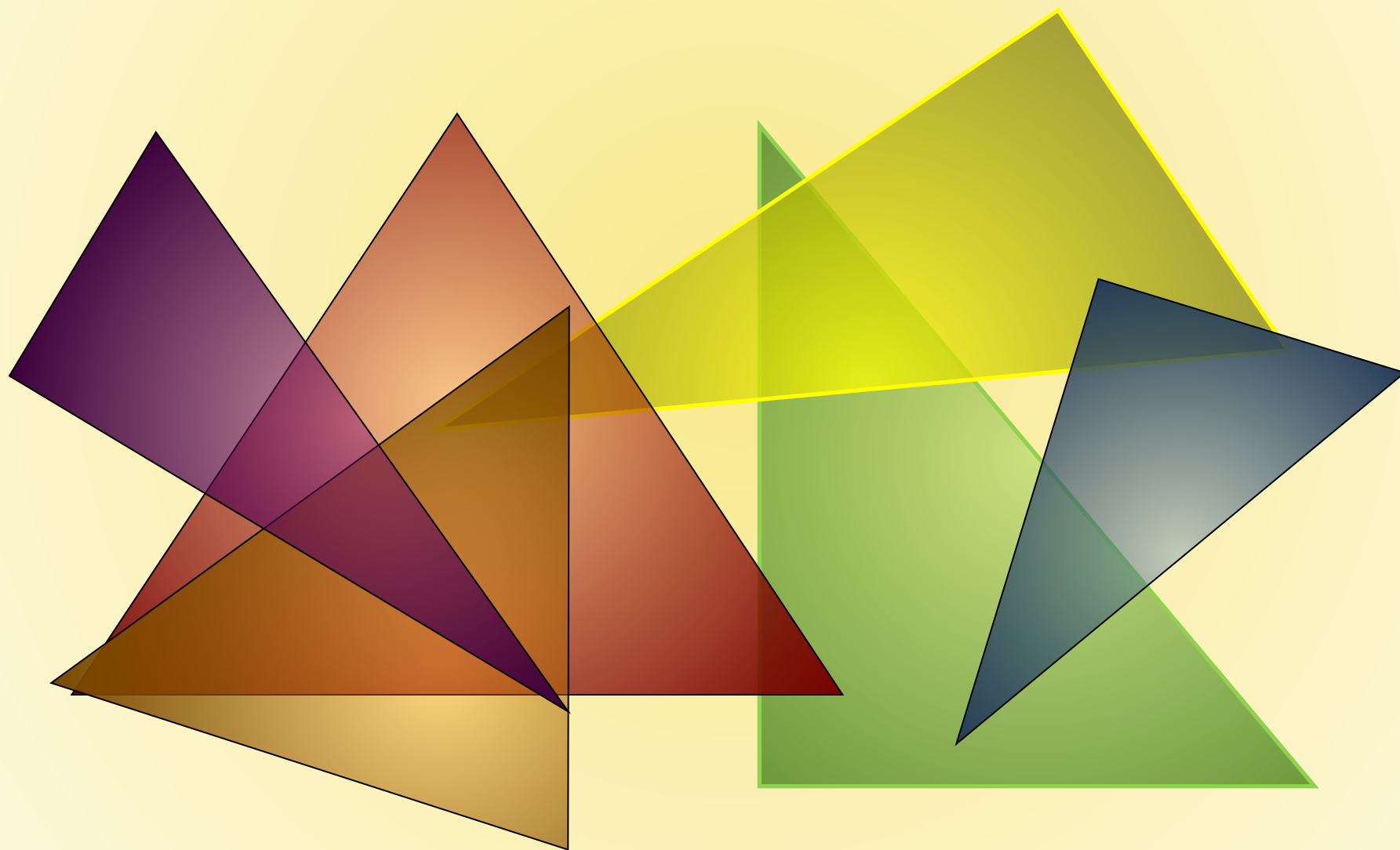
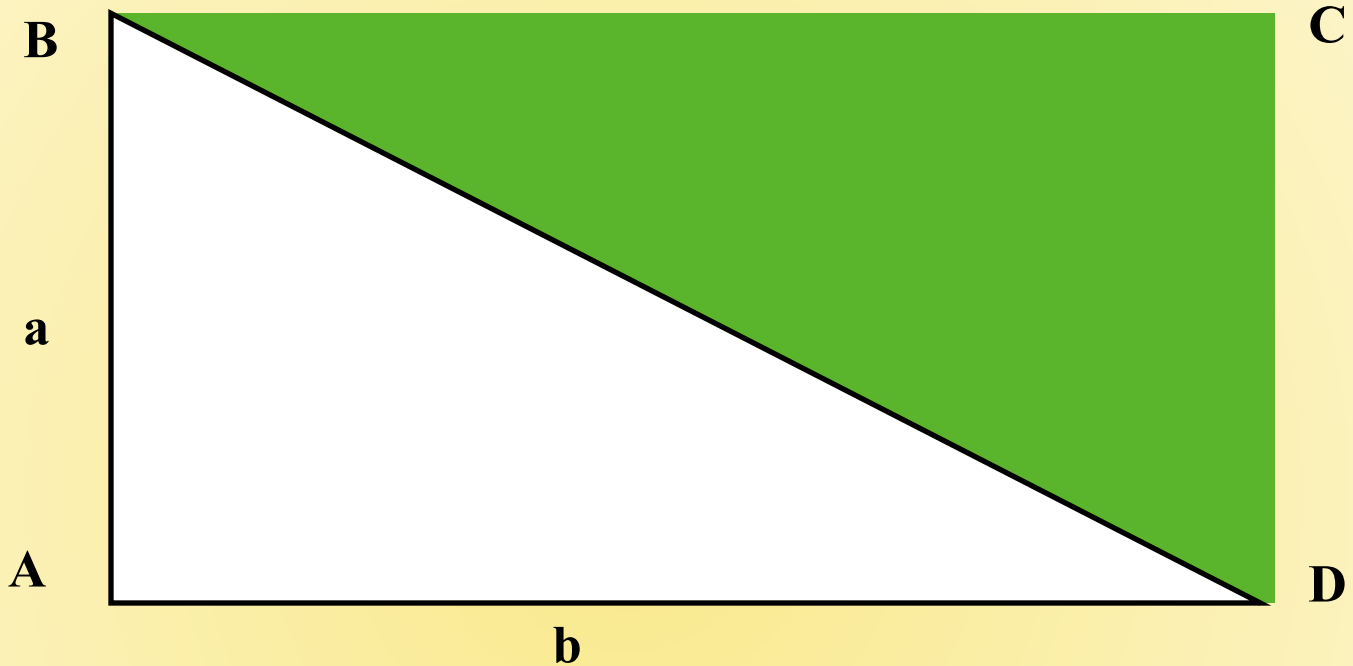


Формулы для вычисления площадей различных треугольников



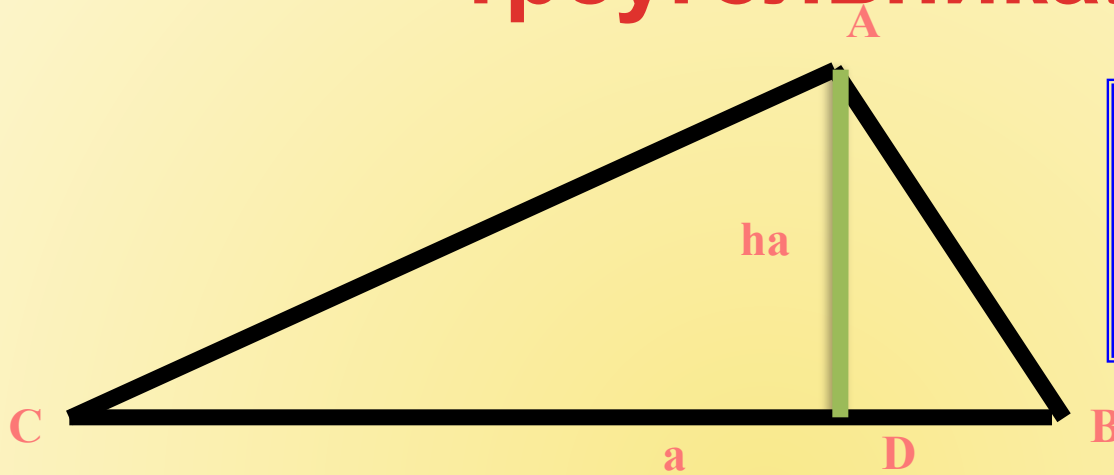
Площадь прямоугольного треугольника.



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА РАВНА
ПОЛОВИНЕ
ПРОИЗВЕДЕНИЯ КАТЕТОВ.

$$S = \frac{1}{2} ab$$

Площадь любого треугольника.

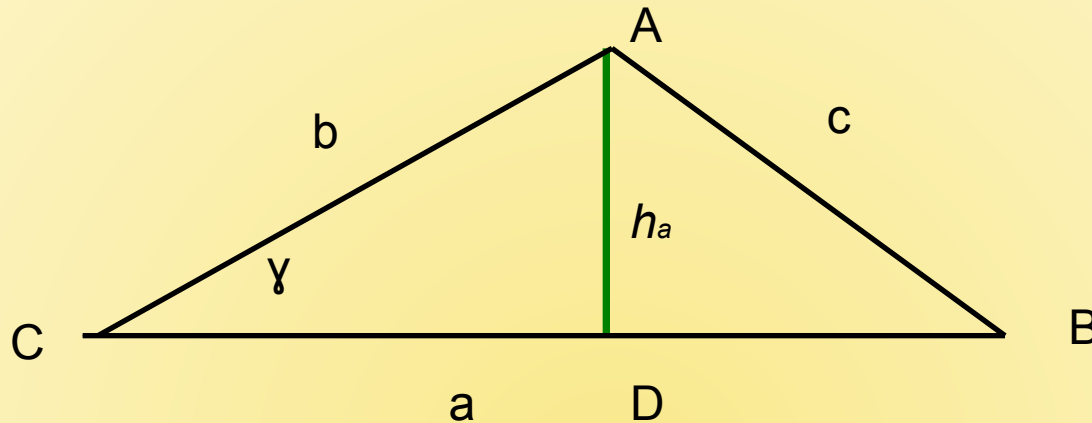


$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Площадь любого треугольника равна
половине произведения основания на высоту.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ADC} + S_{ADB} = \frac{1}{2} CD \cdot h_a + \frac{1}{2} DB \cdot h_a = \\ &= \frac{1}{2} (CD + DB) h_a = \frac{1}{2} CB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot h_a \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

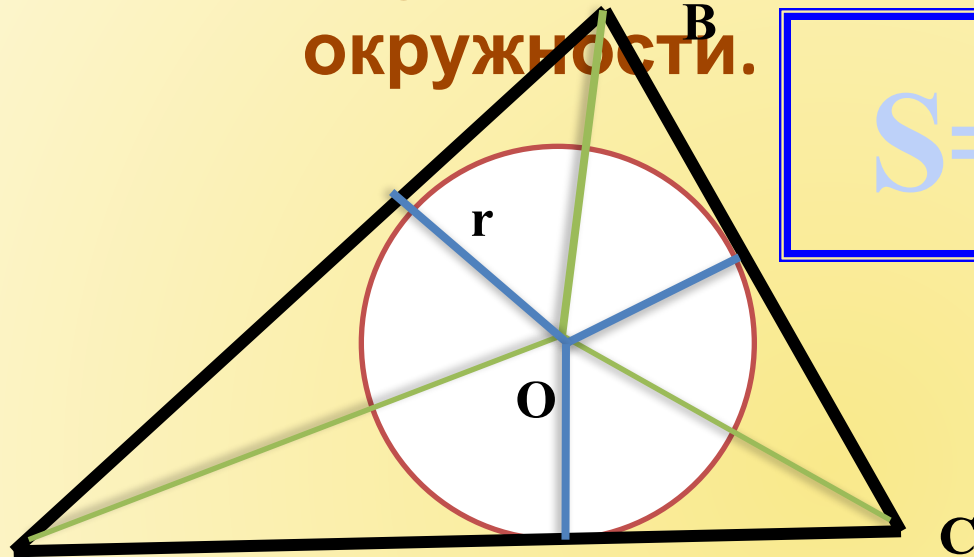


Если в треугольнике известны две стороны и угол между ними, то площадь такого треугольника можно найти, как половина произведения двух сторон на синус угла между ними.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \text{ но из прямоугольного}$$

$$\text{треугольника ADC } h_a = b \cdot \sin \gamma, S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

Площадь треугольника
через
r-радиус вписанной
окружности.



$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

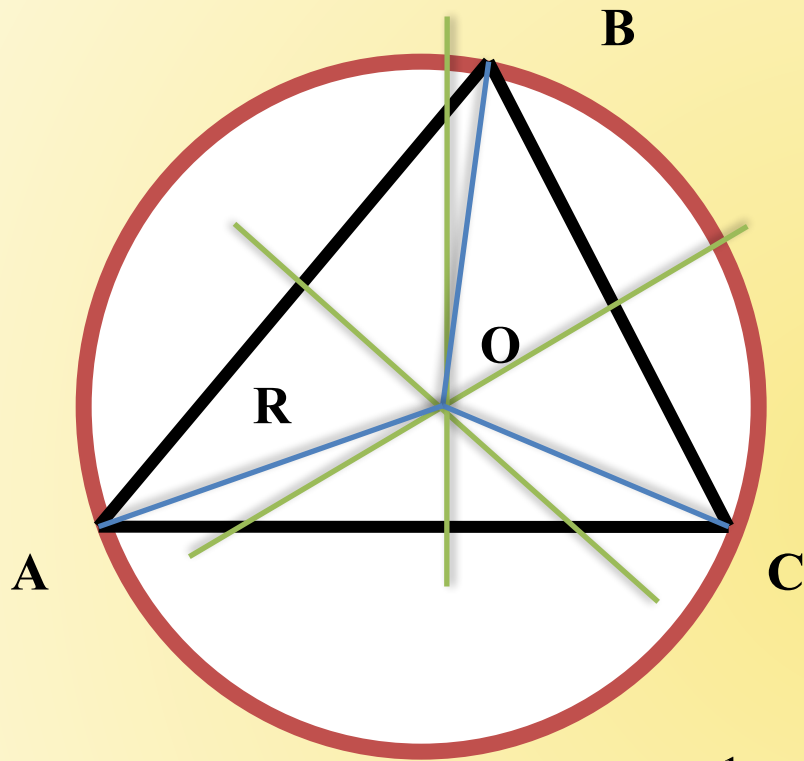
Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r +$$

$$+ \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r = \frac{1}{2} (a+b+c) \cdot r$$

$r =$ радиус вписанной окружности.

Площадь треугольника через R-радиус описанной окружности



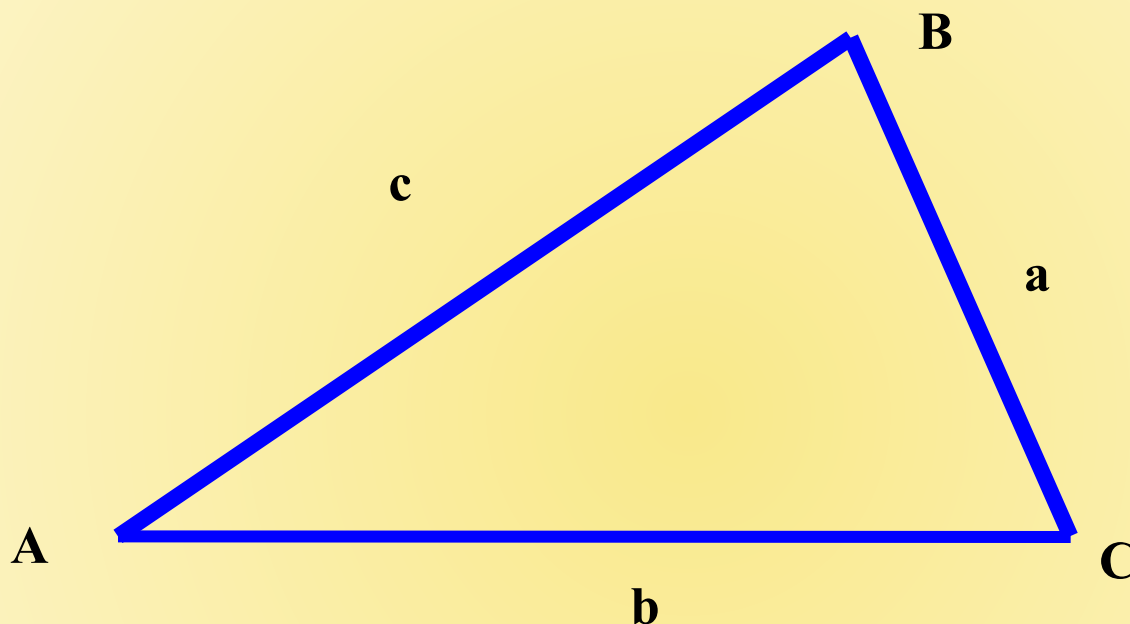
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Мы знаем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $\sin C$ найдем из соотношения

$$\frac{c}{\sin C} = 2R; \sin C = \frac{c}{2R}, S_{ABC} = \frac{1}{2} \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

I формула Герона



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

(Heronus Alexandrinus)

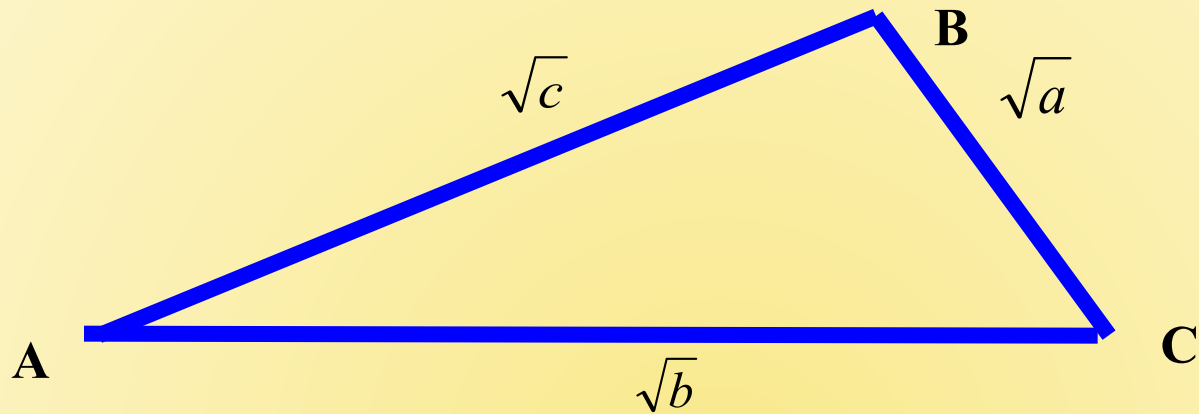


Герон Александрийский – греческий учёный, работавший в Александрии, (даты рождения и смерти неизвестны, вероятно, I – II вв. н. э.).

Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики. В "Метрике" даны правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрических фигур, например *формула Герона* для определения площади треугольника по трём сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубических корней. В основном изложение в математических трудах Герона догматично – правила часто не выводятся, а только выясняются на примерах.

Герон занимался [геометрией](#) Герон занимался геометрией, [механикой](#) Герон занимался геометрией, механикой, [гидростатикой](#) Герон занимался

II формула Герона

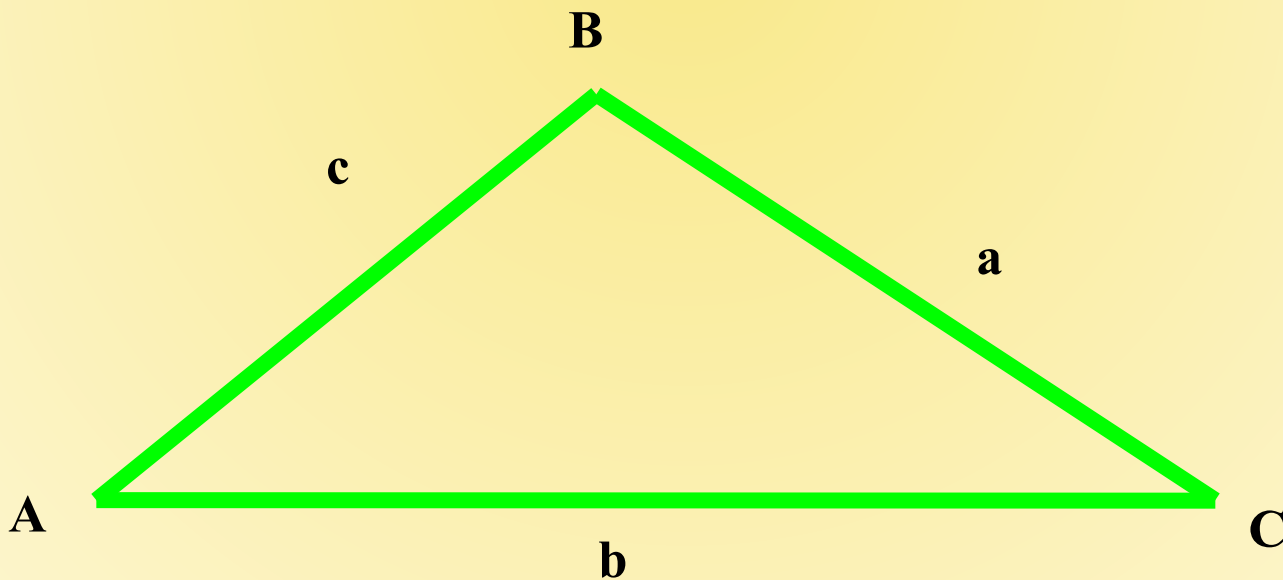


$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4ab - (a + b - c)^2}$$

$$p = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}$$

Итак, мы получили II формулу Герона. И если стороны треугольника a, b, c , то запишем ее в виде:

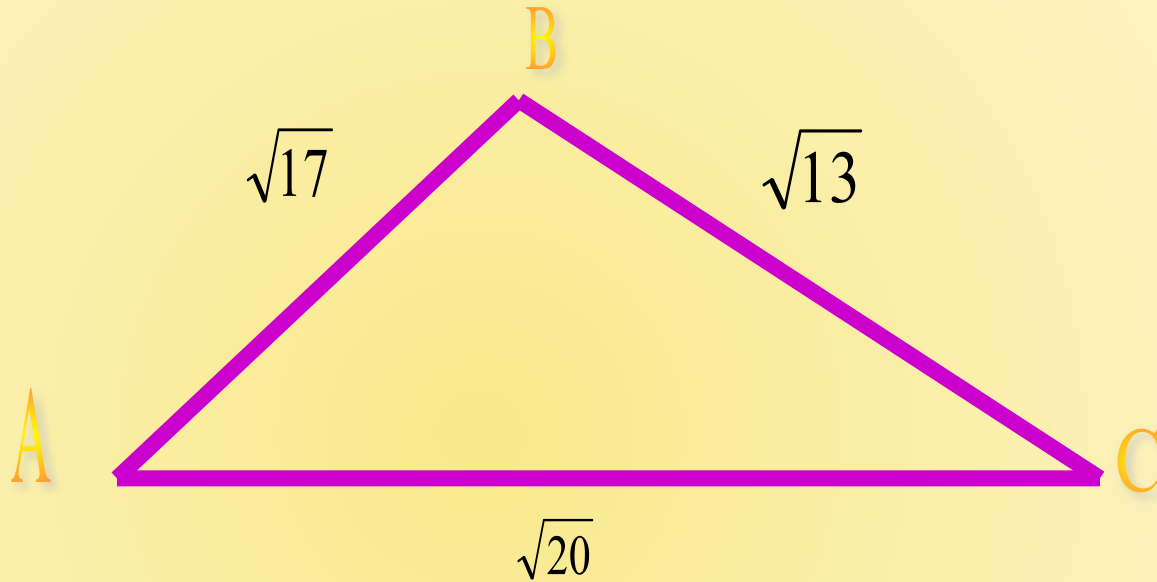
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$



Задача:

Найти площадь треугольника со сторонами

$\sqrt{17}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{13}$



Решение:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

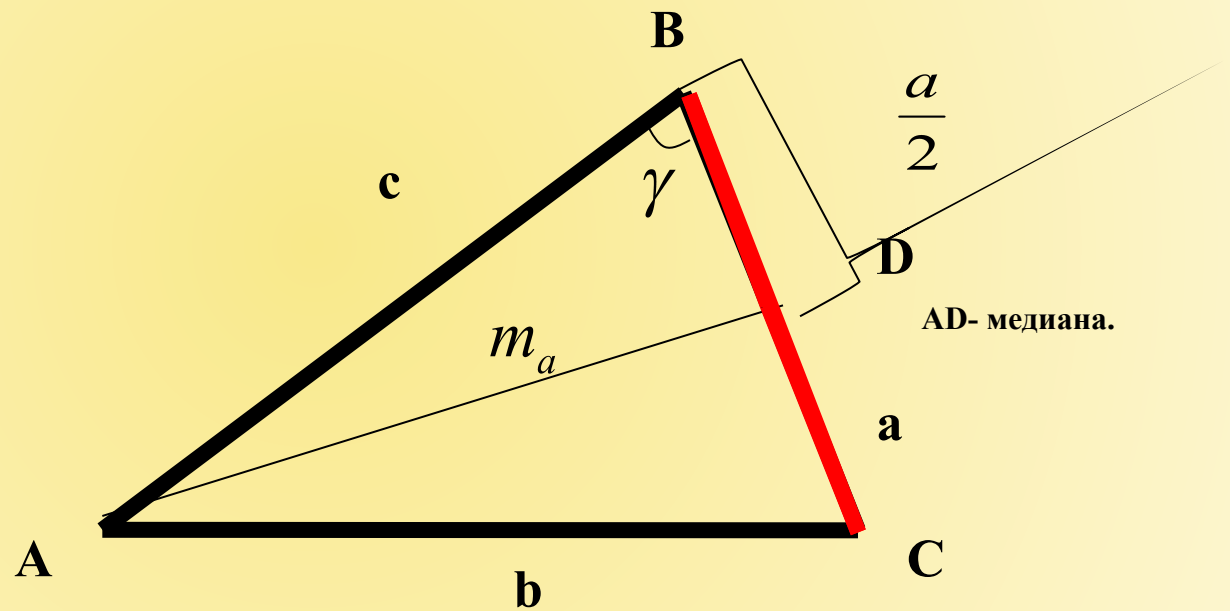
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 13 \cdot 20 - (13 + 20 - 17)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1040 - 256} = \frac{1}{4} \sqrt{784} = 7$$

Формулы медиан треугольника

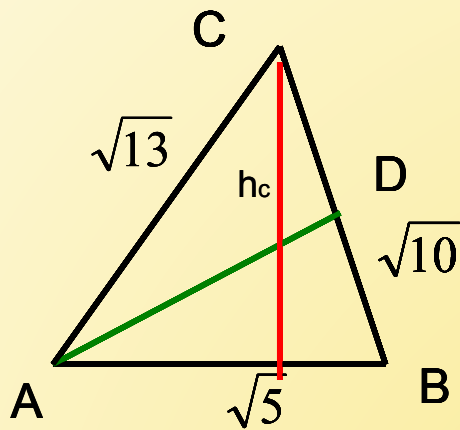
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



Ч.Т.Д.



Дано : треугольник ABC

$$c = \sqrt{5}$$

$$a = \sqrt{10}$$

$$b = \sqrt{13}$$

Найти :

1) S_{ABC} .

2) h_c .

3) $\cos B$.

4) R (радиус описанной окружности).

5) Медиану AD

По второй формуле Герона:

$$1) S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot (\sqrt{10})^2 \cdot (\sqrt{13})^2 - ((\sqrt{10})^2 + (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{5})^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 13 - (10 + 13 - 5)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{520 - 324} = \frac{1}{4} \sqrt{196} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

2) Проведем высоту $CK = h_c$,

$$h_c = \frac{2S}{c}; h_c = \frac{2 \cdot 3,5}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$3) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10 + 5 - 13}{2 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

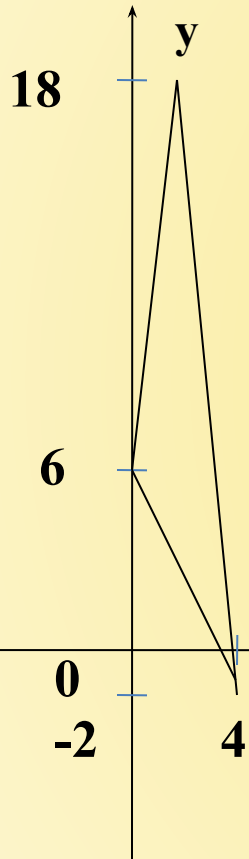
$$4) R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}{4 \cdot 3,5} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

5) Проведем медиану $AD = m_a$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot (\sqrt{13})^2 + 2 \cdot (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{26 + 10 - 10} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Площадь треугольника в системе координат

Найти площадь треугольника ABC если, A(0;6) B(4;-2) C(2;18)



Из построения видно, что треугольник ABC разносторонний, и ни одна из высот не параллельна оси координат.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (18+2)^2} = \sqrt{404}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (18-6)^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148}$$

Найдем площадь треугольника по II формуле Герона..

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 80 \cdot 404 - (80 + 404 - 148)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{129280 - 112896} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{16384} = \frac{1}{4} \cdot 128 = 32$$

**Семь формул для нахождения
площадей различных треугольников.**

$$S = \frac{1}{2} ab$$

$$S = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot ha$$

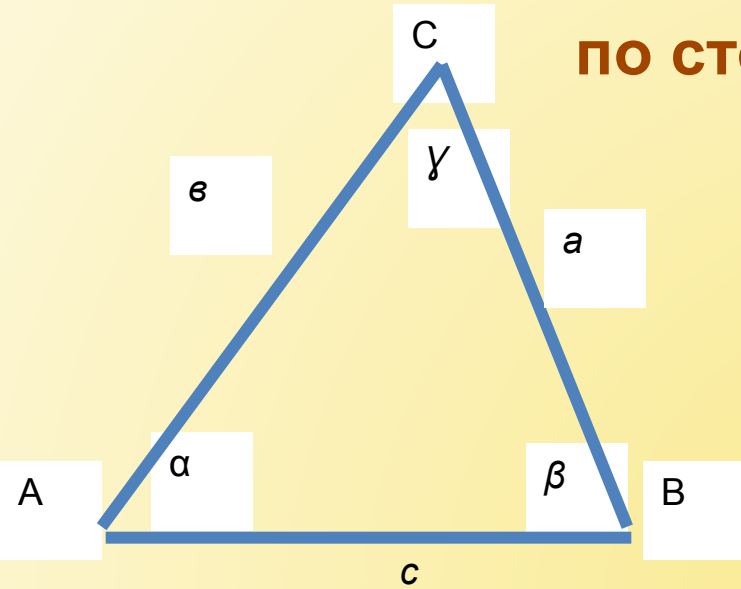
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

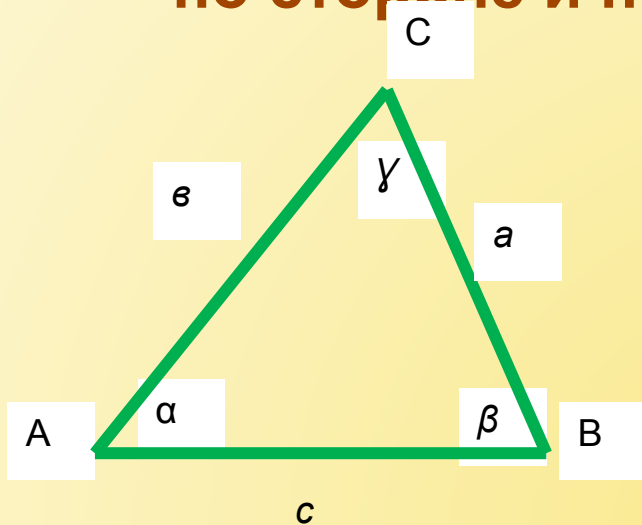
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



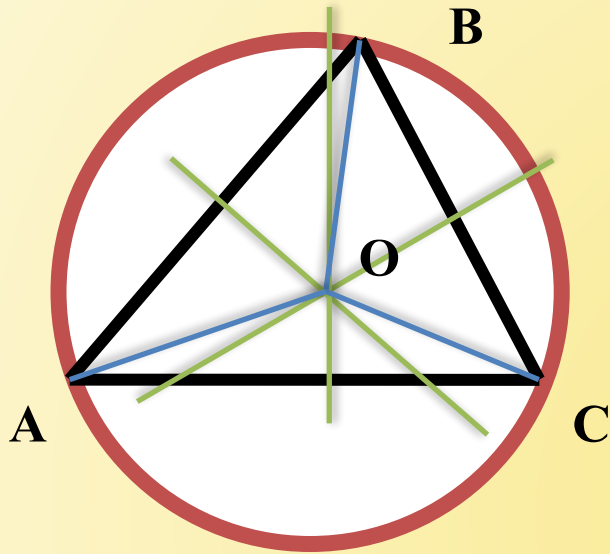
$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)}$$

Вычисление площади треугольника по стороне и прилежащим к ней углам.



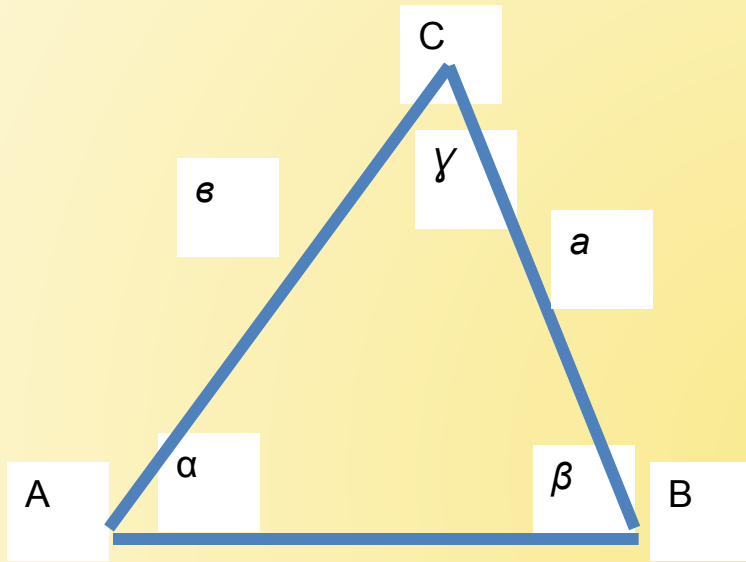
$$S = \frac{c^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}.$$

Вычисление площади треугольника
через все углы и радиус описанной окружности.



$$S = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Вычисление площади треугольника через все углы и одну из сторон треугольника



$$S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

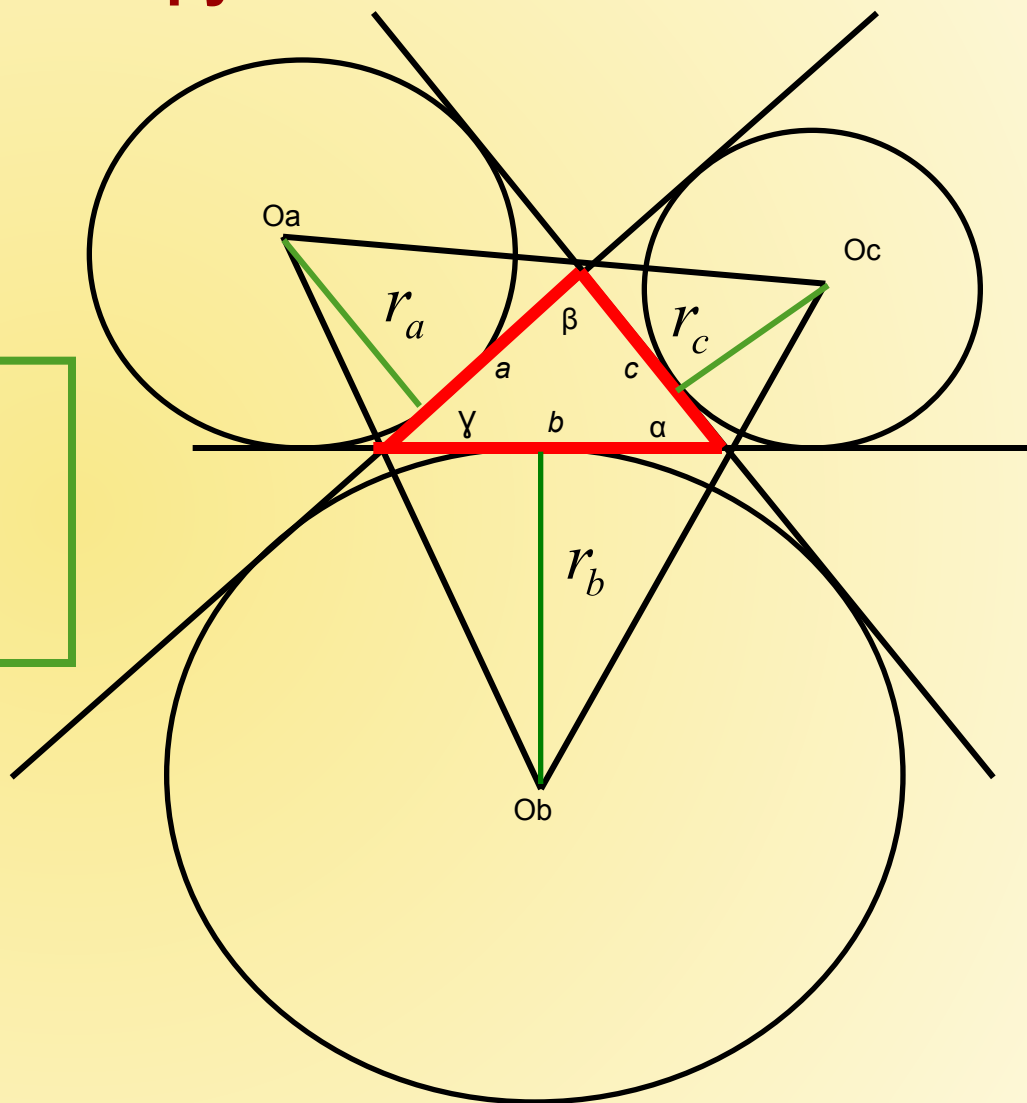
Вычисление площади треугольника через радиусы вневписанных окружностей.

Вневписанная окружность- это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон.

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c)$$

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей
 p – полупериметр



Интернет-ресурсы

- Сайт <http://www.webmath.ru>
- **Вычисление площади треугольника**
- **Формула площади треугольника, онлайн сервис для расчета площади треугольника. Нахождение площади треугольника 7-ю методами, всего за несколько секунд Вы найдете площадь треугольника.**