Диполь. Поле системы зарядов. Теорема Ирншоу.

Электрический диполь

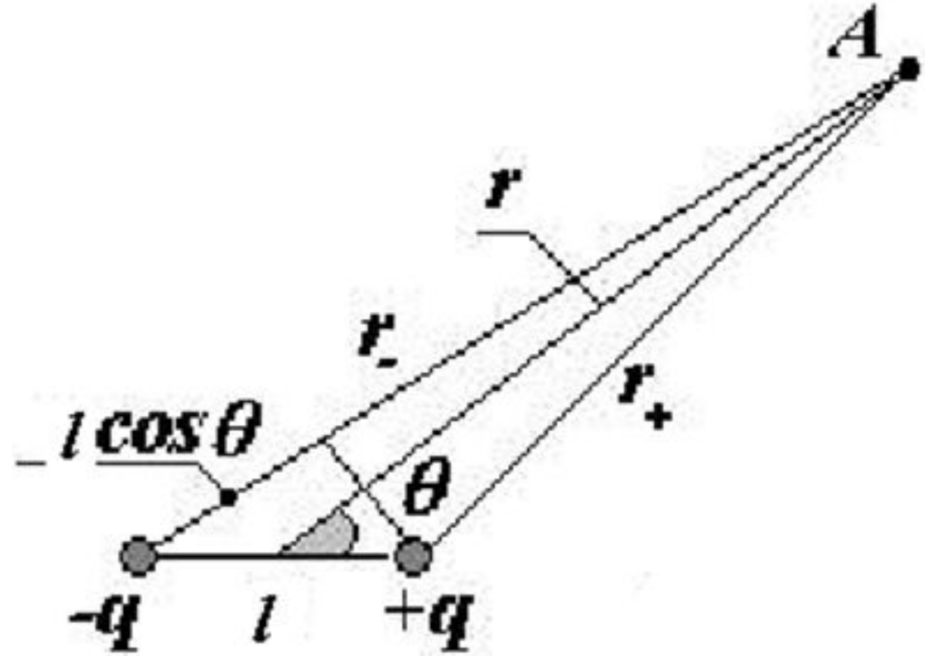
Электрический диполь = 2 равных по модулю разноимённых точечных заряда, находящихся на расстоянии l друг от друга.

Вектор $\boldsymbol{l}$ направлен от «-» заряда к «+».

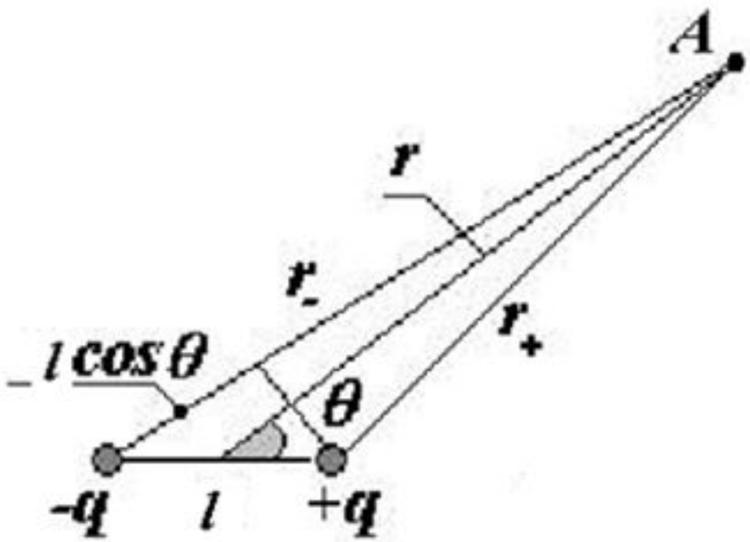
Вектор *дипольного момента*(ДМ): $\mathbf{p} = q\,\boldsymbol{l}$.

Ед. изм. ДМ [p] = Кл·м (для ДМ атомного масштаба применяется *дебай* (1 Д = $3.36 \cdot 10^{-30}$ Кл м).

Расстояния от центра диполя, от (+) и (-) зарядов до точки наблюдения А и соответствующие радиус-векторы обозначим r, **r**, r_+, $\mathbf{r}_+$, r_- и $\mathbf{r}_-$.



Потенциал ЭП точечного диполя



По принципу суперпозиции:

$\mathbf{E} = kq\,((1/r_+^{\,3})\,\mathbf{r}_+ - (1/r_-^{\,3})\,\mathbf{r}_-)$

$\varphi = k\,q((1/r_+) - (1/r_-))$

$r_+ = (r^2 + (l/2)^2 - 2r\,(l/2)\cos\theta)^{1/2}$

$r_- = (r^2 + (l/2)^2 + 2r\,(l/2)\cos\theta)^{1/2}$

При $r \gg l$ (*приближение точечного диполя*, на больших расстояниях диполь кажется точкой):

$r_+ \approx r\,(1 - ½(l/r)\cos\theta) \Rightarrow 1/r_+ \approx (1/r)\,(1 + ½(l/r)\cos\theta)$

$r_- \approx r\,(1 + ½(l/r)\cos\theta) \Rightarrow 1/r_- \approx (1/r)\,(1 - ½(l/r)\cos\theta)$

После подстановки в φ:

$$\varphi = (kq/r)\,(l/r)\cos\theta = (kp/r^2)\cos\theta = (k/r^3)\,(\mathbf{p},\mathbf{r})$$

Напряженность ЭП точечного диполя

Для вычисления $\vec{\mathrm{E}}$:

$$\vec{\mathrm{E}} = -grad\,\varphi$$

После подстановки:

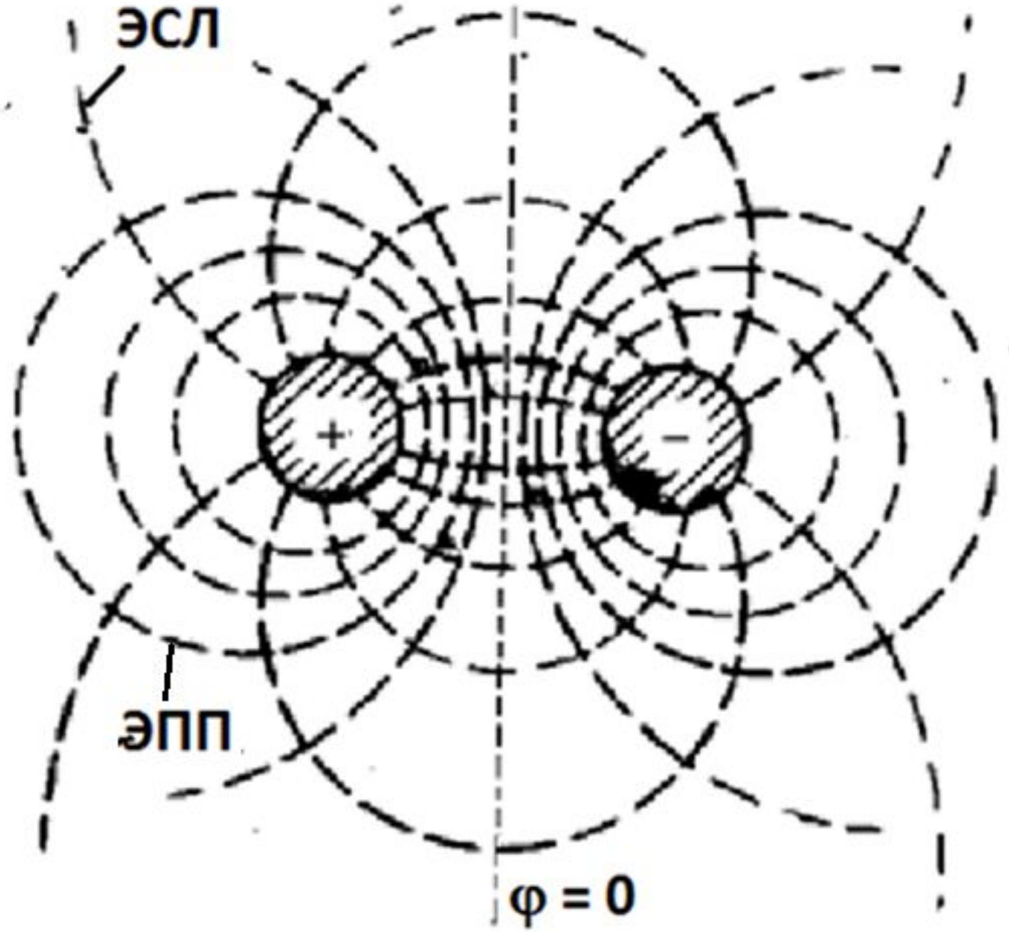
$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{k}{r^3}\cdot\left(3p\,cos\theta\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \vec{p}\right) = = \frac{kp}{r^3}\cdot\left(3\,cos\theta\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{p}\right)$$

Полученные выражения справедливы в *приближении точечного диполя*.

Особенности:

$E \sim 1/r^3$ и $= f(\theta)$ (ср.: $E \sim 1/r^2$ и $\neq f(\theta)$ для точ. заряда);
$\varphi \sim 1/r^2$ и $= f(\theta)$ (ср.: $\varphi \sim 1/r$ и $\neq f(\theta)$ для точ. заряда).

Графическое представление ЭП диполя

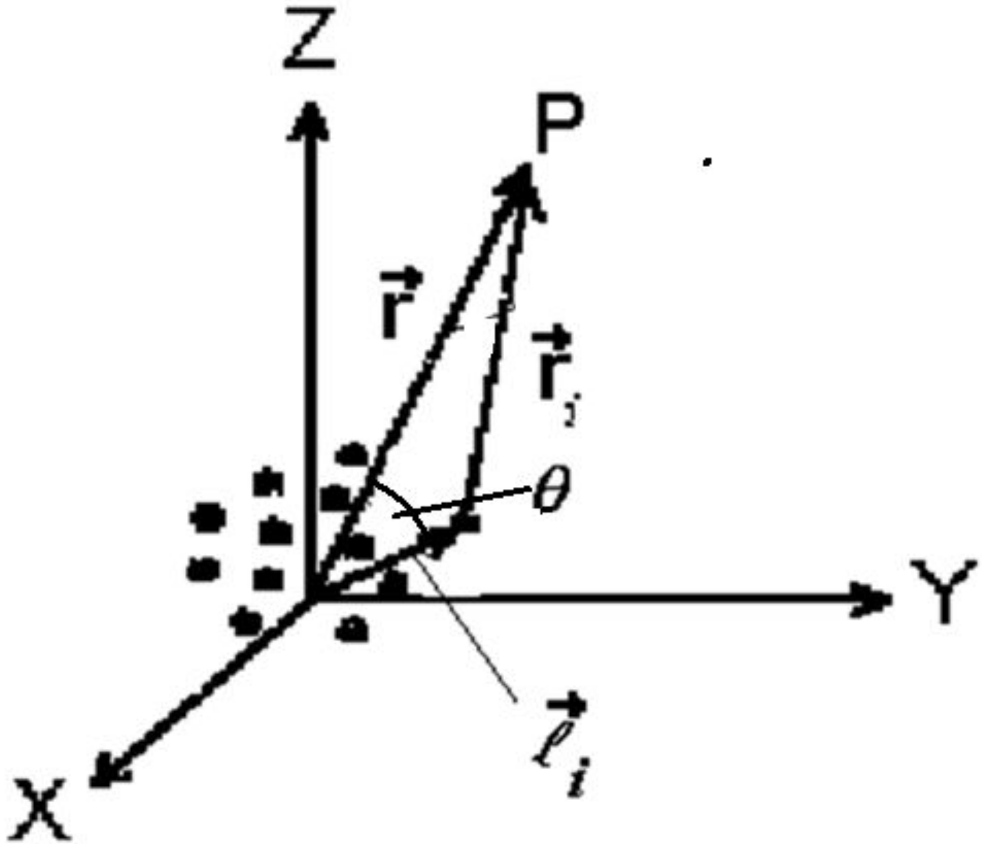


ЭСЛ начинаются и заканчиваются на компонентах диполя.

ЭПП охватывают (на картинке – их следы) заряды.

Плоскость, ⊥ оси диполя и проходящая через ее середину, соответствует φ = 0.

ЭП системы зарядов



В некой области ∃∃ N зарядов, потенциал ЭП в т. наблюдения P вычисляется как сумма потенциалов от отдельных зарядов.

$$\varphi = \sum k\,(q_i / r_i)$$

Если т. P удалена от ∀ заряда q_i ($r >> l_i$, где начало координат находится в некоторой внутр. точке области, содержащей заряды), то можно разложить $1/r_i$ по степеням l_i/r.

Разложение по мультиполям

$$r_i \approx r(1 - \frac{l_i}{r}\, cos\theta_i)$$

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{l_i}{r}\, cos\theta_i + \left(\frac{l_i}{r}\right)^2 cos^2\theta_i + \cdots)$$

После суммирования по i :

$$\varphi = k\frac{\sum q_i}{r} + \frac{k}{r^2}\sum q_i l_i\, cos\theta_i + \frac{k}{r^3}\sum q_i {l_i}^2 cos^2\theta_i + \cdots =$$

$$= \frac{k}{r}Q + \frac{k}{r^2}P + \frac{k}{r^3}R + \frac{k}{r^4}S + \cdots +$$

Это выражение наз. разложением ЭП системы зарядов по *мультипóлям*.

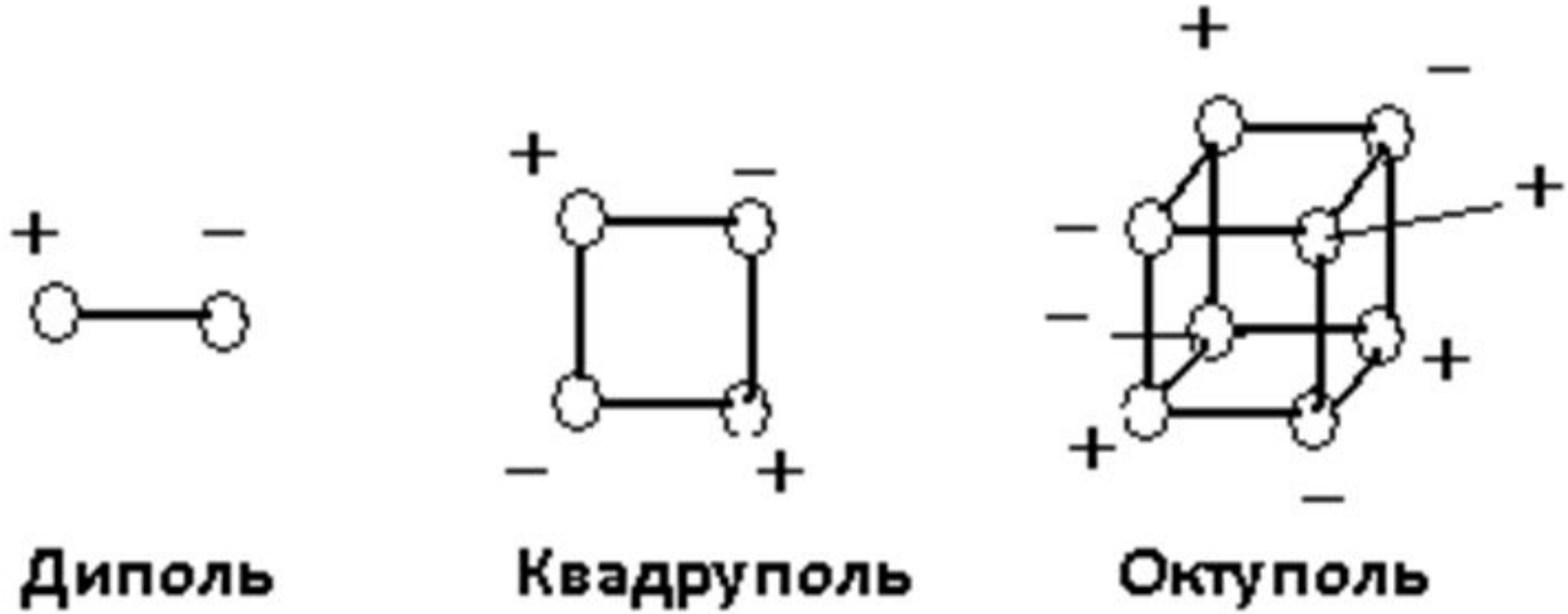
Первое слагаемое - монопольный член, а $Q = \sum q_i$.

Второе слагаемое - дипольный член, P - дипольный момент системы зарядов, он зависит от величины и положения всех зарядов.

Следующие члены – квадрупольный, октупольный и т.д.

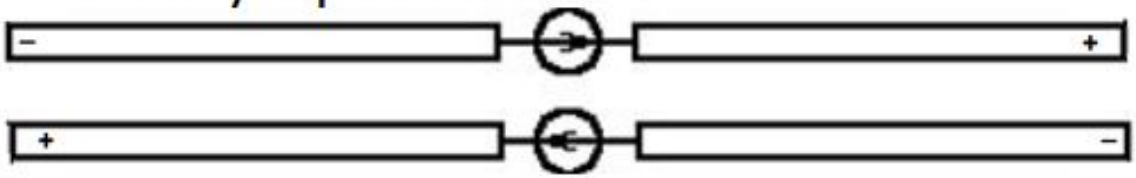
Мультиполи

Каждое следующее слагаемое имеет степень 1/r на единицу больше и поэтому быстрее убывает с ростом r. На больших расстояниях в разложении можно оставить только монопольный член. Если Q = 0, то остается дипольный член и т.д.

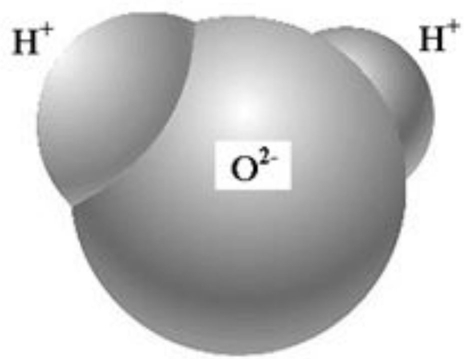


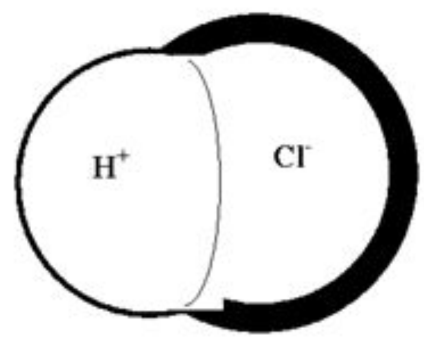
Диполь как источник ЭП

В техн. устройствах –

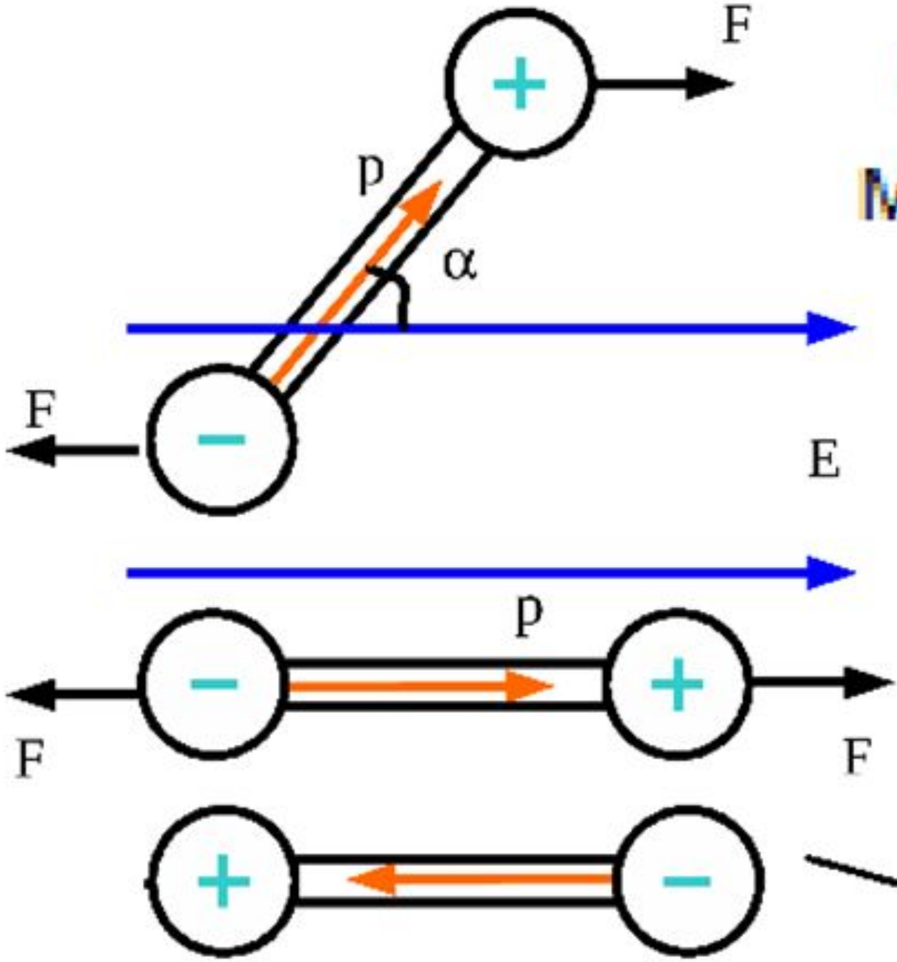


В природе - многие (нейтральные) молекулы являются диполями – положительно и отрицательно заряженные части их смещены друг относительно друга.





Диполь в однородном ЭП



Вращающий момент

$M = q\,E\,l\,\sin\alpha = p\,E\,\sin\alpha$

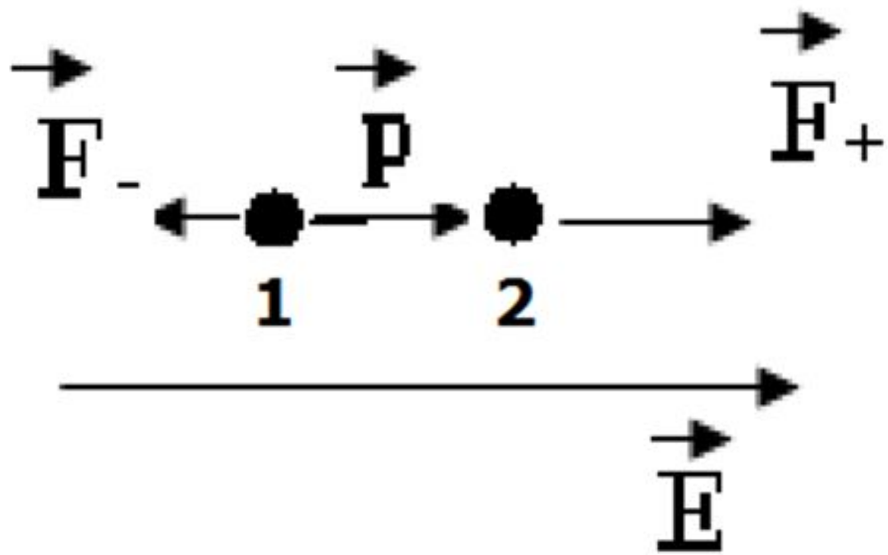
max при E ⊥ p

$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$

устойчивое равновесие U = min

неустоячивое равновесие U = max

Диполь в неоднородном ЭП



$$E_1 < E_2 \Longrightarrow F_1 < F_2$$

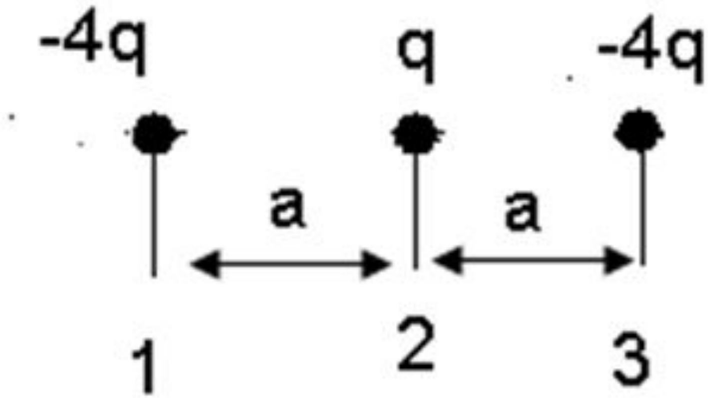
$$\sum F \neq 0$$

Втягивает в область сильного поля

Равновесие под действием только электростатических сил

Для 2 зарядов невозможно – на каждый действует ненулевая сила Кулона.

Для 3 зарядов ∃ равновесная конфигурация:



$F_2 = 0$

На q_1 действуют 2 силы, в противопол. направлениях:

$F_{12} = k(4q^2/a^2)$

$F_{13} = k(16q^2/4a^2) = k(4q^2/a^2) = F_{12}$

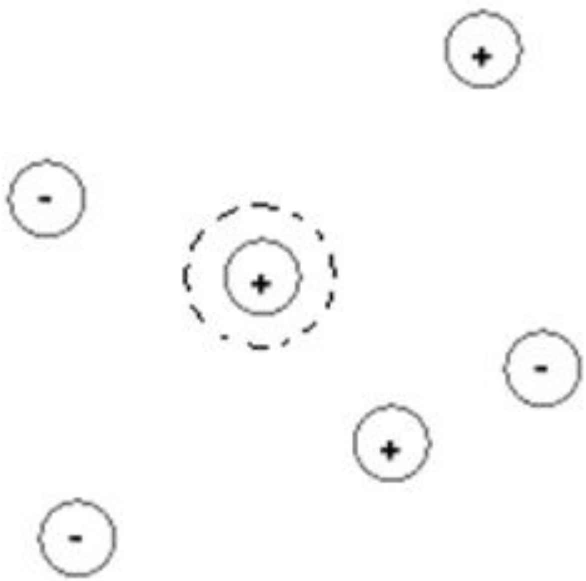
$F = F_{13} - F_{12} = 0$

То же для q_3.

Значит, равновесные конфигурации возможны.

Будет ли равновесие устойчивым?

Теорема Ирншоу



Предположим, что ∃ система зарядов в состоянии устойчивого равновесия ⇨ среди этих зарядов д.б. и «+», и «−» ⇨ выберем один из «+» и окружим его сферой малого радиуса. Этот заряд тоже д.б. в устойчивом равновесии ⇨ если его сместить из его положения в ∀ точку на сфере, то на него должна действовать возвращающая сила, направленная к центру сферы.

Теорема Ирншоу (2)

Действуют только электростатические силы ⇨ $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ и вектор $\mathbf{E}$ тоже направлен к центру сферы ⇨ $(\mathbf{E}, d\mathbf{S}) < 0$ ⇨ $\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) < 0$

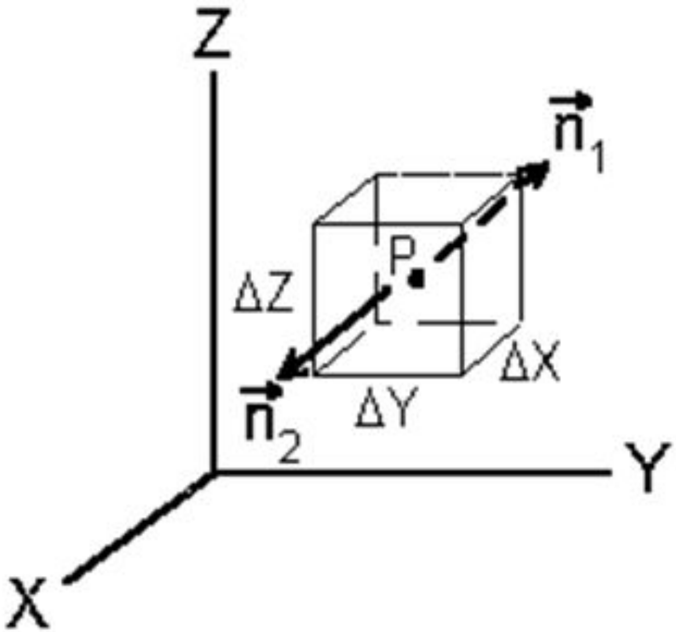
С др стороны, теорема Гаусса требует $\oiint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) > 0$, т.к. внутри сферы «+» заряд.

Вывод: **<u>предположение</u>** об устойчивом равновесии **неверно**.

Всякая равновесная конфигурация заряженных тел неустойчива, если на них действуют только кулоновские силы.

Важно для рассмотрения устойчивости атомов.

Дивергенция



Интегральная форма ТГ:

$$\oiint (\mathbf{E}, \mathbf{dS}) = q / \varepsilon_0$$

Выберем в кач-ве замкнутой пов-ти пов-сть маленького куба с ребрами $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

Тогда в ПЧ : $q = \langle\rho\rangle \Delta V$

Делим на ΔV:

$$\oiint (\mathbf{E}, \mathbf{dS}) / \Delta V = \langle\rho\rangle / \varepsilon_0$$

$\Delta V \to 0$:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint (\vec{E}, d\vec{S})}{\Delta V} \stackrel{\text{def}}{=} div\vec{E}$$

Если выполнить указанные операции, то окажется:

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса

Символ div (*дивергенция*) обозначает дифференциальную мат. операцию, кот. превращает ∀ вектор (в т.ч. **E**) в скаляр, кот. тоже наз. дивергенцией, по указанному рецепту.

Т.к. предел ПЧ = ρ / ε_0:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

Это соотношение наз. *дифференциальной формой ТГ*. Ее преимущество: чтобы вычислить ПЧ интегральной формы ТГ, нужно знать ρ во всем объеме; для дифф. формы нужно знать ρ в одной точке.

Формы записи дифф. формы ТГ

$$\partial E_x /\partial x + \partial E_y /\partial y + \partial E_z /\partial z = \rho / \varepsilon_0$$

С помощью символического вектора *набла*:

$$\nabla = \mathbf{i}\,(\partial /\partial x) + \mathbf{j}\,(\partial /\partial y) + \mathbf{k}\,(\partial /\partial z)$$

Тогда div**E** = (∇,**E**) – скалярное произведение по формальному правилу представления:

$$(\nabla,\mathbf{E}) = \partial E_x /\partial x + \partial E_y /\partial y + \partial E_z /\partial z$$

Тогда:

$$(\nabla , \mathbf{E}) = \rho / \varepsilon_0$$

Т.к. $E_x = - \partial \varphi/\partial x$, $E_y = - \partial \varphi/\partial y$, $E_z = - \partial \varphi/\partial z$, то:

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = - (\rho / \varepsilon_0)$$

Эта форма записи ТГ наз. *уравнением Пуассона*.

Формы записи дифф. формы ТГ (2)

Уравнение Пуассона также можно записать с помощью оператора набла:

$$(\nabla, \mathbf{E}) = (\nabla, \nabla\varphi) = \nabla^2\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\ \varphi$$

$\nabla^2 = \Delta$ - квадрат оператора набла, оператор Лапласа.

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

$$\nabla^2\varphi = -(\rho/\varepsilon_0) \qquad \text{или} \qquad \Delta\ \varphi = -(\rho/\varepsilon_0)$$

Для перехода к интегральной форме ∃ математическая теорема Остроградского:

$$\oiint (\mathbf{E}, \mathbf{dS}) = \iiint \mathrm{div}\mathbf{E}\ dV$$