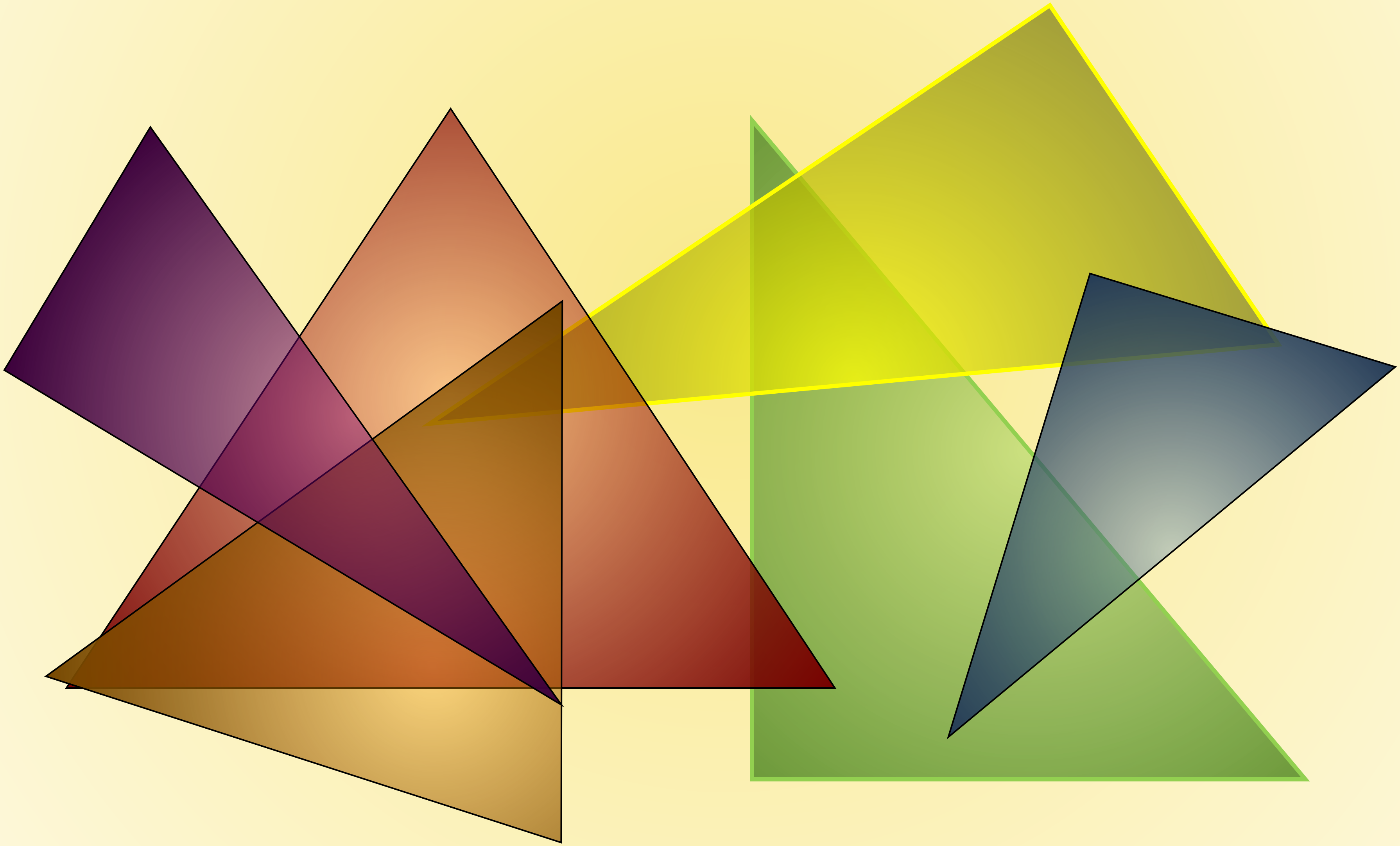
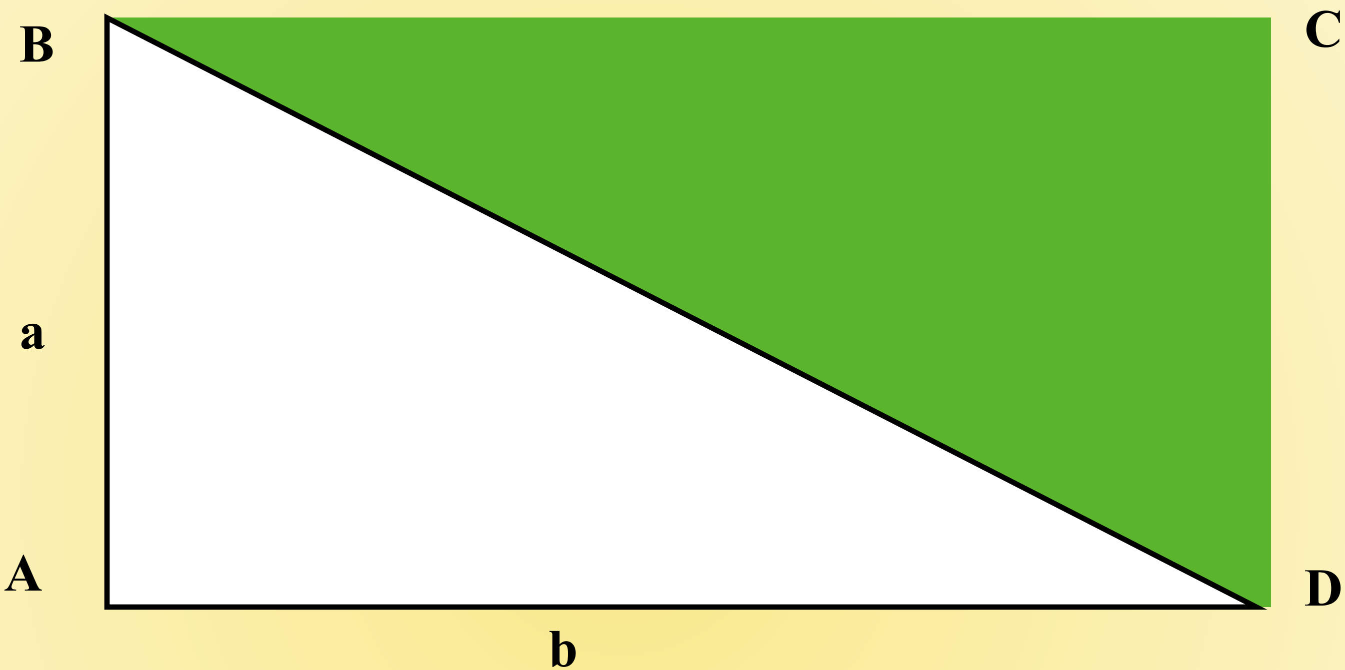
Формулы для вычисления площадей различных треугольников



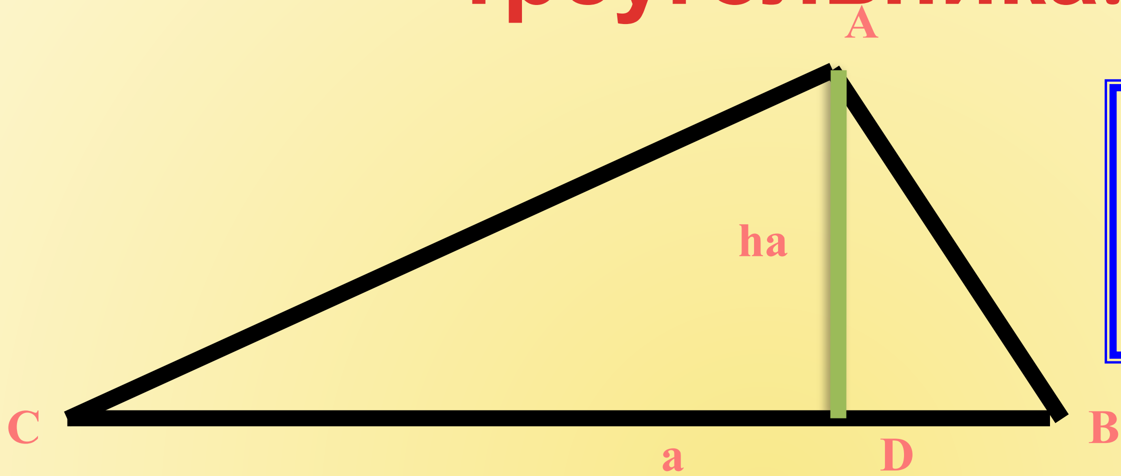
Площадь прямоугольного треугольника.



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА РАВНА ПОЛОВИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КАТЕТОВ.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab}$$

Площадь любого треугольника.



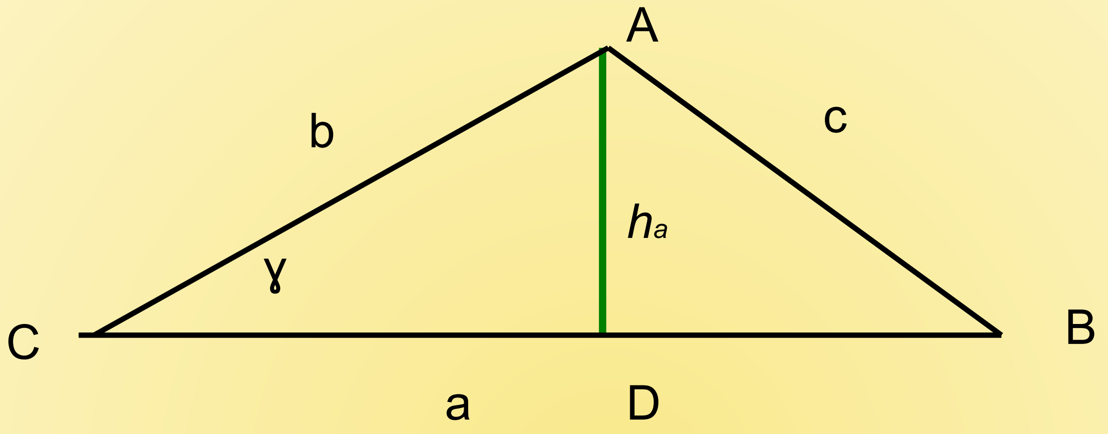
$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$$

Площадь любого треугольника равна половине произведения основания на высоту.

$$S_{ABC}=S_{ADC}+S_{ADB}=\frac{1}{2}CD\cdot h_a+\frac{1}{2}DB\cdot h_a=$$

$$=\frac{1}{2}(CD+DB)h_a=\frac{1}{2}CB\cdot h_a=\frac{1}{2}a\cdot h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$$

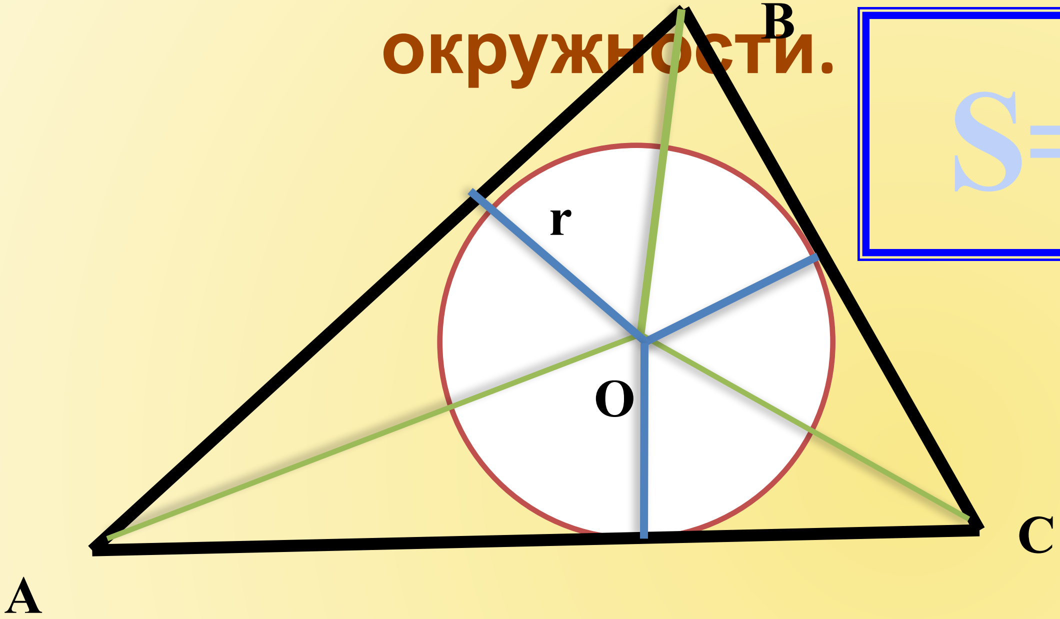


Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, то площадь такого треугольника можно найти, как половина произведения двух сторон на синус угла между ними.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, но из прямоугольного

треугольника ADC $h_a = b \cdot \sin\gamma$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$

Площадь треугольника через r-радиус вписанной окружности.



$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

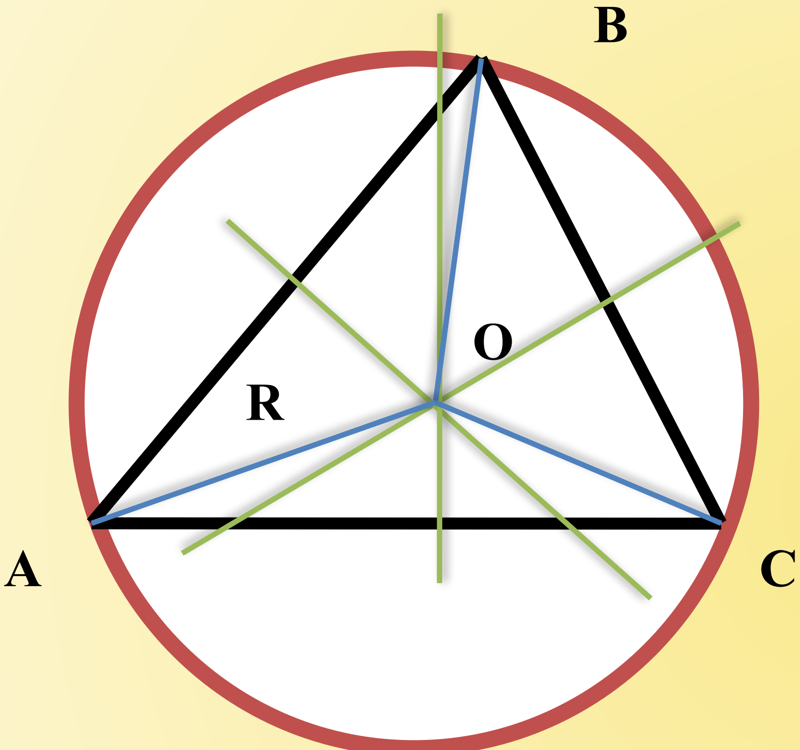
Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r +$$

$$+ \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$$

$r =$ *радиус вписанной окружности.*

Площадь треугольника через R-радиус описанной окружности



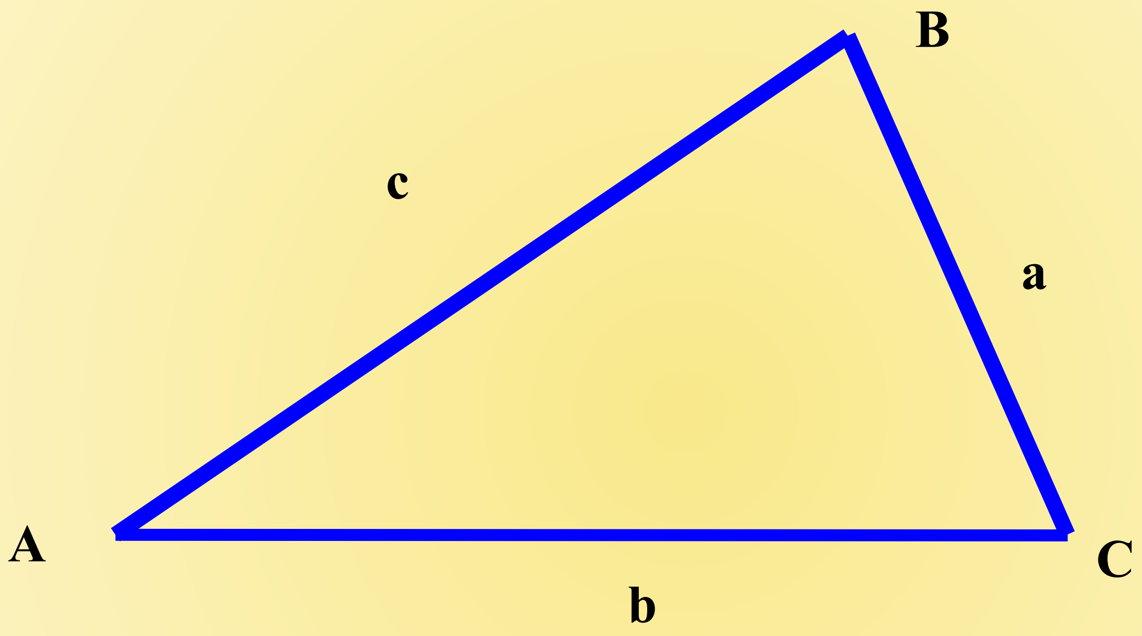
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Мы знаем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $\sin C$ найдем из соотношения

$$\frac{c}{\sin C} = 2R; \sin C = \frac{c}{2R}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

І формула Герона



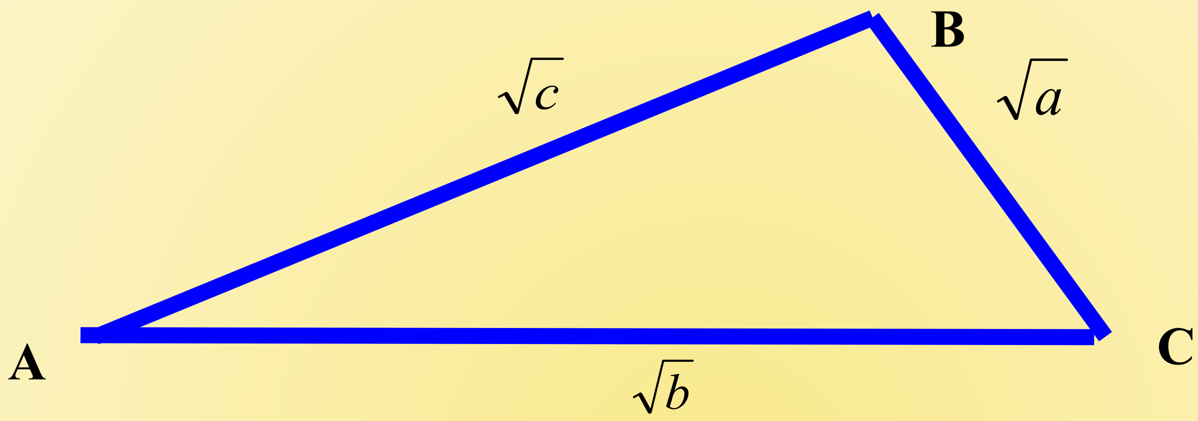
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ (Heronus Alexandrinus)

Герон Александрийский – греческий учёный, работавший в Александрии,(даты рождения и смерти неизвестны, вероятно, I – II вв. н. э.). Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. В "Метрике" даны правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрических фигур, например *формула Герона* для определения площади треугольника по трём сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубических корней. В основном изложение в математических трудах Герона догматично – правила часто не выводятся, а только выясняются на примерах.

Герон занимался геометрией Герон занимался геометрией, механикой Герон занимался геометрией, механикой, гидростатикой Герон занимался

II формула Герона

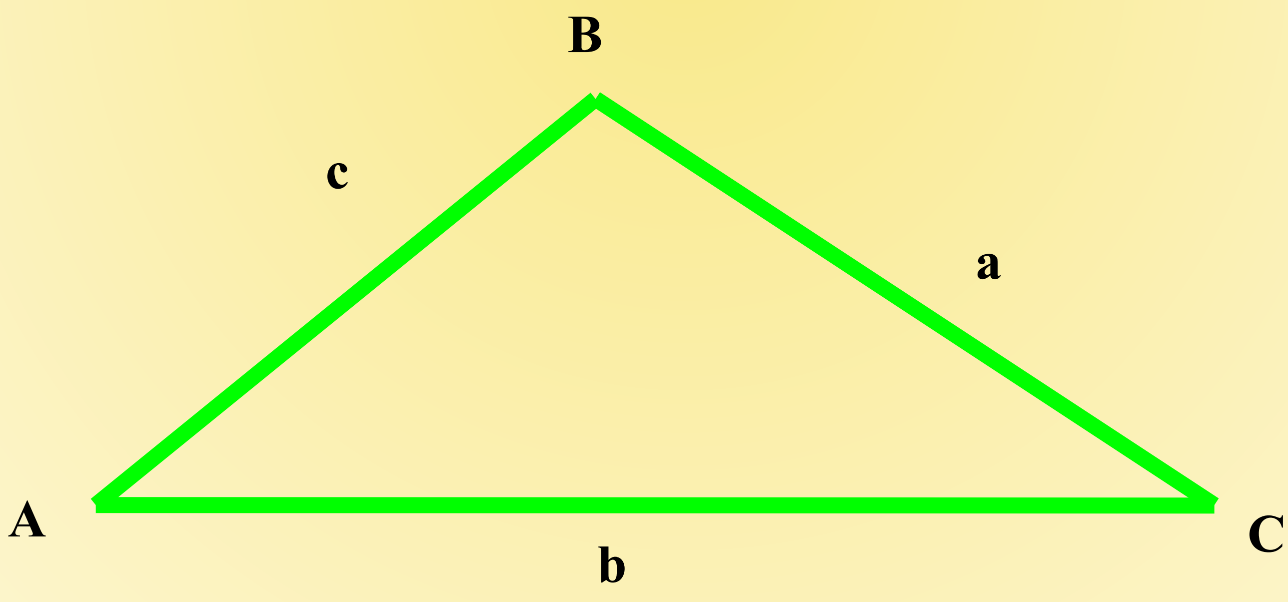


$$\boxed{S = \frac{1}{4}\sqrt{4ab - (a + b - c)^2}}$$

$$\boxed{p = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}}$$

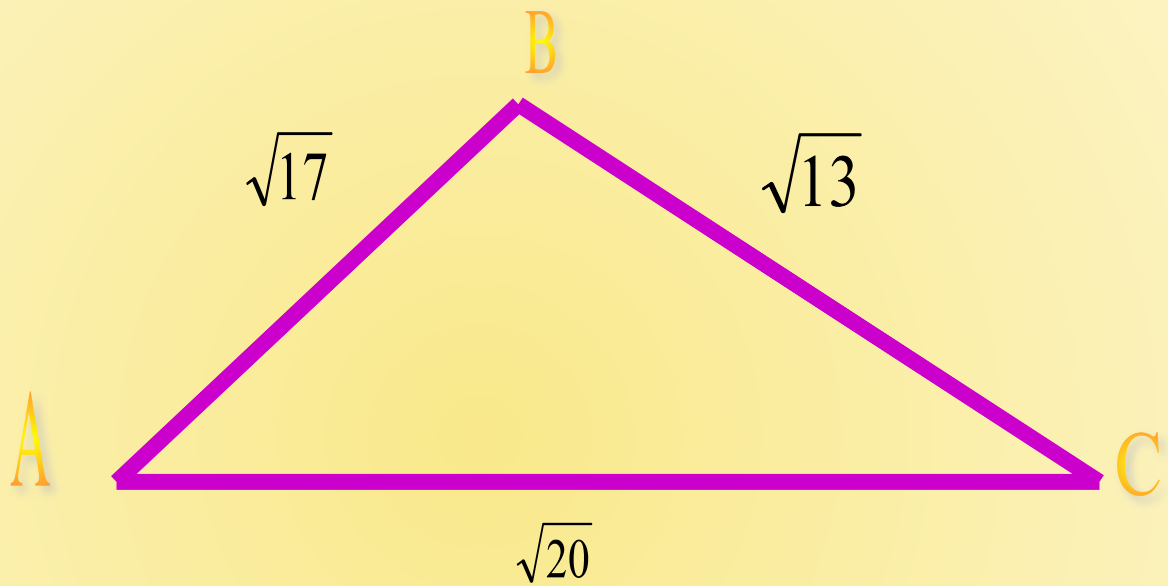
Итак, мы получили II формулу Герона. И если стороны треугольника a,b,c , то запишем ее в виде:

$$\boxed{S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}$$



Задача:

Найти площадь треугольника со сторонами $\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$



Решение:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

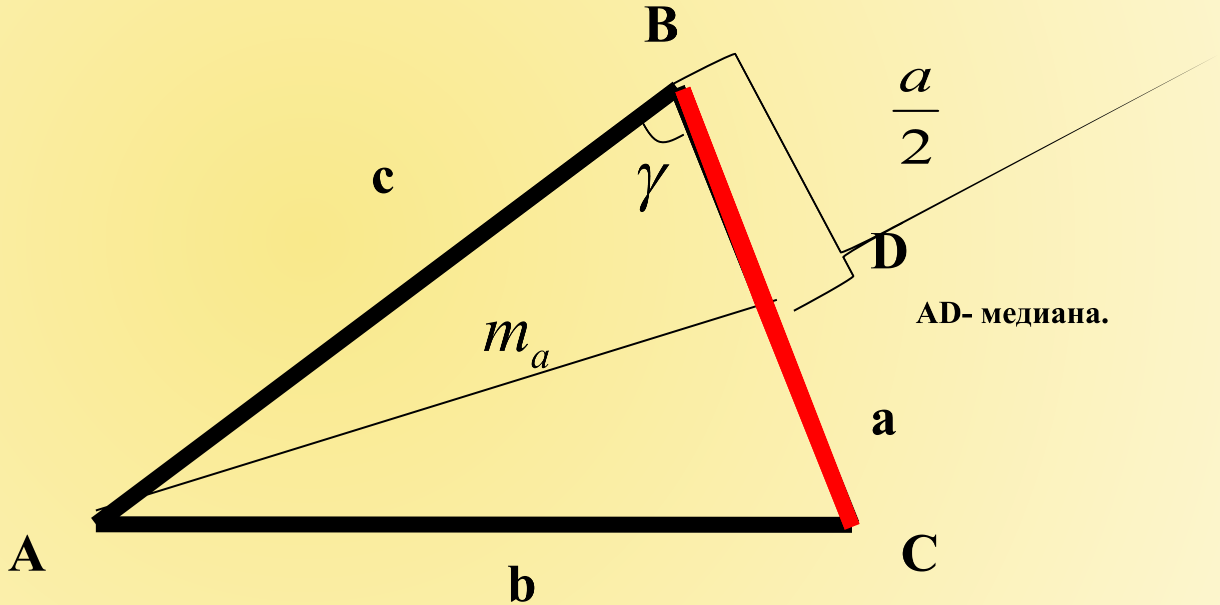
$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot 13 \cdot 20 - (13 + 20 - 17)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{1040 - 256} = \frac{1}{4}\sqrt{784} = 7$$

Формулы медиан треугольника

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

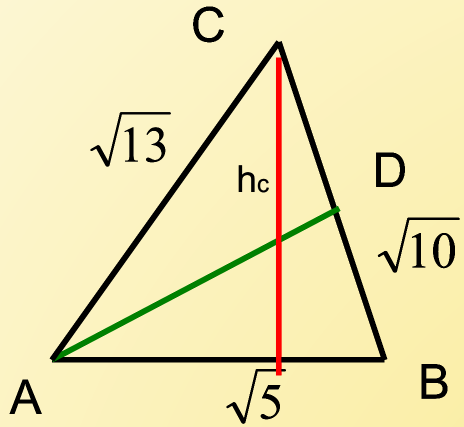
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



AD- медиана.

Ч.Т.Д.



Дано: *треугольник* ABC

$c = \sqrt{5}$

$a = \sqrt{10}$

$в = \sqrt{13}$

Найти:

1) S_{ABC}.

2) h_c.

3) cos B.

4) R(радиус описанной окружности).

5) Медиану AD

По второй формуле Герона:

$$1)\ S = \frac{1}{4}\sqrt{4\cdot(\sqrt{10})^2\cdot(\sqrt{13})^2 - ((\sqrt{10})^2 + (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{5})^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 10\cdot 13 - (10+13-5)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{520-324} = \frac{1}{4}\sqrt{196} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

2) *Проведем высоту* $CK = h_c$,

$$h_c = \frac{2S}{c};\ h_c = \frac{2\cdot 3{,}5}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$3)\quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{10+5-13}{2\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

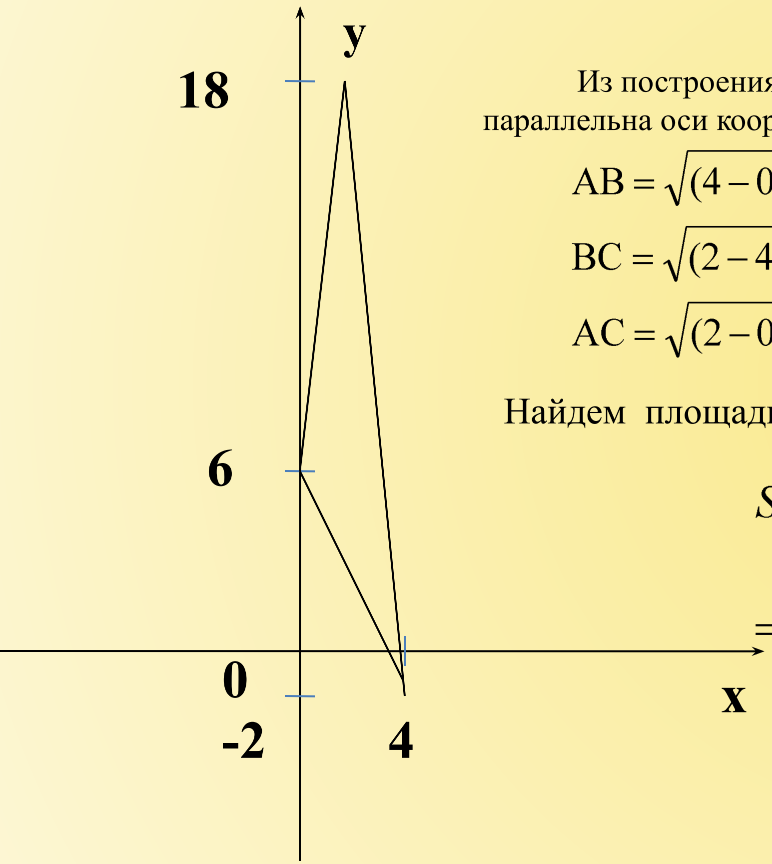
$$4)\ R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}{4\cdot 3{,}5} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

5) Проведем медиану $AD = m_a$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},\quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(\sqrt{13})^2 + 2\cdot(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26+10-10} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Площадь треугольника в системе координат

Найти площадь треугольника АВС если, А(0;6) В(4;-2) С(2;18)



Из построения видно, что треугольник АВС разносторонний, и ни одна из высот не параллельна оси координат.

$$AB=\sqrt{(4-0)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{80}$$

$$BC=\sqrt{(2-4)^2+(18+2)^2}=\sqrt{404}$$

$$AC=\sqrt{(2-0)^2+(18-6)^2}=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}$$

Найдем площадь треугольника по II формуле Герона..

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 80\cdot 404-(80+404-148)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{129280-112896}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16384}=\frac{1}{4}\cdot 128=32$$

Семь формул для нахождения площадей различных треугольников.

$$S=\frac{1}{2}ab$$

$$S=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S=\frac{1}{2}a\cdot ha$$

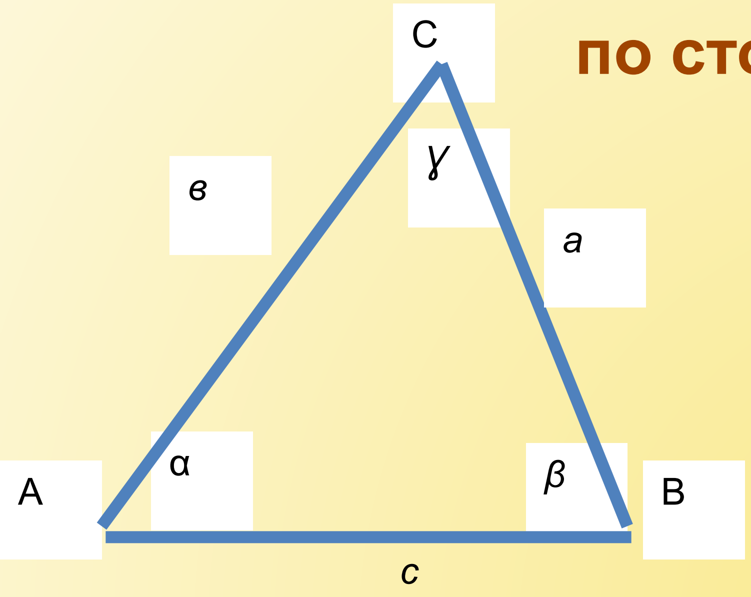
$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$$

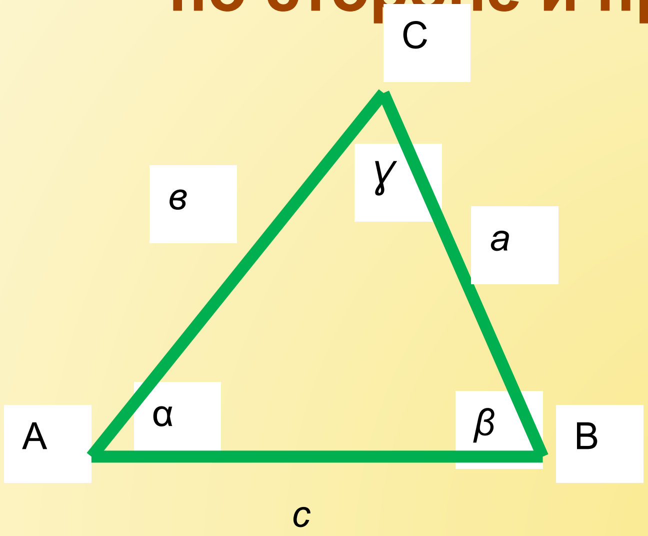
$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



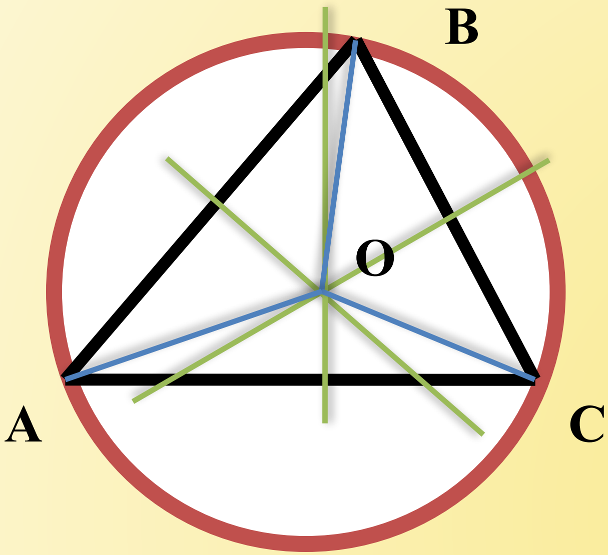
$$S = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



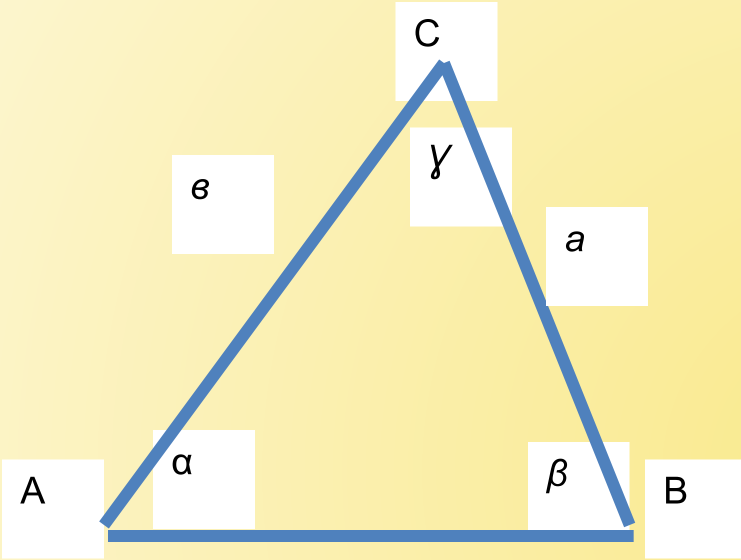
$$S = \frac{c^2}{2(ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и радиус описанной окружности.



$$S = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и одну из сторон треугольника



$$S = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

Вычисление площади треугольника через радиусы вневписанных окружностей.

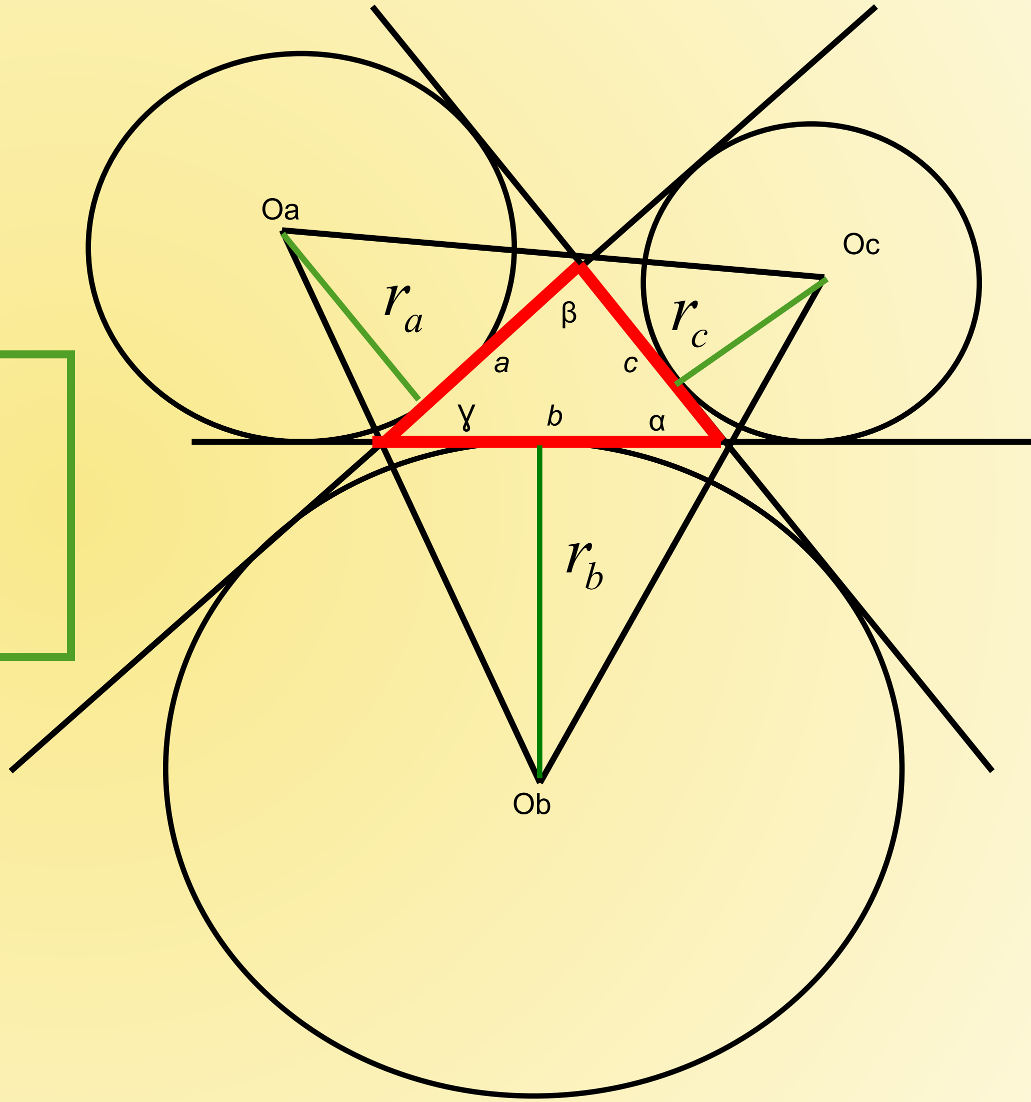
Вневписанная окружность- это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

$$S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$$

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

r_a, r_b, r_c – *радиусы вневписанных окружностей*

p – *полупериметр*



Интернет-ресурсы

- Сайт http://**www.webmath.ru**
- **Вычисление площади треугольника**
- **Формула площади треугольника, онлайн сервис для расчета площади треугольника. Нахождение площади треугольника 7-ю методами, всего за несколько секунд Вы найдете площадь треугольника.**