АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Выполнили студенты группы Эсн/б-35-0
Гладырь Дмитрий, Михайлутин Владислав

ПОНЯТИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется нахождение такой функции $g(x)$ (***аппроксимирующей функции***), которая была бы близка заданной. Критерии близости функций $f(x)$ и $g(x)$ могут быть различные.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ

- Основная задача аппроксимации — построение приближенной (аппроксимирующей) функции, в целом наиболее близко проходящей около данных точек или около данной непрерывной функции. Такая задача возникает при наличии погрешности в исходных данных (в этом случае нецелесообразно проводить функцию точно через все точки, как в интерполяций) или при желании получить упрощенное математическое описание сложной или неизвестной зависимости.

МЕТОД ЛАГРАНЖА

$f(x) := x^2 \cdot e^{-x^2}$ Исходная функция

$a := 0 \quad b := 2.5$ Границы интервала

$h := \frac{b-a}{10}$ Шаг, с которым изменяется аргумент функции

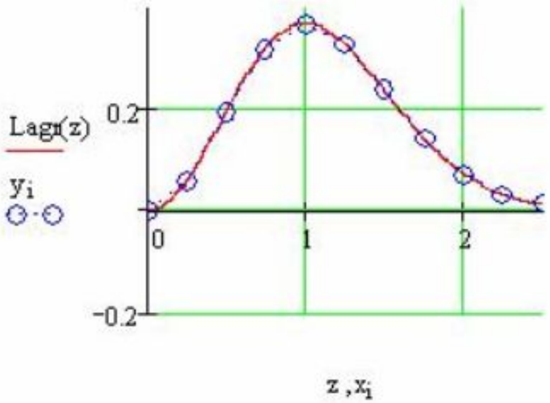
$i := 0..10$

$x_i := a + h \cdot i$ Теперь функция задана таблично

$y_i := f(x_i)$

$n := \mathrm{length}(x) - 1 \quad i := 0..n \quad j := 0..n$

$$Lagr(z) := \sum_i \left[y_i \cdot \left(\prod_j \mathrm{if}\left(i = j, 1, \frac{z - x_j}{x_i - x_j} \right) \right) \right]$$



Относительная погрешность

$$\varepsilon(z) := \frac{|f(z) - Lagr(z)|}{f(z)}$$

$\varepsilon(-0.1) = 0.334$

$\varepsilon(0.5) = 0$

$\varepsilon(1) = 0$

$\varepsilon(1.25) = 0$

$\varepsilon(1.5) = 0$

$\varepsilon(2) = 0$

$\varepsilon(2.6) = 0.21$

КОНЦЕПЦИЯ АППРОКСИМАЦИИ

Близость исходной и аппроксимирующей функций определяется числовой мерой

— *критерием аппроксимации* (близости). Наибольшее распространение получил квадратичный критерий, равный сумме квадратов отклонений расчетных значений от "экспериментальных" (т.е. заданных), — критерий близости в заданных точках:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(y_i - y_i^{расч}\right)^2$$

Здесь y_i — заданные табличные значения функции; $y_i^{расч}$ — расчетные значения по аппроксимирующей функции; b_i — весовые коэффициенты, учитывающие относительную важность i-и точки (увеличение b_i. приводит при стремлении уменьшить R к уменьшению, прежде всего отклонения в i-й точке, так как это отклонение искусственно увеличено за счет относительно большого значения весового коэффициента).

Квадратичный критерий обладает рядом "хороших" свойств, таких, как дифференцируемость, обеспечение единственного решения задачи аппроксимации при полиномиальных аппроксимирующих функциях.

Другим распространенным критерием близости является следующий:

$$R = \max_i \left| y_i - y_i^{расч} \right|$$

Этот критерий менее распространен в связи с аналитическими и вычислительными трудностями, связанными с отсутствием гладкости функции и ее дифференцируемости.

Выделяют две основные задачи:

1) получение аппроксимирующей функции, описывающей имеющиеся данные, с погрешностью не хуже заданной;

2) получение аппроксимирующей функции заданной структуры с наилучшей возможной погрешностью.

Чаще всего первая задача сводится ко второй перебором различных аппроксимирующих функций и последующим выбором наилучшей.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ(ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ)

Если для табличной функции y=f(x), имеющей значение x_0 $f(x_0)$ требуется построить аппроксимирующую функцию j(x) совпадающую в узлах с x_i с заданной, то такой способ называется **интерполяцией**

При интерполяции, заданная функция f(x) очень часто аппроксимируется с помощью многочлена, имеющего общий вид

$j(x)=p_n(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

В данном многочлене необходимо найти коэффициенты a_n ,a_{n-1} , …a_0 , так как задачей является интерполирование, то определение коэффициентов необходимо выполнить из условия равенства:

$P_n(x_i)=y_i$ i=0,1,…n

Для определения коэффициентов применяют интерполяционные многочлены специального вида, к ним относится и полином Лагранжа $L_n(x)$.

i¹j

$$y' = \sqrt{y} + 1$$

В точках отличных от узлов интерполяции полином Лагранжа в общем случае не совпадает с заданной функцией .

Области использования аппроксимации :

- моделирование;
- планирование и статистическая обработка данных;
- определение значений функции при аргументах отсутствующих в таблице;
- табулирование функции;
- представление сложной функции более простой в определённых границах значений её аргументов;
- во всех других случаях, где нужно выполнить приближение одних функций другими, более простыми, с допустимой для практики точностью.


Аппроксимация
Точная в узлах — интерполяция
Приближённая в узлах
Кусочно — линейная
Многочленами
Нелинейными функциями
Линейными функциями
Лагранжа
Ньютона
Гаусса
Нелинейными функциями
Экстраполяция

ВЫВОД:

- На практике значения функций находятся в результате каких то измерений, экспериментов.
- Аппроксимация применяется для того чтобы таблично заданную функцию представить в аналитическом виде, то есть с помощью элементарных функций.
- **Виды аппроксимации:**
  - Интерполирование (в том числе с помощью сплайнов).
  - Среднее квадратичное приближение (частный случай МНК).
  - Равномерное приближение.