Контрольная работа. Вариант 10. №14. Решение интеграла.

Выполнила:

студентка группы ФМ-15

Причалова Алена.

Решить интеграл: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}sint}$

1. Для начала вынесем знак «-» из подынтегрального выражения:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}sint}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{dt}{\sqrt{7}sint-4}\right)=-\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{7}sint-4}$$

Используем подстановку $z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi$

Преобразование в контурный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)dt=\oint_{|z|=1}F(z)dz.$$

Применение формулы Эйлера:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(1 - e^{-it})$$

Обратная замена:

$$e^{it} = z$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(1 - \frac{1}{z})$$

Продифференцируем равенство $z = e^{it}$:

$$dz = d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)' \mathrm{d}t = \mathrm{ie}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{dt}$$

$$dz = izdt$$

$$dt = \frac{dz}{iz}$$

2. Перейдем к контурному интегралу:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}sint - 4} \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{\sqrt{7}}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 4} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz(\frac{\sqrt{7}}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 4)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\frac{\sqrt{7}}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 4iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\sqrt{7}}{2}(z^2-1)-4iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{\sqrt{7}(z^2-1)-8iz}$$

3. Найдем особые точки:

$$\sqrt{7}(z^2-1)-8iz=0$$
$$\sqrt{7}z^2-8iz-\sqrt{7}=0$$

$$D=(-8i)^2-4\cdot\sqrt{7}\cdot\left(-\sqrt{7}\right)=-64+28=-36$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{-36}=6i$$

$$z_1=\frac{8i+6i}{2\sqrt{7}}=\frac{14i}{2\sqrt{7}}=\frac{7i}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}i$$

$$z_2=\frac{8i-6i}{2\sqrt{7}}=\frac{2i}{2\sqrt{7}}=\frac{i}{\sqrt{7}}$$

Проверим, входят ли эти точки в контур:

$$|z_1| = \left|\sqrt{7}i\right| = \sqrt{7} > 1 \text{ – не входит в контур.}$$

$$|z_2| = \left|\frac{i}{\sqrt{7}}\right| = \frac{1}{\sqrt{7}} < 1 \text{ – входит в контур.}$$

4. Найдем вычет функции в точке $z_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}$:

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{7}\left(z - \frac{i}{\sqrt{7}}\right)(z + \sqrt{7}i)}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{\sqrt{7}}} f(z) = \mathrm{f(z)}\left(\mathrm{z} - \frac{i}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{z + \sqrt{7}i} = \frac{2}{\sqrt{7}\left(\frac{i}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}i\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}(\frac{i - 7i}{\sqrt{7}})} = \frac{2}{i - 7i} = \frac{2}{-6i} = -\frac{1}{3i}$$

По теореме о сумме вычетов:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7}sint} = -\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}sint - 4} = -I = -2\pi i\left(-\frac{1}{3i}\right) = \frac{2\pi i}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7}sint} = \frac{2\pi}{3}$

The End ☺