Релятивистский закон сложения скоростей

- Пусть в К системе отсчета частица движется со скоростью

$$u = (u_x, u_y, u_z)$$

- Найдем скорость в системе К´

$$u' = (u'_x, u'_y, u'_z)$$

$$u'_x = \frac{dX'}{dt'}$$

$$dX' = \frac{dX - Vdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{VdX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dX'}{dt'} = \frac{dX - Vdt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \div \frac{dt - \frac{VdX}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{dX - Vdt}{\cancel{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}{dt - \frac{VdX}{c^2}} = \frac{dX - Vdt}{dt - \frac{VdX}{c^2}}$$

$$\frac{dX'}{dt'} = \frac{\frac{dX}{dt} - V}{1 - \frac{V \cdot \frac{dX}{dt}}{c^2}}$$

$$\frac{dX}{dt} = u_x$$

$$\frac{dX'}{dt'} = u'_x$$

$$\boxed{u'_X = \frac{u_X - V}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}}$$

$$u'_{Y} = \frac{dY'}{dt'}$$

$$Y' = Y$$

$$dY' = dY$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{VdX}{c^{2}}}{\sqrt{1 - \frac{V^{2}}{c^{2}}}}$$

$$u'_Y = dY' \div \frac{dt - \frac{VdX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{dY \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt - \frac{VdX}{c^2}}$$

$$u'_Y = \frac{\frac{dY}{dt} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \frac{dX}{dt}}{c^2}} \qquad \frac{dY}{dt} = u_y$$

$$\boxed{u'_Y = \frac{u_Y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}}$$

$$u'_Z = \frac{u_Z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}$$

$$K \Rightarrow K'$$

$$u'_X = \frac{u_X - V}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}$$

$$u'_Y = \frac{u_Y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}$$

$$u'_Z = \frac{u_Z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cdot u_X}{c^2}}$$

$$K' \Rightarrow K \qquad u_X = \frac{u'_X + V}{1 + \frac{V \cdot u'_X}{c^2}}$$

$$u_Y = \frac{u'_Y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot u'_X}{c^2}}$$

$$u_Z = \frac{u'_Z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V \cdot u'_X}{c^2}}$$

Пример

- Частица движется в системе К´ со скоростью света $u'_X = c$

$$u_X = \frac{u'_X + V}{1 + \dfrac{V \cdot u'_X}{c^2}} = \frac{c + V}{1 + \dfrac{V \cdot \cancel{c}}{\cancel{c^2}}} = c$$

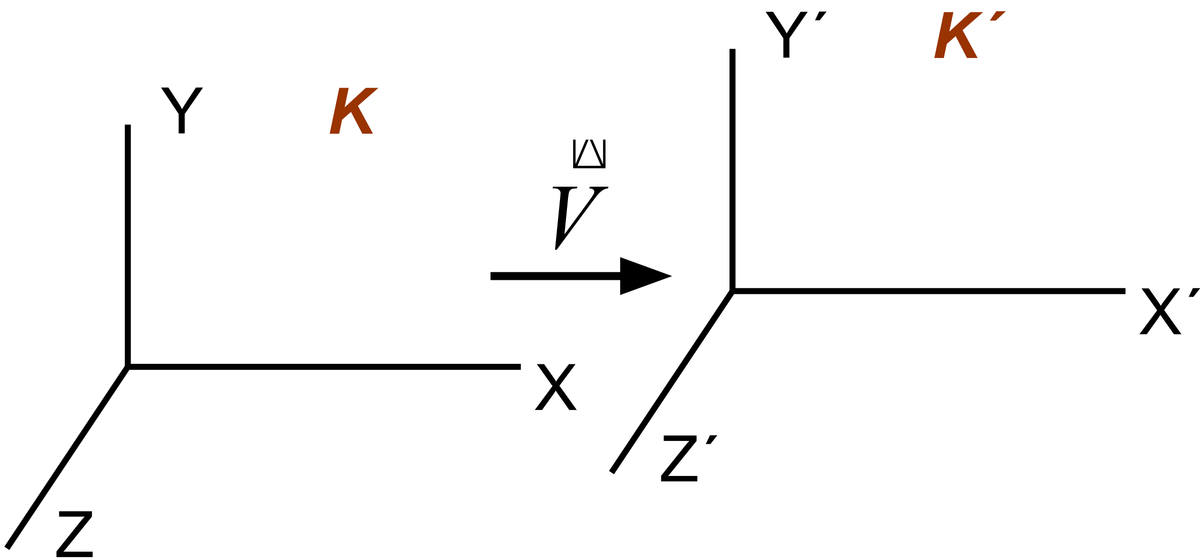
Пример

- Частица движется в системе К´ со скоростью света, и система К´ движется относительно К со скоростью света

$$u'_X = c \qquad V = c$$

$$u_X = \frac{u'_X + V}{1 + \frac{V \cdot u'_X}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = \frac{2c}{1+1} = c$$

Интервал между событиями



- 1 событие – в системе отсчета К из точки с координатами (x_1,y_1,z_1) в момент времени t_1 отправляется световой сигнал
- 2 событие – в системе отсчета К сигнал пришел в точку (x_2,y_2,z_2) в момент времени t_2

- Расстояние, пройденное сигналом с системе отсчета К

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right) = 0$$

- В системе отсчета К‘ координаты событий 1- ($x_1´$,$y_1´$,$z_1´$,$t_1´$) и
- 2- ($x_2´$,$y_2´$,$z_2´$,$t_2´$)
- Т.к. скорость света одинакова в К и К ´,

$$c(t_2' - t_1') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - \left((x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2\right) = 0$$

- Назовем **интервалом между событиями** величину

$$\boxed{S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (X_2 - X_1)^2 - (Y_2 - Y_1)^2 - (Z_2 - Z_1)^2}}$$

$$S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (X'_2 - X'_1)^2 - (Y'_2 - Y'_1)^2 - (Z'_2 - Z'_1)^2}$$

$$S_{12}{}^2 = S'_{12}{}^2 = 0$$

- Интервал между событиями не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой

$$\boxed{S_{12} = S'_{12} = \mathrm{invar}}$$

Времениподобные интервалы

- Рассмотрим два события в системе отсчета К
- 1- (x_1, y_1, z_1, t_1),
- 2 – (x_2, y_2, z_2, t_2)
- Хотим выяснить существует ли такая система отсчета, где эти события происходят в одной точке пространства?

$$t_2 - t_1 = t_{12}$$

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = \boxtimes_{12}^2$$

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \boxtimes_{12}^2$$

$$S_{12}^{2\,\prime} = c^2 t_{12}^{2\,\prime} - \boxtimes_{12}^{2\,\prime}$$

$$S_{12}^2 = S_{12}^{2\,\prime}$$

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}^{2\prime} - l_{12}^{2\prime}$$

$$l_{12}' = 0$$ - Мы так хотим

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}^{2\prime}$$

$$c^2 t_{12}^{2\prime} > 0 \qquad c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0$$

$$\boxed{c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 > 0}$$

- **Времениподобный** интервал

$$\cancel{t_{12}^2 = 0}$$

- **НЕ существует** такой системы отсчета, где бы события происходили **одновременно**

- **существует** такая системы отсчета, где бы события происходили **одноместно**

- Если два события происходят с одним и тем же телом, то интервал всегда времениподобный

Простанственноподобные интервалы

- Рассмотрим два события в системе отсчета К
- 1- (x_1, y_1, z_1, t_1),
- 2 – (x_2, y_2, z_2, t_2)
- Хотим выяснить существует ли такая система отсчета, где эти события происходят одновременно?

$$c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - \ell_{12}'^2$$

$$t_{12}' = 0$$ - Мы так хотим

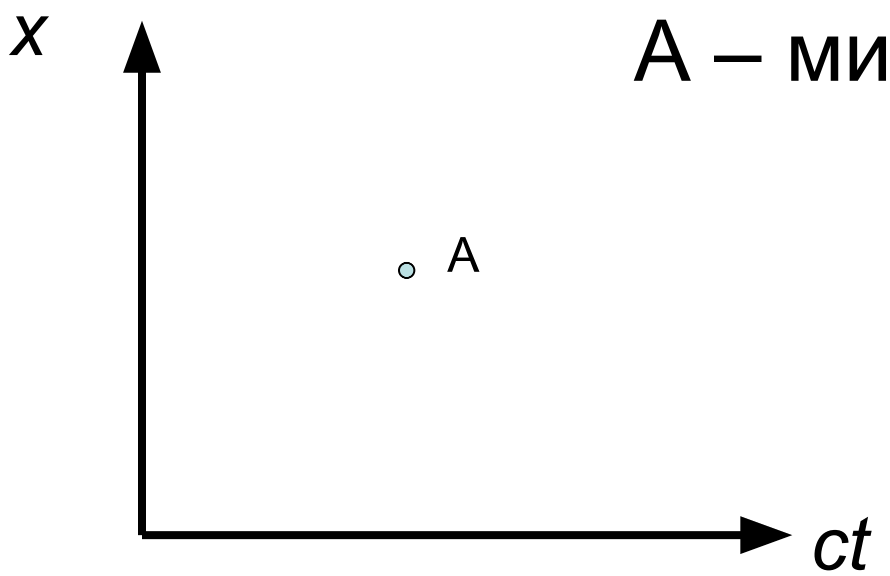
$$c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = -\ell_{12}'^2 < 0$$

- **Пространственноподобный** интервал

$$t_{12}^2 = 0$$

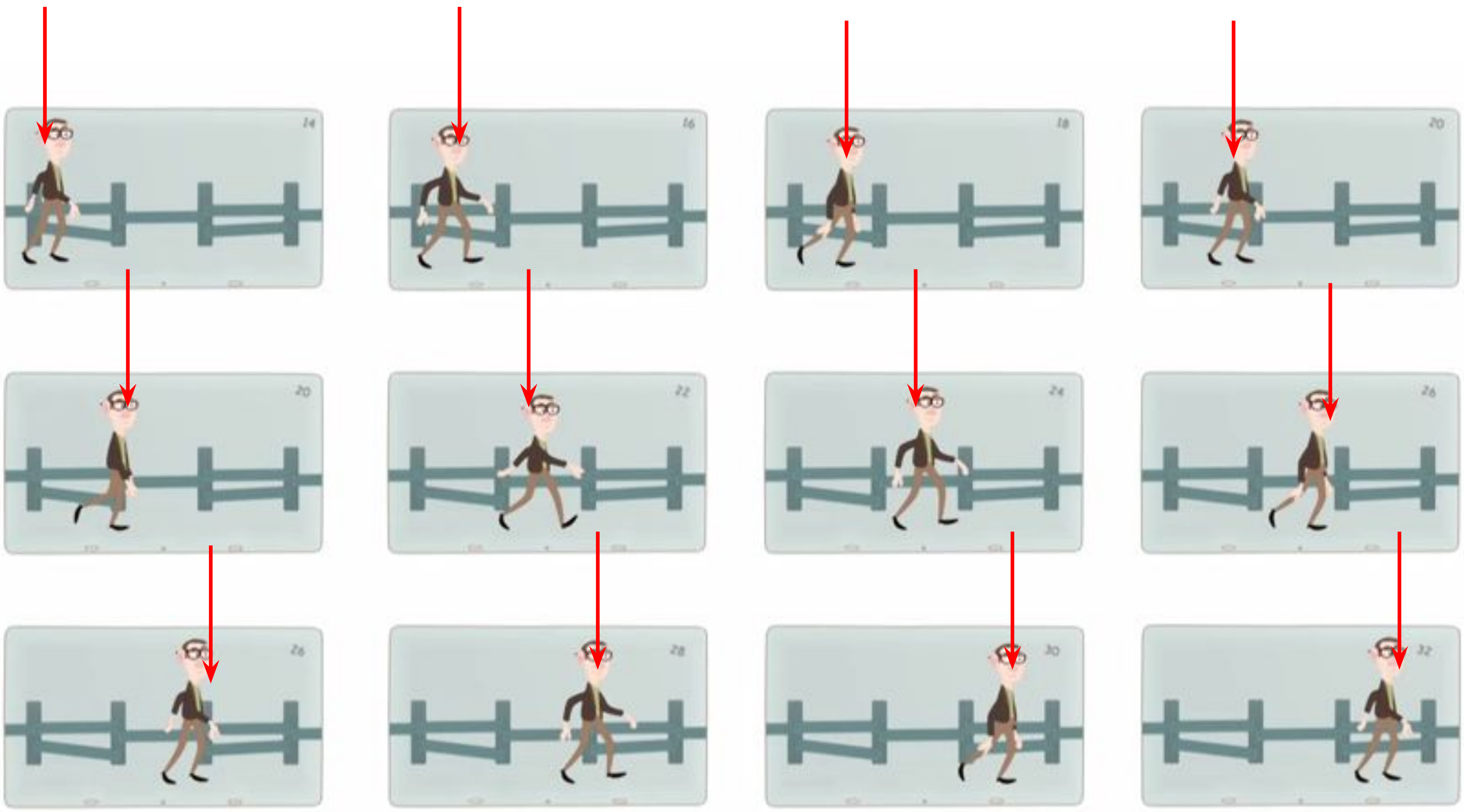
- **существует** такая системы отсчета, где бы события происходили **одновременно**

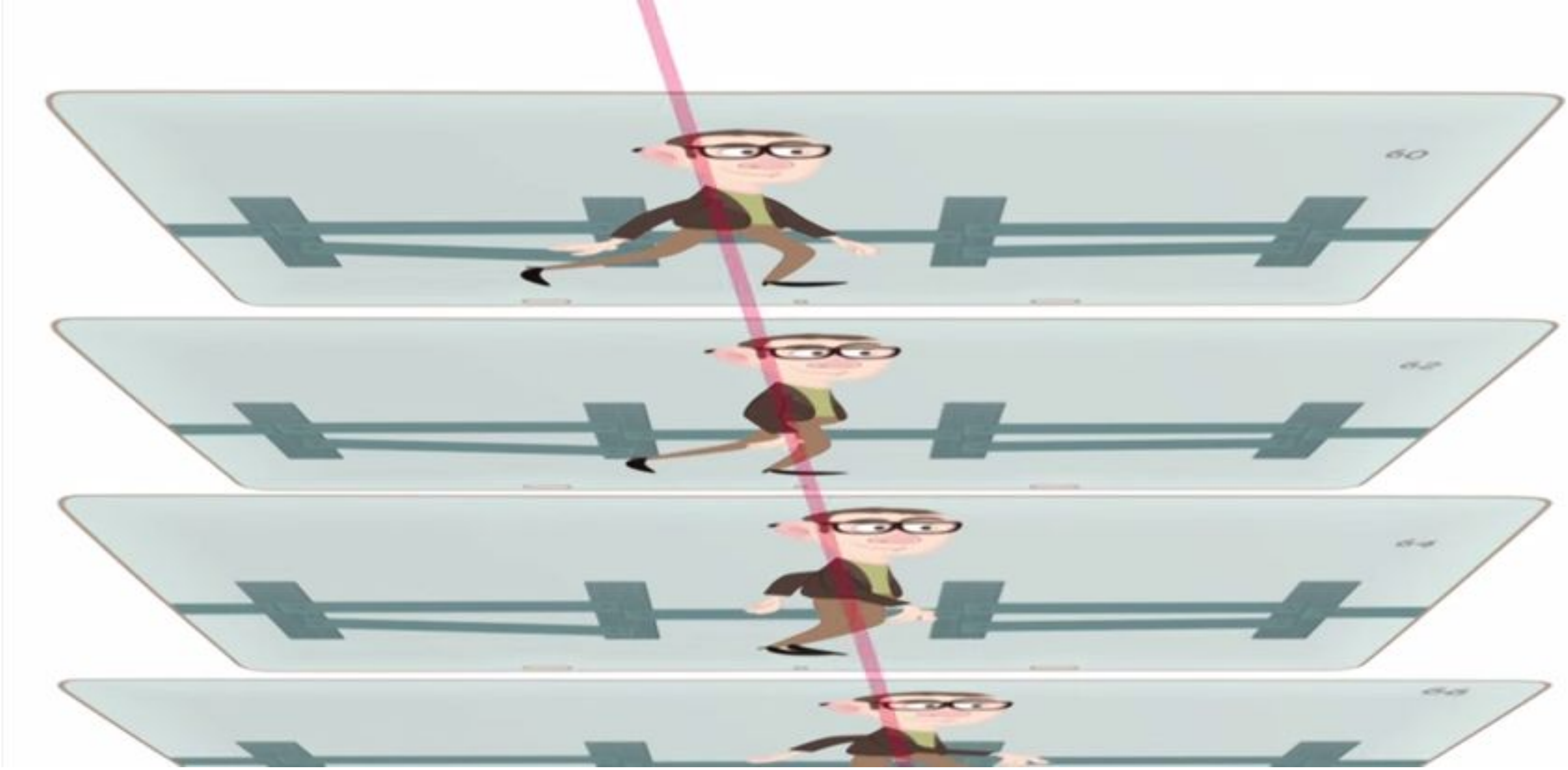
Свойства пространства и времени по Эйнштейну

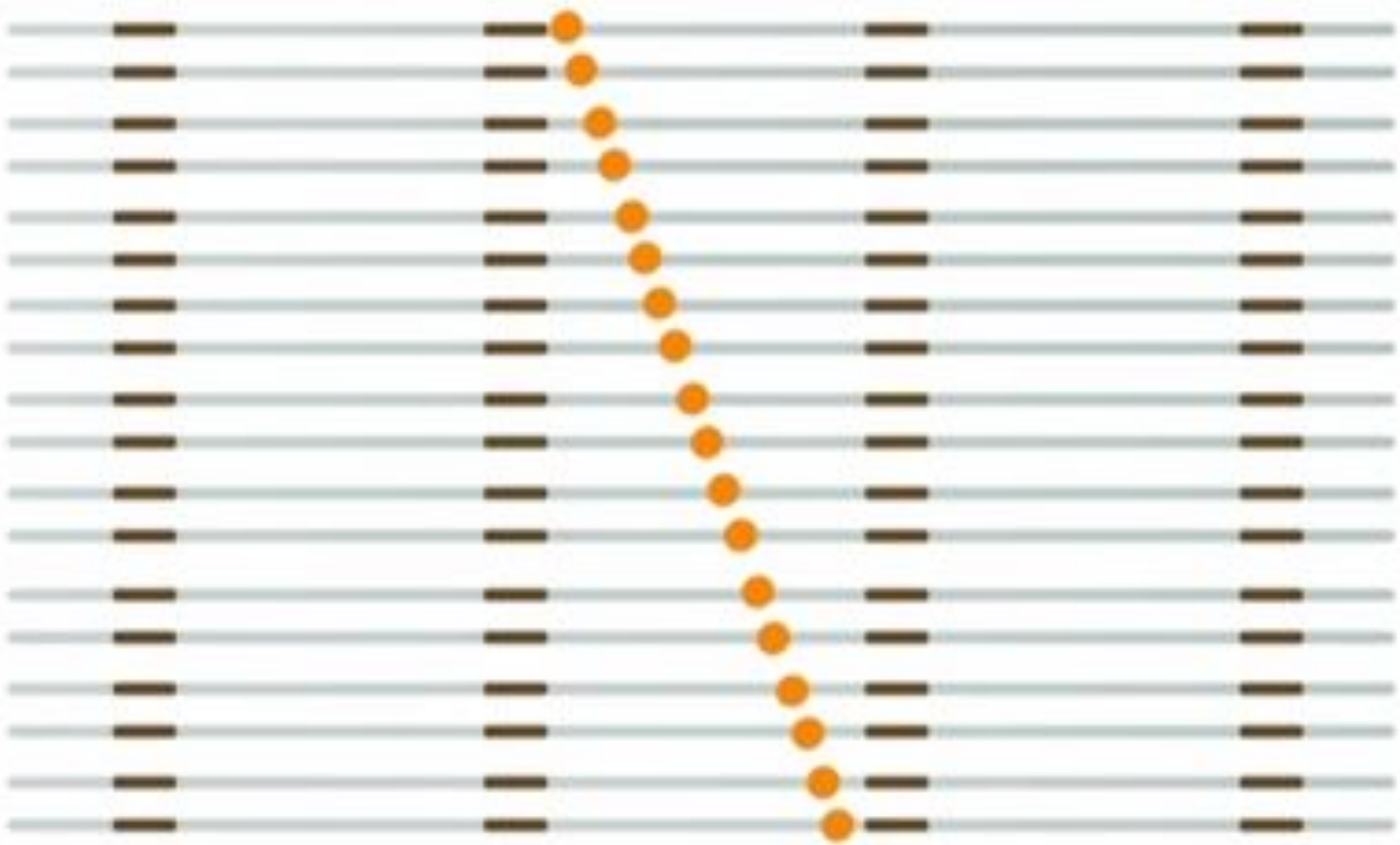


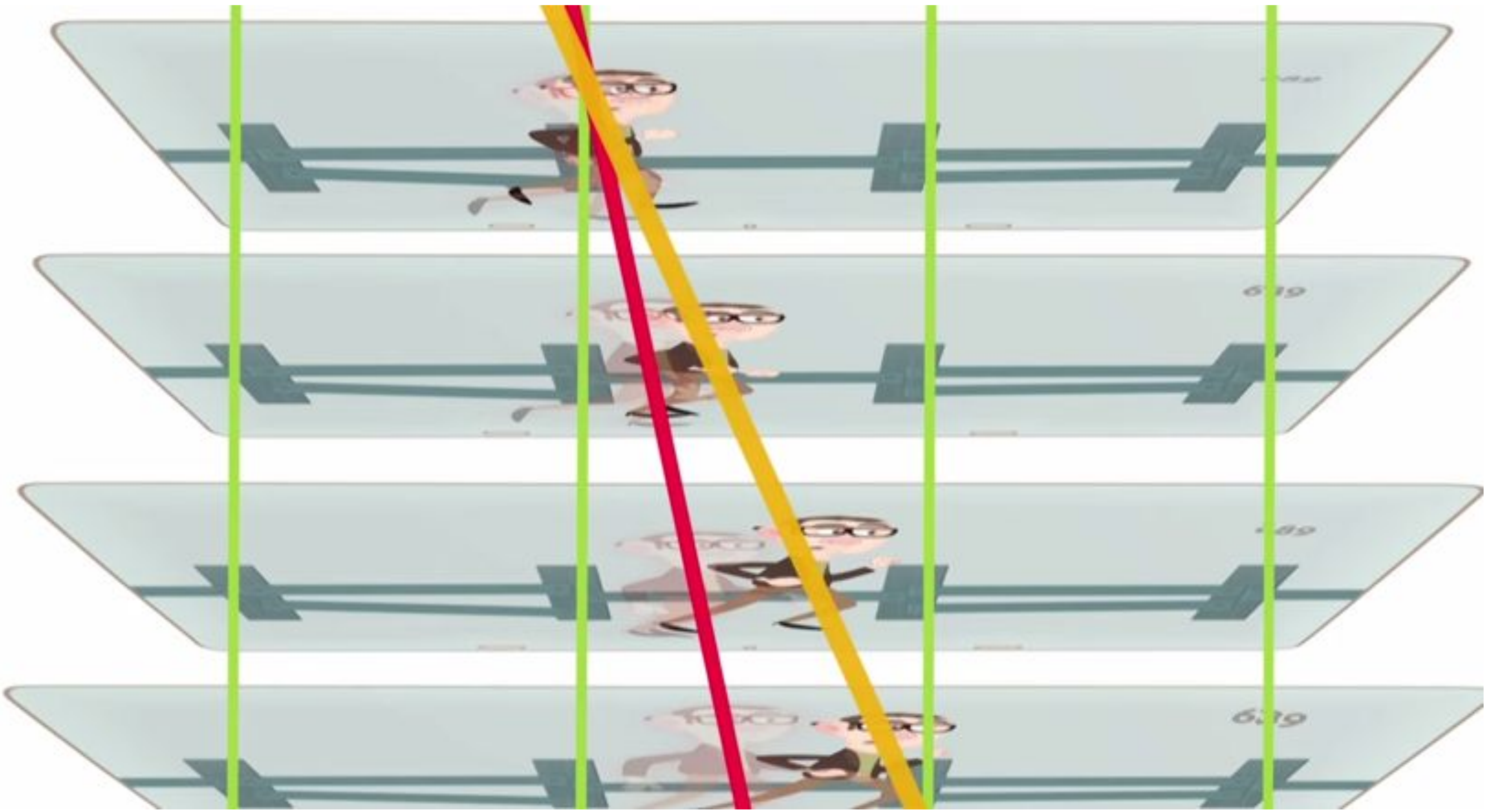
A – мировая точка

Пространственно-временная диаграмма

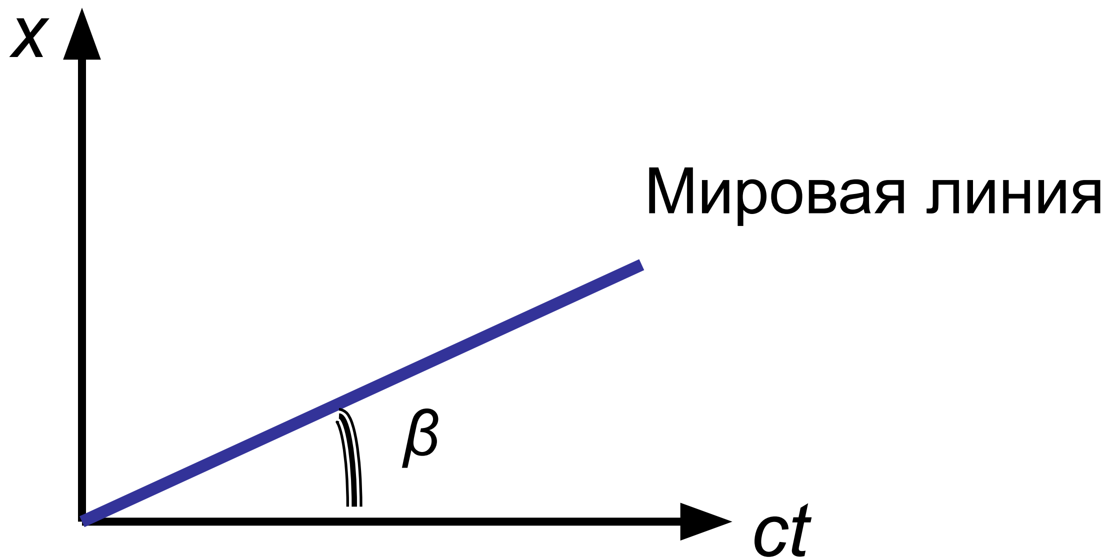

14
16
18
20
20
22
24
26
26
28
30
32





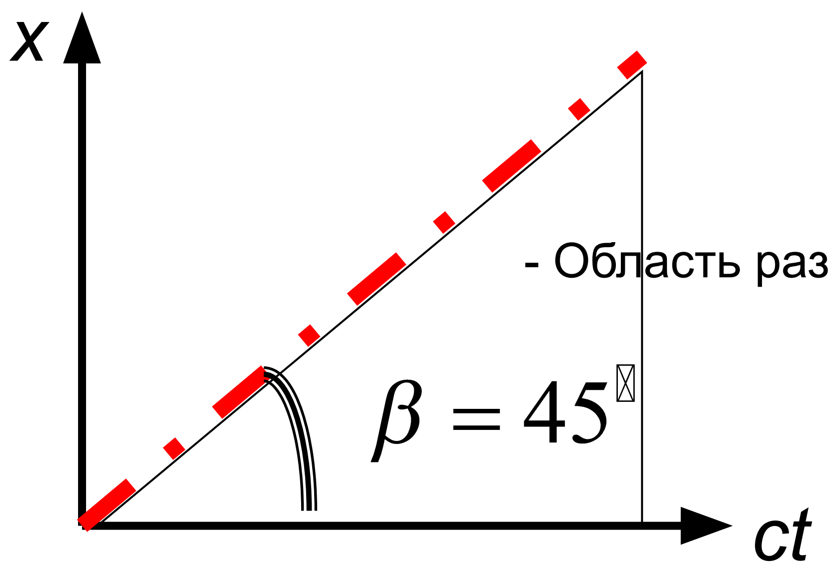


Движение тела описывается прямой, проходящей через начало координат

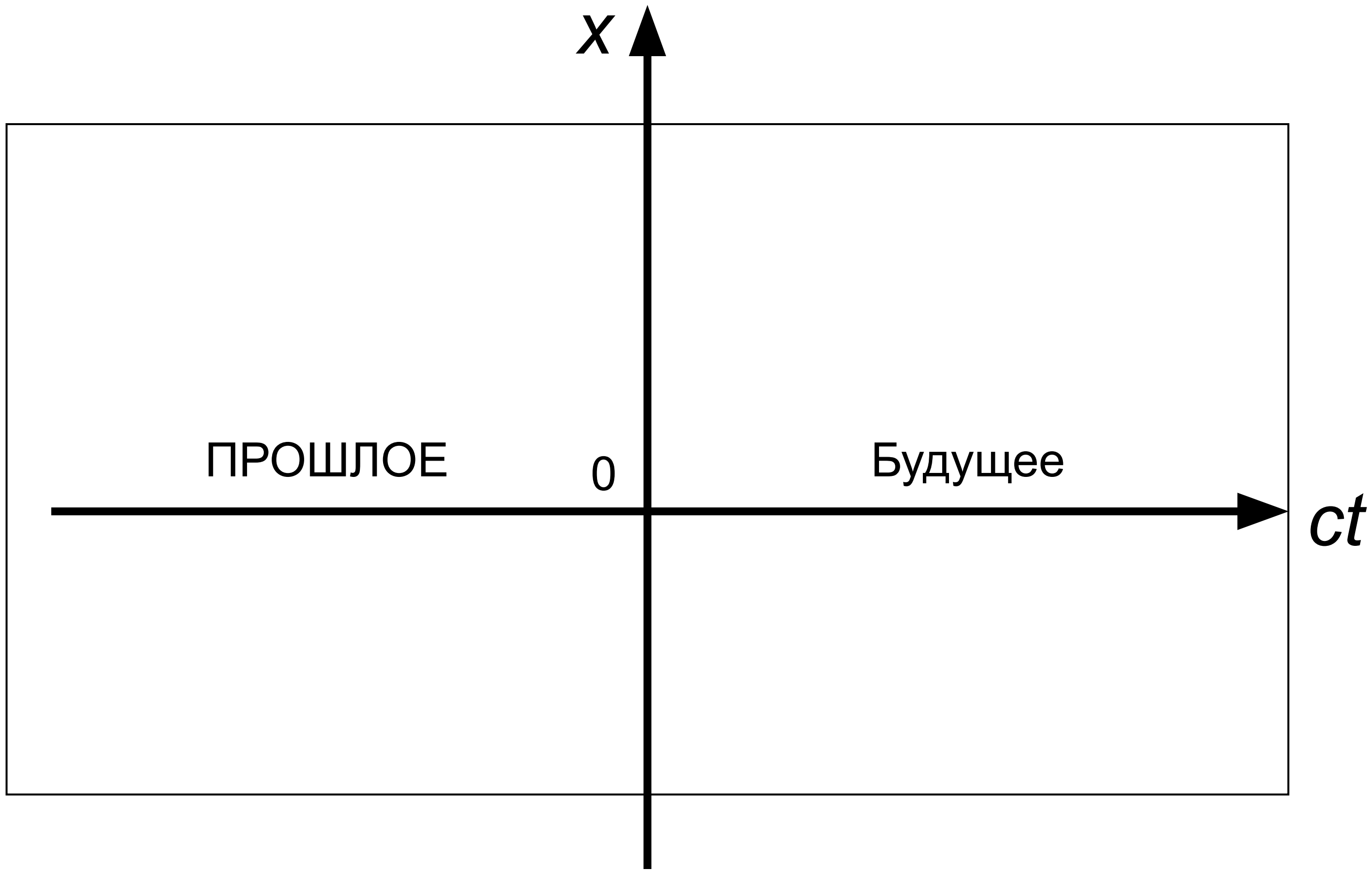


$$tg\beta = \frac{x}{ct} \quad = \frac{V}{c}$$

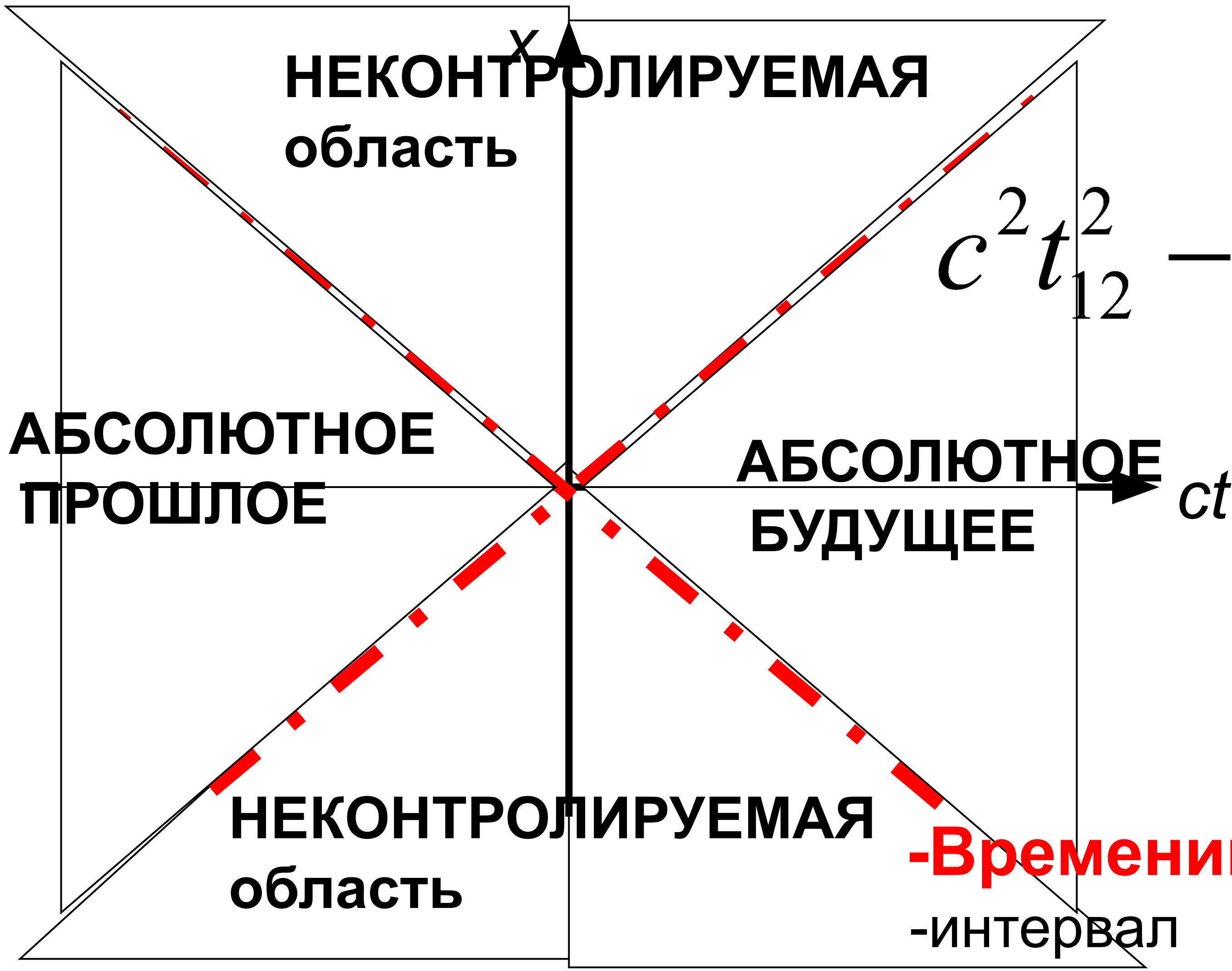
$$c = V \qquad tg\beta = 1 \qquad \beta = 45^\circ$$



В классической физике



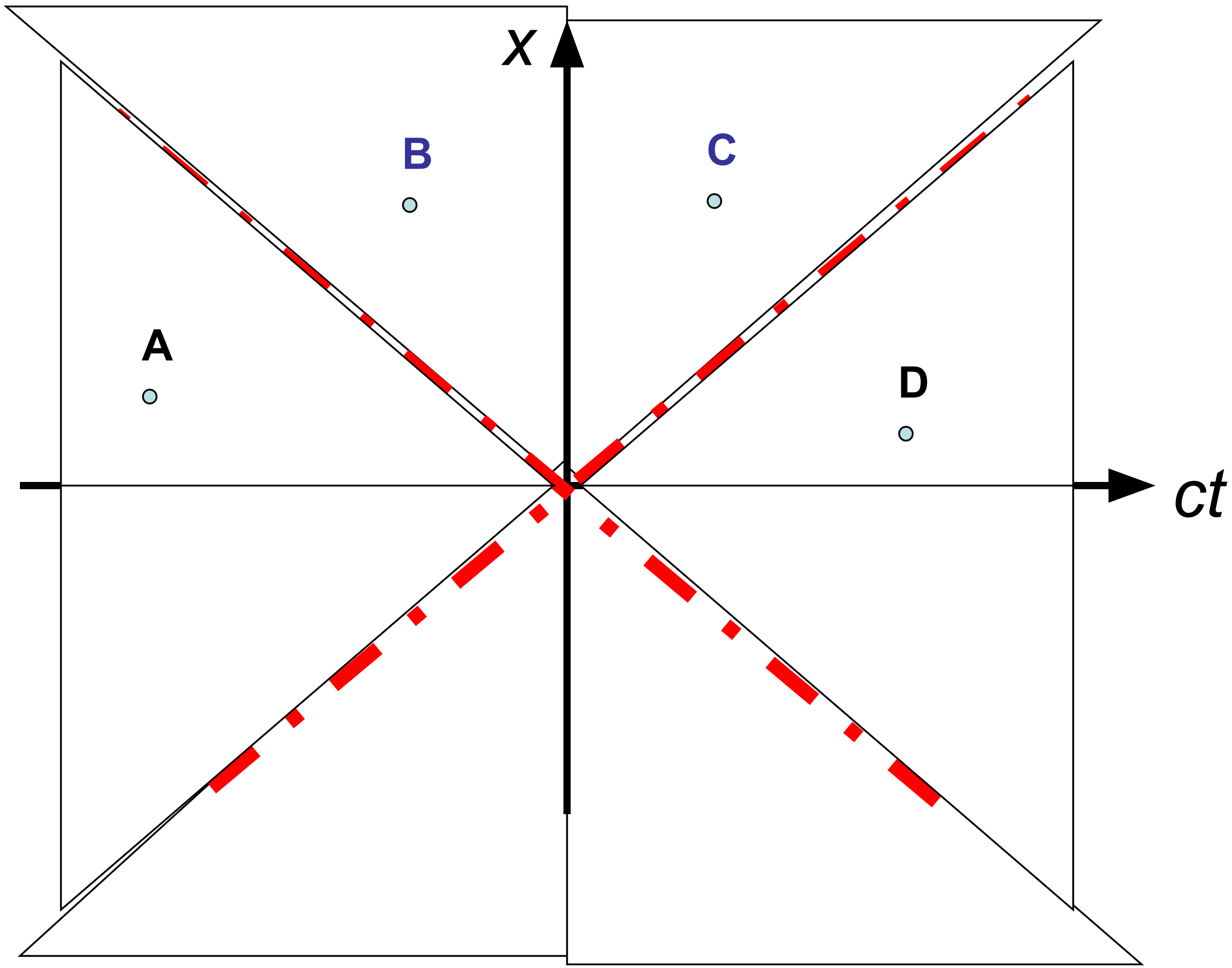
В релятивистской физике



$$c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2 > 0$$

-Времениподобный

-интервал



x
B
C
A
D
ct