

Контрольная работа.
Вариант 10.
№14. Решение интеграла.

Выполнила:
студентка группы ФМ-15
Причалова Алена.

Решить интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t}$

1. Для начала вынесем знак «-» из подынтегрального выражения:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{dt}{\sqrt{7} \sin t - 4} \right) = - \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7} \sin t - 4}$$

Используем подстановку $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Преобразование в контурный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} F(z) dz.$$

Применение формулы Эйлера:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (1 - e^{-it})$$

Обратная замена:

$$e^{it} = z$$


$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{1}{z} \right)$$

□ Продифференцируем равенство $z = e^{it}$:

$$dz = d(e^{it})' dt = ie^{it} dt$$

$$dz = iz dt$$


$$dt = \frac{dz}{iz}$$

2. Перейдем к контурному интегралу:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t - 4} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{\sqrt{7}}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) - 4} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(\frac{\sqrt{7}}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) - 4\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \frac{\sqrt{7}}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) - 4iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\sqrt{7}}{2}(z^2 - 1) - 4iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{\sqrt{7}(z^2 - 1) - 8iz}$$

3. Найдем особые точки:

$$\sqrt{7}(z^2 - 1) - 8iz = 0$$

$$\sqrt{7}z^2 - 8iz - \sqrt{7} = 0$$

$$D = (-8i)^2 - 4 \cdot \sqrt{7} \cdot (-\sqrt{7}) = -64 + 28 = -36$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i$$

$$z_1 = \frac{8i + 6i}{2\sqrt{7}} = \frac{14i}{2\sqrt{7}} = \frac{7i}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}i$$

$$z_2 = \frac{8i - 6i}{2\sqrt{7}} = \frac{2i}{2\sqrt{7}} = \frac{i}{\sqrt{7}}$$

□ Проверим, входят ли эти точки в контур:

$$|z_1| = |\sqrt{7}i| = \sqrt{7} > 1 - \text{не входит в контур.}$$

$$|z_2| = \left| \frac{i}{\sqrt{7}} \right| = \frac{1}{\sqrt{7}} < 1 - \text{входит в контур.}$$

4. Найдем вычет функции в точке $z_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}$:

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{7} \left(z - \frac{i}{\sqrt{7}} \right) (z + \sqrt{7}i)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\frac{1}{\sqrt{7}}} f(z) &= f(z) \left(z - \frac{i}{\sqrt{7}} \right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{7}i} = \frac{2}{\sqrt{7} \left(\frac{i}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}i \right)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7} \left(\frac{i - 7i}{\sqrt{7}} \right)} = \frac{2}{i - 7i} = \frac{2}{-6i} = -\frac{1}{3i} \end{aligned}$$

По теореме о сумме вычетов:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t} = - \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7} \sin t - 4} = -I = -2\pi i \left(-\frac{1}{3i} \right) = \frac{2\pi i}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t} = \frac{2\pi}{3}$



The End 😊