

Раздел 1.

Анализ систем методами теории массового обслуживания

Тема 4. Лекция 3.

Непрерывно-стохастические модели

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2. Предельные вероятности состояний.

Вопрос 1.

**Марковские случайные процессы
с дискретными состояниями
и непрерывным временем**

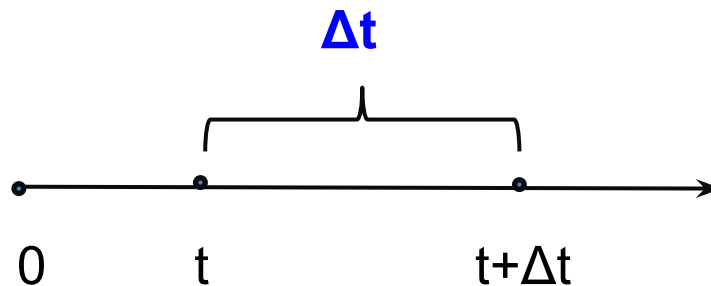
Процессы в системах с дискретными состояниями, меняющимися в случайные моменты времени, называются ***случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем.***

Рассмотрим особенности построения математических моделей данных систем.

Вместо **переходных вероятностей** P_{ij}
вводятся **плотности вероятностей перехода** λ_{ij} .

Пусть система S в момент времени t находится
в состоянии S_i .

Рассмотрим **элементарный промежуток**
времени Δt , за который система может перейти в
состояние S_j с вероятностью P_{ij} .



Плотность вероятности перехода λ_{ij}

описывается выражением:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i , за время Δt перейдет в состояние S_j .

Из (1) следует, что при малом Δt

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$$

Это выражение справедливо для стационарных процессов, когда вероятность перехода P_{ij} определяется только длиной отрезка Δt и не определяется местоположением отрезка на оси времени t .

Пусть задана модель системы **S** в виде размеченного графа состояний.

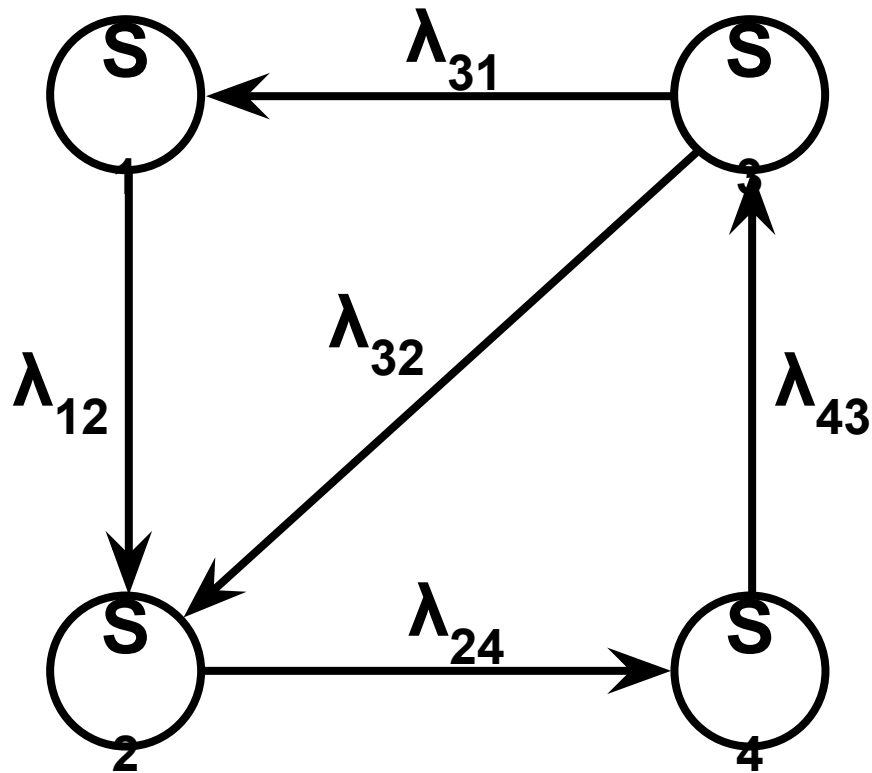


Рис.1. Граф исследуемой системы

Рассмотрим момент времени t .

Придадим t малое приращение Δt и найдем

$P_1(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1 .

Это может произойти в двух случаях (см. рис. 1):

1) в момент t система была в состоянии S_1 и за время Δt из него не вышла;

2) в момент t система была в состоянии S_3 и за время Δt перешла в S_1 .

Вероятность **первого случая** найдем как **произведение вероятности** $P_1(t)$ того, что в момент t система была в S_1 , на **условную вероятность** того, что, будучи в состоянии S_1 , система за время Δt не перейдет в S_2 :

$$P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t)$$

Вероятность **второго случая** равна **вероятности** того, что в момент **t** система была в **S₃**, умноженной на **условную вероятность** **перехода** за время **Δt** в состояние **S₁**:

$$P_3(t) \lambda_{31} \Delta t$$

Применим правило сложения вероятностей:

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t) + P_3(t)\lambda_{31}\Delta t$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $P_1(t)$ в левую и разделим обе части равенства на Δt :

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

Устремим Δt к нулю и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

Левая часть – производная функции $P_1(t)$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t) \quad (2)$$

Для вероятностей остальных состояний такие уравнения получим аналогично.

Запишем их, отбросив для краткости аргумент t у функции $P_i(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3 \\ \frac{dP_2}{dt} = -\lambda_{24}P_2 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \frac{dP_3}{dt} = -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{32}P_3 + \lambda_{43}P_4 \\ \frac{dP_4}{dt} = -\lambda_{43}P_4 + \lambda_{24}P_2 \end{array} \right. \quad (3)$$

Уравнения (3) называют ***уравнениями Колмогорова.***

Интегрирование данной системы уравнений даст нам **искомые вероятности состояний** как функции времени.

Начальные условия определяются ИСХОДНЫМ СОСТОЯНИЕМ СИСТЕМЫ.

Например, если при $t = 0$ система была в состоянии S_k , то полагают:

$$\square P_k(0) = 1;$$

$$\square P_i(0) = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Одно из дифференциальных уравнений в системе (3) может быть заменено на балансное алгебраическое уравнение:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

так как система может находиться только в одном состоянии.

Правила составления уравнений Колмогорова

1. В левой части уравнения стоит **производная вероятности состояния системы по времени.**

2. В правой части стоит **столько слагаемых, сколько стрелок связано с данным состоянием.**

3. Каждое слагаемое равно произведению плотности вероятности перехода, записанной возле стрелки, умноженной на вероятность того состояния, из которого стрелка исходит.

4. Слагаемое имеет знак «+», если стрелка направлена в состояние, и знак «-», если стрелка исходит из него.

Вопрос 2.

**Предельные вероятности
состояний системы**

Если:

1) число состояний системы конечно;

2) из каждого состояния можно перейти в любое другое,

то при $t \rightarrow \infty$ существуют **предельные (финальные) вероятности состояний (ПВС)**, которые не зависят от начальных условий.

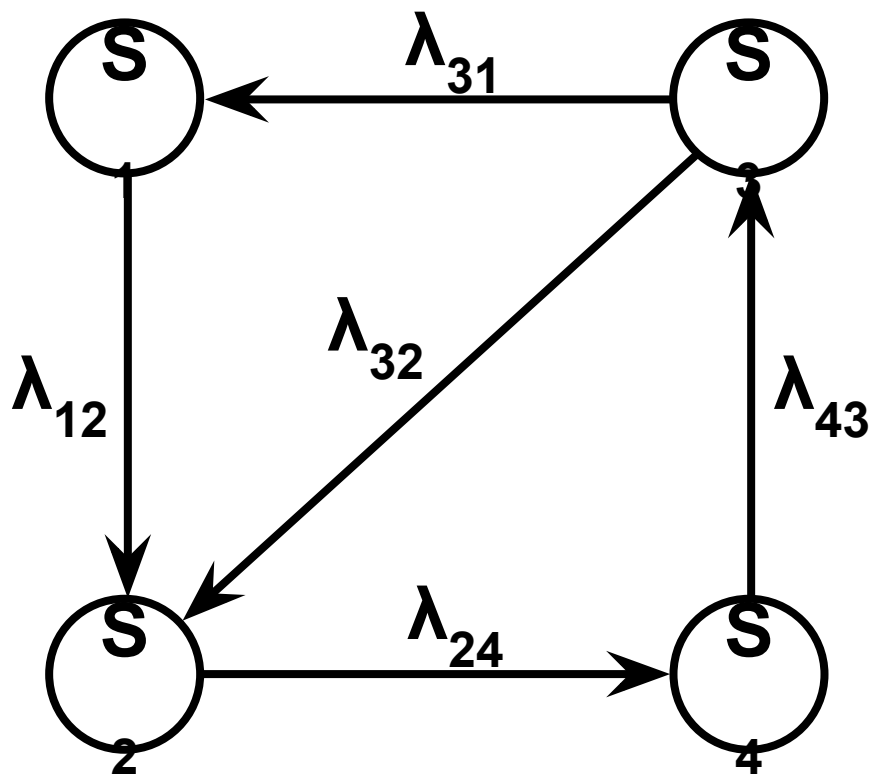
Для вычисления ПВС необходимо:

1) в системе уравнений Колмогорова положить левые части (производные вероятностей состояний) равными нулю;

2) одно из уравнений системы необходимо заменить на балансное;

3) решить полученную систему алгебраических уравнений.

Так, для графа состояний на [рис. 1](#). ПВС существуют, т. к. из каждого состояния можно попасть в любое другое.



Приравняем левые части уравнений системы (3) нулю и перенесем туда отрицательные слагаемые:

$$\begin{cases} \lambda_{12}P_1 = \lambda_{31}P_3 \\ \lambda_{24}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \lambda_{31}P_3 + \lambda_{32}P_3 = \lambda_{43}P_4 \\ \lambda_{43}P_4 = \lambda_{24}P_2 \end{cases} \quad (4)$$

Для решения системы (4) одно из ее уравнений заменим на балансное.

$$\begin{cases} \lambda_{12}P_1 = \lambda_{31}P_3 \\ \lambda_{24}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \lambda_{31}P_3 + \lambda_{32}P_3 = \lambda_{43}P_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

Решив ее, получим значения ПВС.

Физический смысл ПВС – среднее время пребывания системы в данном состоянии (в доленом отношении).

Т.О., предполагаем, что при $t \rightarrow \infty$ в системе S устанавливается предельный стационарный режим.