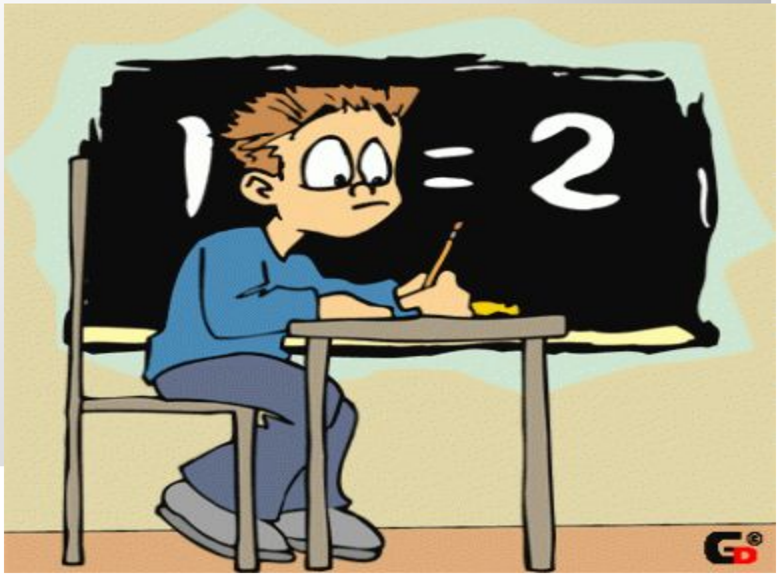
Линейные неравенства с параметром

Определение:

Неравенства вида $ax>b$, $ax<b$, $ax\geq b$, $ax\leq b$, где a и b – действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называются ***линейными неравенствами с параметром***.



Пример 1:

(m-1)x<5m

Решение:

m=1 – контрольное значение $0 \cdot x < 5 \;\; \forall x \in R$

$$m > 1 \qquad x < \frac{5m}{m-1}$$

$$m < 1 \qquad x > \frac{5m}{m-1}$$

Пример 2:

Решить неравенство при всех значениях параметра *a:*

a(3x-5)<6+ax

Решение:

Приведем к линейному виду:

3ax-5a<6+ax

2ax<6+5a

a=0 – контрольное значение

$$0\cdot(3x-5)<6\ \ \forall x\in R$$

$$a>0\quad x<\frac{6+5a}{2a}$$

$$a<0\quad x>\frac{6+5a}{2a}$$

Пример 3:

Чему равно значение переменной при различных значениях параметра:

$$b^2x - x + 1 > b$$

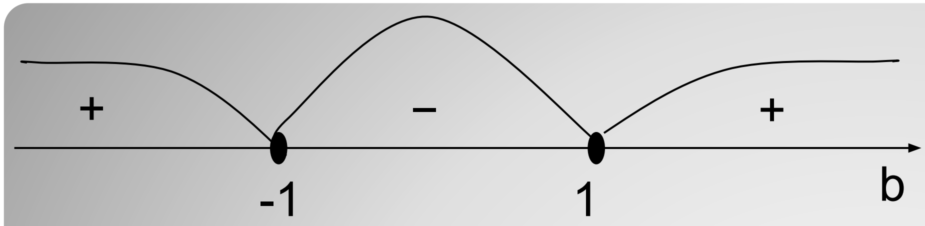
Решение:

Приведем к линейному виду:

$$b^2x - x > b - 1$$

$$x(b^2 - 1) > b - 1$$

$b = \pm 1 -$ *контрольные значения*



$$\text{если } b \in (-\infty;-1),\ \text{то } b^2 - 1 > 0 \qquad x > \frac{1}{b+1}$$

$$\text{если } b \in (-1;1),\ \text{то } b^2 - 1 < 0 \qquad x < \frac{1}{b+1}$$

$$\text{если } b \in (1;+\infty),\ \text{то } b^2 - 1 > 0 \qquad x > \frac{1}{b+1}$$

$$\text{если } b = -1,\ \text{то } 0 \cdot x > -2,\ x \in R$$

$$\text{если } b = 1,\ \text{то } 0 \cdot x > 0,\ x \in \varnothing$$

Пример 4:

Найти все значения переменной относительно параметра a: $\frac{3ax+4}{3a+9} < \frac{x}{a+3} + \frac{3a-5}{3a-9}$

Решение:

$a = \pm 3$ – *контрольные значения*

если $a = \pm 3$ *неравенство не имеет смысла*

Приведем к линейному виду $ax=b$:

$$\frac{3ax+4}{3(a+3)} - \frac{x}{a+3} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

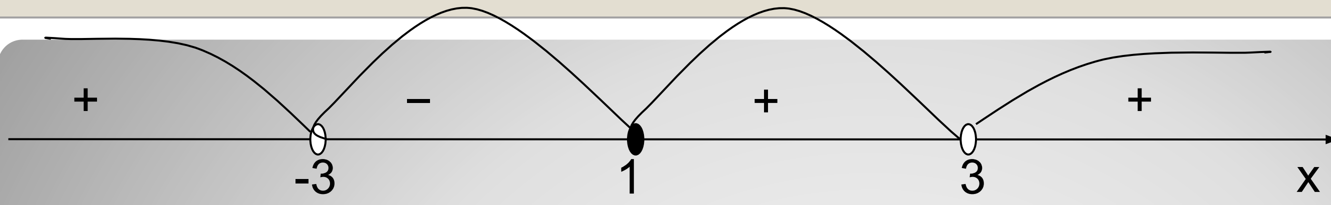
$$\frac{3ax+4-3x}{3(a+3)} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

$$\frac{3ax-3x}{3(a+3)} + \frac{4}{3(a+3)} < \frac{3a-5}{3(a-3)}$$

$$\frac{ax-x}{a+3} < \frac{(3a-5)(a+3)-4(a-3)}{3(a-3)(a+3)}$$

$$\frac{x(a-1)}{a+3} < \frac{3(a^2-1)}{3(a-3)(a+3)}$$

$a = 1$ – *контрольное значение*



$$\text{если } a\in(-\infty;-3),\ \text{то } \frac{a-1}{a+3}>0 \qquad x>\frac{a+1}{a-3}$$

$$\text{если } a=\pm3,\ \text{то } x\in\varnothing$$

$$\text{если } a\in(-3;1),\ \text{то } \frac{a-1}{a+3}<0 \qquad x>\frac{a+1}{a-3}$$

$$\text{если } a=1,\ \text{то } 0\cdot x<0,\ x\in\varnothing$$

$$\text{если } a\in(1;3),\ \text{то } \frac{a-1}{a+3}>0 \qquad x<\frac{a+1}{a-3}$$

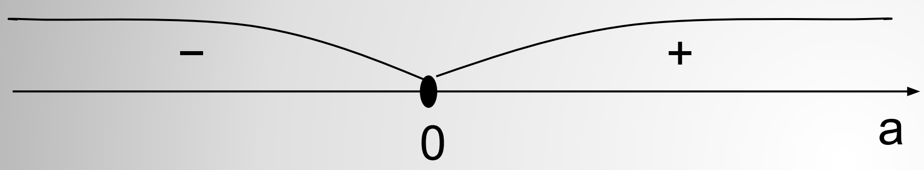
$$\text{если } a\in(3;+\infty),\ \text{то } \frac{a-1}{a+3}>0 \qquad x<\frac{a+1}{a-3}$$

Пример 5:

Решить неравенства: $a|x| > 2$

Решение:

$a = 0 - \textit{контрольное значение}$



$$\textit{если } a < 0, \textit{ то } |x| < \frac{2}{a} \ (\textit{модуль} < \textit{отрицательного числа}); \ x \in \varnothing$$

$$\textit{если } a = 0, \textit{ то } 0 \cdot |x| > 2; \ x \in \varnothing$$

$$\textit{если } a > 0, \textit{ то } |x| < \frac{2}{a} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{2}{a} \\ x < -\dfrac{2}{a} \end{array} \right.$$

Пример 6:

При каких значениях k неравенство

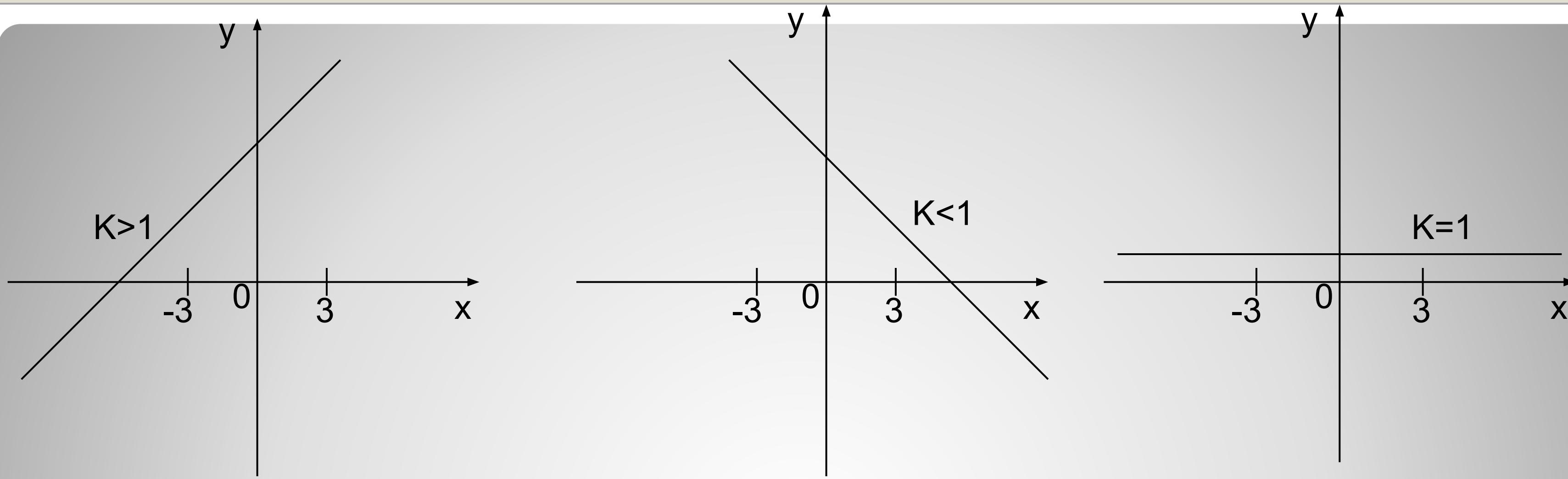
$$(k-1)x+2k+1>0 \quad (1)$$

верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $|x|\leq 3$?

Решение:

Введем в рассмотрение функцию $f(x)=(k-1)x+2k+1$

Она является линейной при любом действительном значении k, т.е. при любом действительном значении k графиком ее служит прямая.



Для выполнения неравенства (1) на всем отрезке [-3;3] достаточно выполнения условия

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases}$$

$$f(-3) = -3(k-1) + 2k + 1 = 4 - k$$

$$f(3) = 3(k-1) + 2k + 1 = 5k - 2$$

$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \quad \textit{при} \quad \begin{cases} 4 - k > 0 \\ 5k - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0{,}4 < k < 4$$