Предел последовательности

- ***Что такое числовая последовательность?***
- ***Какие бывают виды числовых последовательностей?***
- ***Как задаётся числовая последовательность?***
- ***Что такое предел числовой последовательности?***
- ***Как находить предел числовой последовательности?***

Цели:

Узнать	Научиться

Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13; …

В порядке возрастания положительные нечетные числа

10; 19; 37; 73; 145; …

В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

6; 8; 16; 18; 36; …

В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

Увеличение на 3

Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; …

5; 10; 15; 20; 25; …

Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

Что такое числовая последовательность?

- Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят,
  что задана числовая последовательность.

Числовая последовательность – это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции – совокупность чисел x_n , $n \in N$, называют множеством значений последовательности.

Способы задания последовательности

Словесный

Аналитический

Рекуррентный

Рекуррентный (от лат. слова ***recurrens*** – «возвращающийся»)

Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

- ***Пример 1. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...***
- ***Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...***
- ***Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...***

Аналитический способ.

- ***с помощью формулы.***
- ***Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$;***
- ***2, 4, 6, 8, …, 2n,… .***
- ***Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;***
- ***1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...***
- ***Пример 3. Последовательность $y = 2n$;***
- ***2, 22, 23, 24, ..., 2n, ...***

Рекуррентный способ.

- **Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.**

- **Пример 1.** $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$, где a и d – заданные числа. Пусть $a_1=5$, $d=0{,}7$, тогда последовательность будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .

- **Пример 2.** $b_1=b$, $b_{n+1}=b_n q$, где b и q – заданные числа. Пусть $b_1=23$, $q=½$, тогда последовательность будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .

Предел числовой последовательности

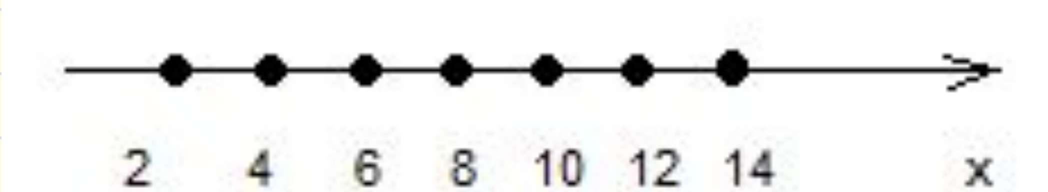
Рассмотрим две числовые последовательности:

(x_n): 2, 4, 6, 8, 10, …, $\boldsymbol{2n}$,…;

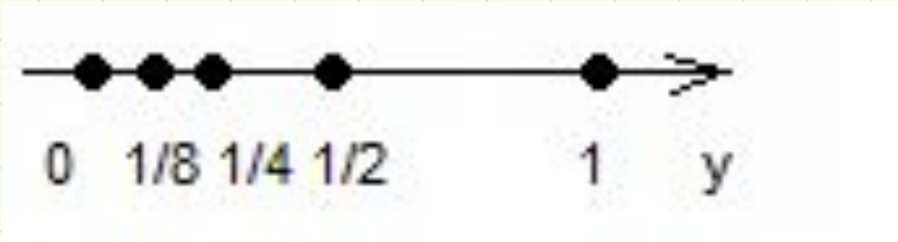
(y_n): 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, …, $\frac{1}{2^n}$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание как ведут себя члены последовательности.



x_n



y_n

Замечаем, что члены последовательности y_n как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности x_n таковой точки не наблюдается.

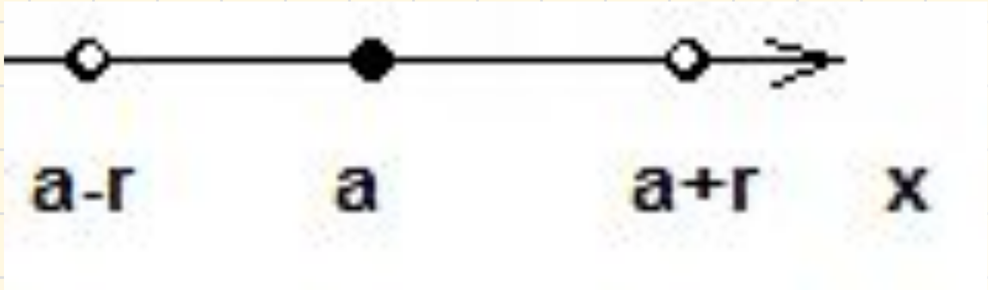
Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее…

Определение 1.

Пусть a - точка прямой, а r положительное число. Интервал $(a-r,\ a+r)$ называют окрестностью точки a,

а число r радиусом окрестности.

Геометрически это выглядит так:



Например

(-0.1, 0.5) – окрестность точки 0.2, радиус окрестности равен 0. 3.

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали «*пределом последовательности*».

Число b называется пределом последовательности $\{y_n\}$ если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут: $y_n \to b$

Читают: y_n стремится к b.

Либо пишут: $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Читают: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим последовательность:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ – *гармонический ряд*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$$

Если $m\in N$, $k\in R$, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0}$$

Если $|q|<1$, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}q^n=0}$$

Если $|q|>1$, то последовательность $y_n=q^n$ расходится

Свойства пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c}$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc}$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb}$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}3=0-0+3=3$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$

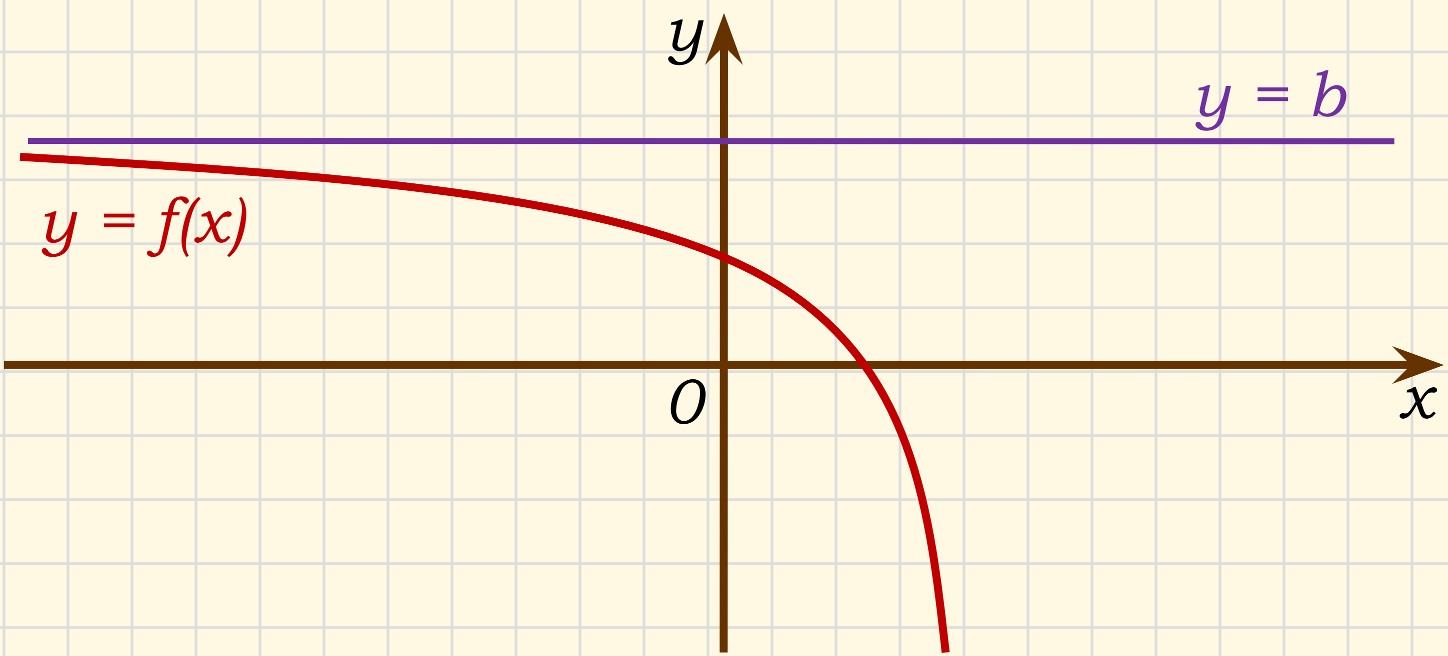
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=$

$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$

Горизонтальная асимптота графика функции

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} f(n) = b}$$

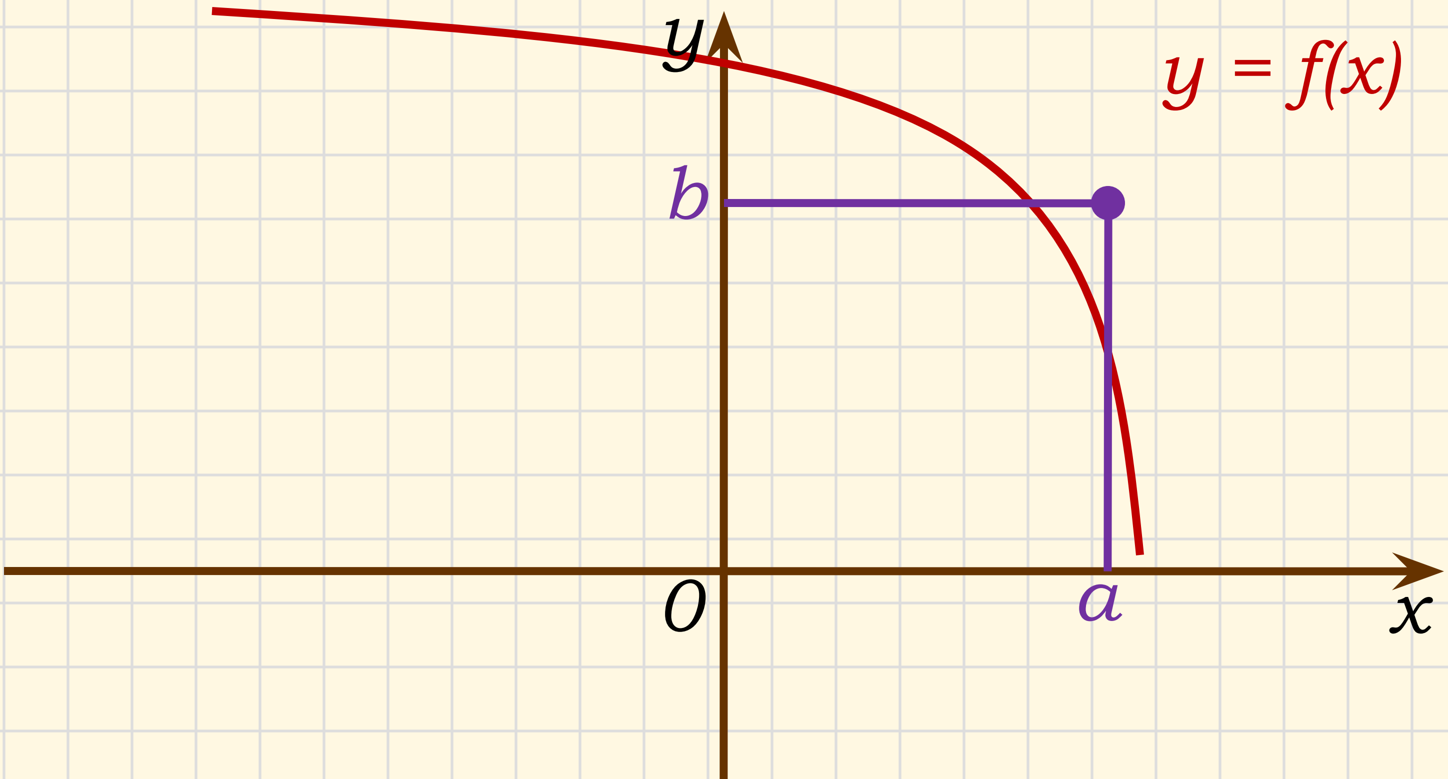
Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in N$



Предел функции в точке

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется условие

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{x \to 1}\left(x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2)\ \lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3)\ \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} =$$

$$= \frac{-3 - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -1{,}5$$

Понятие непрерывности функции

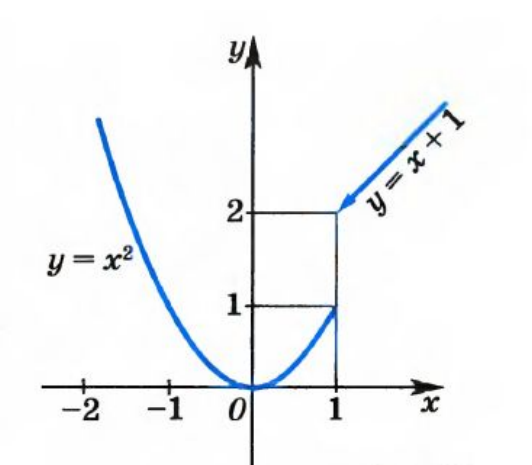


Рис. 36

На рисунке изображен график функции, состоящий из двух «кусков». Каждый из них может быть нарисован без отрыва от бумаги. Однако эти «куски» не соединены непрерывно в точке $x = 1$.

Поэтому все значения x, кроме $x = 1$, называют точками непрерывности функции $y = f(x)$, а точку $x = 1$ – точкой разрыва этой функции.

Вычислить:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 - x + x^3}{2 + 2x - x^2}$

2) $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+4x+7}{6x^2-x+5}$

4) $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$