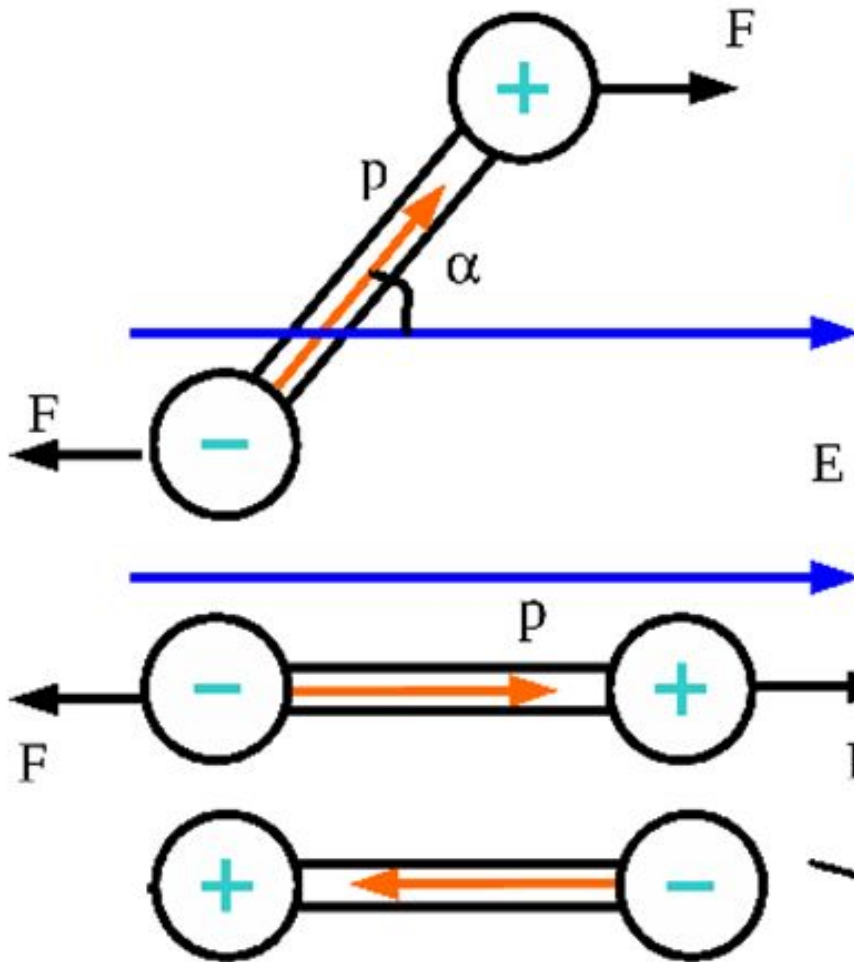
В техн. устройствах –



В природе - многие (нейтральные) молекулы являются диполями – положительно и отрицательно заряженные части их смещены друг относительно друга.



Диполь в однородном ЭП



Вращающий момент

$$M = q E l \sin \alpha = p E \sin \alpha$$

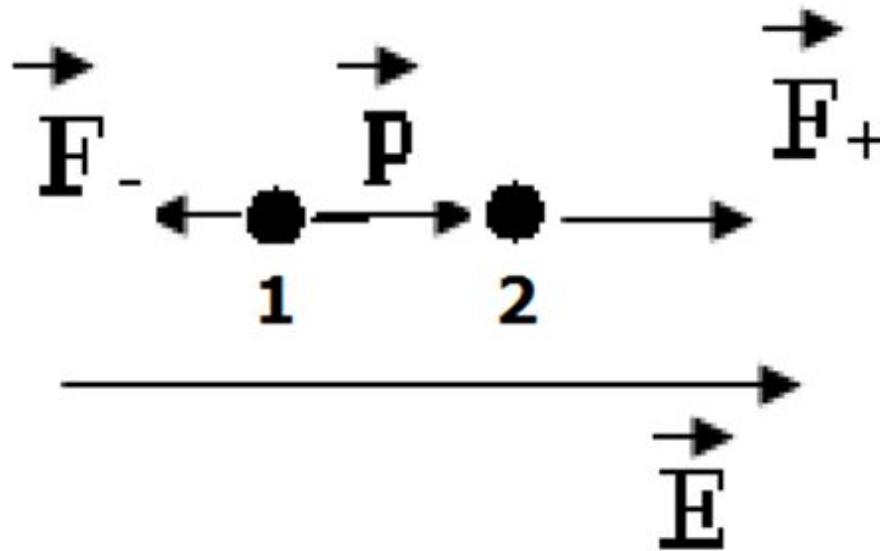
max при $E \perp p$

$$\Sigma F = 0$$

**устойчивое
равновесие $U = \min$**

**неустойчивое
равновесие $U = \max$**

Диполь в неоднородном ЭП



$$E_1 < E_2 \implies F_1 < F_2$$

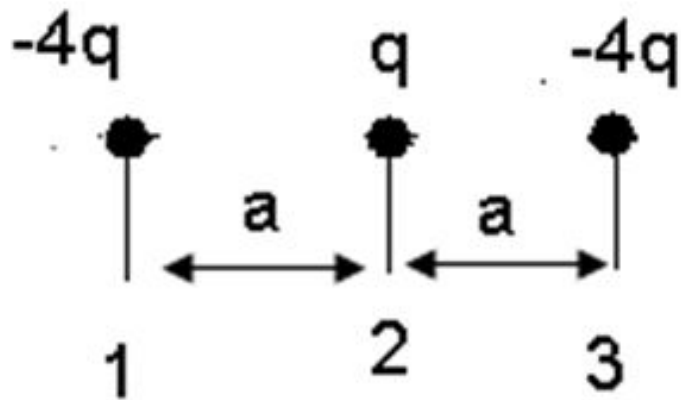
$$\Sigma F \neq 0$$

Втягивает в область сильного поля

Равновесие под действием только электростатических сил

Для 2 зарядов невозможно – на каждый действует ненулевая сила Кулона.

Для 3 зарядов \exists равновесная конфигурация:



$$F_2 = 0$$

На q_1 действуют 2 силы, в противополож. направлениях:

$$F_{12} = k(4q^2/a^2)$$

$$F_{13} = k(16q^2/4a^2) = k(4q^2/a^2) = F_{12}$$

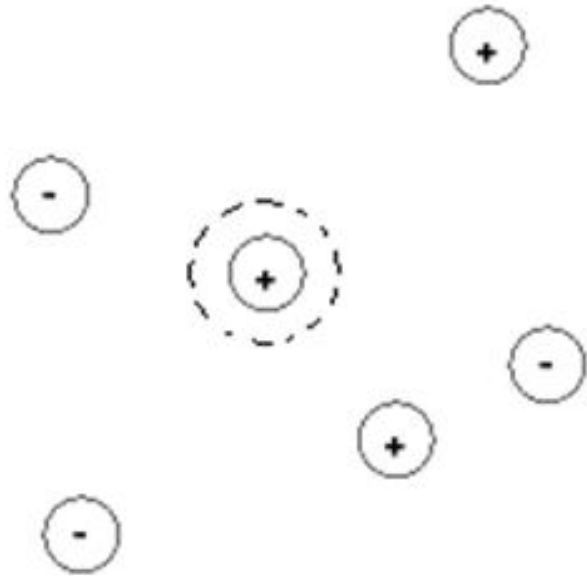
$$F = F_{13} - F_{12} = 0$$

То же для q_3 .

Значит, равновесные конфигурации возможны.

Будет ли равновесие устойчивым?

Теорема Ирншоу



Предположим, что \exists система зарядов в состоянии устойчивого равновесия \Rightarrow среди этих зарядов д.б. и «+», и «-» \Rightarrow выберем один из «+» и окружим его сферой малого радиуса. Этот заряд тоже д.б. в устойчивом равновесии \Rightarrow если его сместить из его положения в \forall точку на

сфере, то на него должна действовать возвращающая сила, направленная к центру сферы.

Теорема Ирншоу (2)

Действуют только электростатические силы $\Rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{E}$ и вектор \mathbf{E} тоже направлен к центру сферы $\Rightarrow (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) < 0$
 $\Rightarrow \oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) < 0$

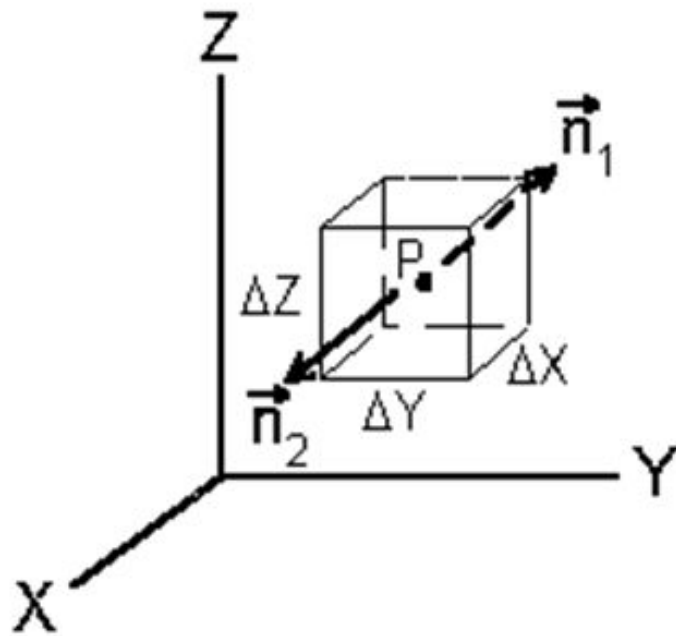
С др стороны, теорема Гаусса требует $\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) > 0$, т.к. внутри сферы «+» заряд.

Вывод: **предположение** об устойчивом равновесии **неверно.**

Всякая равновесная конфигурация заряженных тел неустойчива, если на них действуют только кулоновские силы.

Важно для рассмотрения устойчивости атомов.

Дивергенция



Интегральная форма ТГ:

$$\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = q / \epsilon_0$$

Выберем в кач-ве замкнутой пов-ти пов-сть маленького куба с ребрами $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

Тогда в ПЧ : $q = \langle \rho \rangle \Delta V$

Делим на ΔV :

$$\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) / \Delta V = \langle \rho \rangle / \epsilon_0$$

$\Delta V \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint (\vec{E}, d\vec{S})}{\Delta V} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div} \vec{E}$$

Если выполнить указанные операции, то окажется:

$$\text{div} \mathbf{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Символ div (*дивергенция*) обозначает дифференциальную мат. операцию, кот. превращает \forall вектор (в т.ч. \mathbf{E}) в скаляр, кот. тоже наз. дивергенцией, по указанному рецепту.

Т.к. предел ПЧ = ρ / ϵ_0 :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

Это соотношение наз. *дифференциальной формой ТГ*. Ее преимущество: чтобы вычислить ПЧ интегральной формы ТГ, нужно знать ρ во всем объеме; для дифф. формы нужно знать ρ в одной точке.

Формы записи дифф. формы ТГ

$$\partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z = \rho / \epsilon_0$$

С помощью символического вектора *набла*:

$$\nabla = \mathbf{i} (\partial / \partial x) + \mathbf{j} (\partial / \partial y) + \mathbf{k} (\partial / \partial z)$$

Тогда $\text{div} \mathbf{E} = (\nabla, \mathbf{E})$ – скалярное произведение по формальному правилу представления:

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z$$

Тогда:

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \rho / \epsilon_0$$

Т.к. $E_x = - \partial \varphi / \partial x$, $E_y = - \partial \varphi / \partial y$, $E_z = - \partial \varphi / \partial z$, то:

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + \partial^2 \varphi / \partial z^2 = - (\rho / \epsilon_0)$$

Эта форма записи ТГ наз. *уравнением Пуассона*.

Формы записи дифф. формы ТГ (2)

Уравнение Пуассона также можно записать с помощью оператора набла:

$$(\nabla, \mathbf{E}) = (\nabla, \nabla\varphi) = \nabla^2\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \varphi$$

$\nabla^2 = \Delta$ - квадрат оператора набла, оператор Лапласа.

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

$$\nabla^2\varphi = -(\rho / \epsilon_0) \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = -(\rho / \epsilon_0)$$

Для перехода к интегральной форме \exists математическая теорема Остроградского:

$$\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \iiint \text{div} \mathbf{E} dV$$