

Действительные числа



Содержание

- 1 Натуральные и целые числа
- 2 Рациональные числа
- 3 Иррациональные числа
- 4 Действительные числа

Натуральные и целые числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... –
ряд натуральных чисел N или (Z_+)

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, ... –
ряд противоположных натуральным чисел Z_-

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... –
ряд целых чисел Z (Z_+ и Z_- и 0)

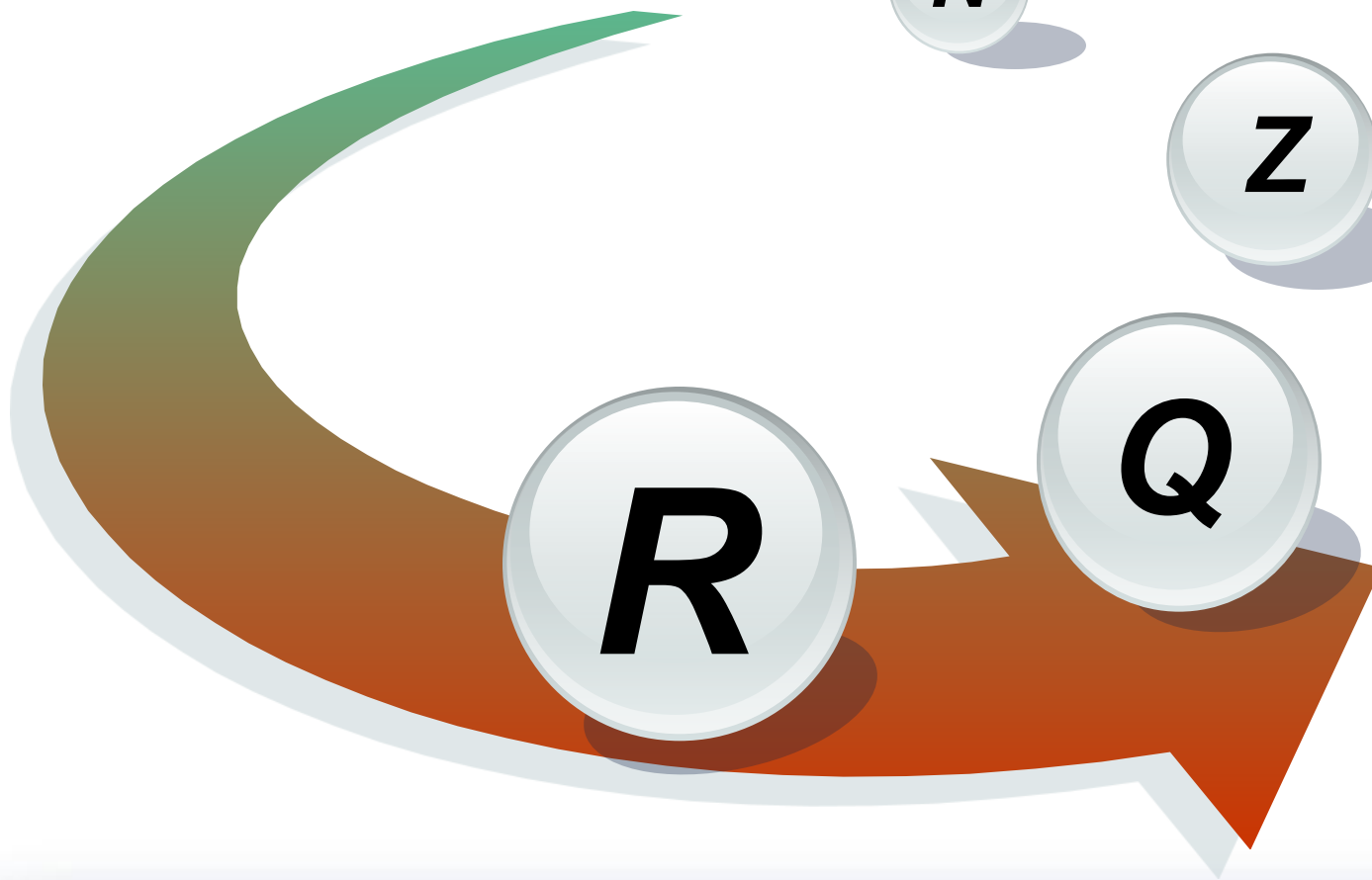
Множества чисел

N

Z

Q

R



Делимость натуральных чисел

Для двух натуральных чисел a и b , если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что число a делится на число b .

$$a : b = q$$

a – делимое

b – делитель

q – частное

$a \div b$ – a делится на b без остатка

[Свойства делимости]

1° Если $a \div c$ и $c \div b$, то $a \div b$.

Пример: $144 \div 12$ и $12 \div 3$, то $144 \div 3$.

2° Если $a \div b$ и $c \div b$, то $(a + c) \div b$.

Пример: $84 \div 3$ и $63 \div 3$, то $(84 + 63) \div 3$.

3° Если $a \div b$ и c не делится на b , то $(a + c)$ не делится на b .

Пример: $48 \div 3$ и 52 не делится на 3 ,
то $(48 + 52)$ не делится на 3 .

[Свойства делимости]

4° Если $a \div b$ и $(a + c) \div b$, то $c \div b$.

Пример: $48 \div 3$ и $(48 + 57) \div 3$, то $57 \div 3$.

5° Если $a \div b$ и $c \div d$, то $ac \div bd$.

Пример: $81 \div 3$ и $56 \div 4$, то $(81 \cdot 56) \div (3 \cdot 4)$.

6° Если $a \div b$ и $c \in \mathbb{N}$, то $ac \div bc$, и наоборот.

Пример: $48 \div 12$ и $11 \in \mathbb{N}$, то
 $(48 \cdot 11) \div (12 \cdot 11)$, и обратно.

[Свойства делимости]

7° Если $a : b$ и $c \in N$, то $ac : b$.

Пример: $48 : 3$ и $13 \in N$, то $(48 \cdot 13) : 3$.

8° Если $a : b$ и $c : b$, то для любых $n, k \in N$ следует $(an + ck) : b$.

Пример: $81 : 9$ и $54 : 9$, то $(81 \cdot 17 + 54 \cdot 28) :$

9° Среди n последовательных натуральных чисел **одно и только одно** делится на n .

Пример: среди трех последовательных натур. чисел 111, 112, 113 только одно делится на 3. $(111 : 3)$

Признаки делимости

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 2: необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на **2**.

Пример: $56738 \div 2$ т.к. $8 \div 2$.

На 5: необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на **5** (0 или 5).

Пример: $56735 \div 5$ т.к. $5 \div 5$.

На 10: необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была **0**.

Пример: $56730 \div 10$.

Признаки делимости

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 4: необходимо и достаточно, чтобы делилось на **4** число, образованное двумя последними цифрами.

Пример: $56736 \div 4$, т.к. $36 \div 4$.

На 25: необходимо и достаточно, чтобы делилось на **25** число, образованное двумя последними цифрами.

Пример: $56775 \div 25$, т.к. $75 \div 25$.

На 8: необходимо и достаточно, чтобы делилось на **8** число, образованное тремя последними цифрами.

Пример: $56552 \div 8$, т.к. $552 \div 8$.

[Признаки делимости]

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 125: необходимо и достаточно, чтобы делилось на **125** число, образованное тремя последними цифрами.

Пример: $56375 \div 125$, т.к. $375 \div 125$.

На 3: необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на **3**.

Пример: $56742 \div 3$, т.к. $(5+6+7+4+2) \div 3$.

На 9: необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на **9**.

Пример: $56545 \div 9$, т.к. $(5+6+7+4+5) \div 9$.

Признаки делимости

Для того чтобы натуральное число делилось

На 11: необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр, взятых со знаком «+», стоящих на нечетных местах, и сумма цифр, взятых со знаком «-», стоящих на четных местах, делилась на **11**.

Пример: $8637519 : 11$, т.к. $(9-1+5-7+3-6+8) : 11$.

На 7 (на 13): необходимо и достаточно, чтобы сумма чисел, образующих грани, взятых со знаком «+» для нечетных граней и со знаком «-» для четных граней, делилась на **7 (на 13)**.

Пример: $254\ 390\ 815 : 7$, т.к. $(815-390+254) : 7$.

Деление с остатком

Теорема 4. Если натуральное число a больше натурального числа b и a не делится на b , то существует, и только одна, пара натуральных чисел q и r , причем $r < b$, такая что выполняется равенство:

$$a = bq + r$$

a – делимое

q – неполное частное

b – делитель

r – остаток

Пример: $37 : 15 = 2$ (ост. 7)

$a = 37$, $b = 15$, тогда $37 = 15 \cdot 2 + 7$;

где $q = 2$, $r = 7$.

Замечание. Если $a \div b$, то можно считать, что $r = 0$.

Простые числа

Если натуральное число имеет только два делителя – само себя и 1, то его называют **простым числом**.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, ... – простые числа.

Теорема 1. Любое, натуральное число $a > 1$ имеет хотя бы один простой делитель.

Теорема 2. Множество простых чисел бесконечно.

Теорема 3. Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперед заданного натурального числа.

Составные числа

Если натуральное число имеет более двух делителей, то его называют **составным числом**.

4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, ... – составные числа

1 не является ни простым, ни составным числом.

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.

Примеры: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель (НОД)

Найти НОД чисел: 72 и 96.

Делители числа 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Делители числа 96: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96

Среди них есть одинаковые: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24

Их называют общими делителями чисел 72 и 96, а наибольшее из них называют наибольшим общим делителем (НОД) чисел 72 и 96.

$$\text{НОД}(72; 96) = 24$$

Наибольший общий делитель (НОД)

Два натуральных числа a и b называют **взаимно простыми** числами, если у них нет общих делителей, отличных от 1 , т.е. $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Пример: 35 и 36 взаимно простые числа, т.к. $\text{НОД}(35; 36) = 1$.

Наименьшее общее кратное (НОК)

Найти НОК чисел: 12 и 18.

Кратные числа 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...

Кратные числа 18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, ...

Среди них есть одинаковые: 36, 72, 108, 144, ...

Их называют общими кратными чисел 12 и 18, а наименьшее из них называют наименьшим общим кратным (НОК) чисел 12 и 18.

$$\text{НОК}(12; 18) = 36$$

Разложение на простые множители

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$$\begin{aligned} \text{НОД } (3780; 7056) &= \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{НОК } (3780; 7056) &= \\ &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = \\ &= 105840 \end{aligned}$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

Рациональные числа

Рациональные числа – это числа вида $\frac{m}{n}$,
где m – целое число, а n – натуральное.

Q - множество рациональных чисел.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Примеры: $\frac{5}{28} = 0,17(857142); \quad \frac{2}{7} = 0,(285714);$

$6 = 6,000... = 6,(0); \quad 7,432 = 7,432000... = 7,432(0).$

Рациональные числа

Верно и обратное утверждение:

Любую **бесконечную десятичную периодическую дробь** можно представить в виде **обыкновенной дроби**.

Примеры: $0,3333\dots = 0,(3) = \frac{1}{3};$

$$0,3181818\dots = 0,3(18) = \frac{7}{22}.$$

Рациональные числа

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (1 способ):

Пусть $x = 1,(23) = 1,23232323\dots$

Умножим x на 100, чтобы запятая переместилась вправо на один период:

$$\begin{array}{r} \underline{100x = 123,232323\dots} \\ x = 1,232323\dots \\ \hline 100x - x = 122,000000\dots \end{array}$$

Т.е. $99x = 122$, откуда $x = \frac{122}{99}$

Рациональные числа

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (2 способ):

Пусть $1,(23) = 1,232323... = 1 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ...$

Рассмотрим эту сумму 1 и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = 1 + S_1$, где $S_1 = b_1 / (1 - q)$ – формула суммы бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем $q = 0,01$, и первым членом $b_1 = 0,23$:

$$S_1 = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99}$$
$$S = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}$$

Иррациональные числа

Иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* – разум (буквальный перевод: «рациональное число – разумное число», «иррациональное число – неразумное число»).

Примеры:

$0,1234567891011121314\dots$

$\pi \approx 3,1415926535897932\dots$

$e \approx 2,7182818284590452\dots$

$\sqrt{11} \approx 3,31662479035539\dots$

Спасибо за внимание!

