Раздел 1.

Анализ систем методами теории массового обслуживания

Тема 4. Лекция 3.

Непрерывно-стохастические модели

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2. Предельные вероятности состояний.

Вопрос 1.

Марковские случайные процессы
с дискретными состояниями
и непрерывным временем

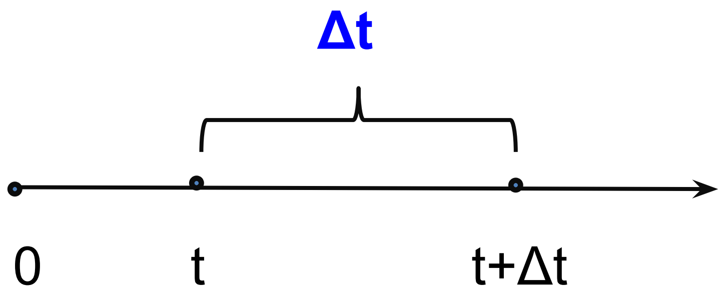
Процессы в системах **с дискретными состояниями**, меняющимися в случайные моменты времени, называются ***случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем***.

Рассмотрим особенности построения математических моделей данных систем.

Вместо **переходных вероятностей** P_{ij} вводятся плотности вероятностей перехода $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$.

Пусть система S в момент времени t находится в состоянии $\mathbf{S_i}$.

Рассмотрим **элементарный промежуток времени** Δt, за который система может перейти в состояние $\mathbf{S_j}$ с вероятностью P_{ij}.



Плотность вероятности перехода λ_{ij} описывается выражением:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

где $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет в состояние S_j.

Из (1) следует, что при малом Δt

$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$$

Это **выражение справедливо для стационарных процессов**, когда вероятность перехода P_{ij} определяется только длинной отрезка Δt и не определяется местоположением отрезка на оси времени t.

Пусть задана модель системы S в виде размеченного графа состояний.

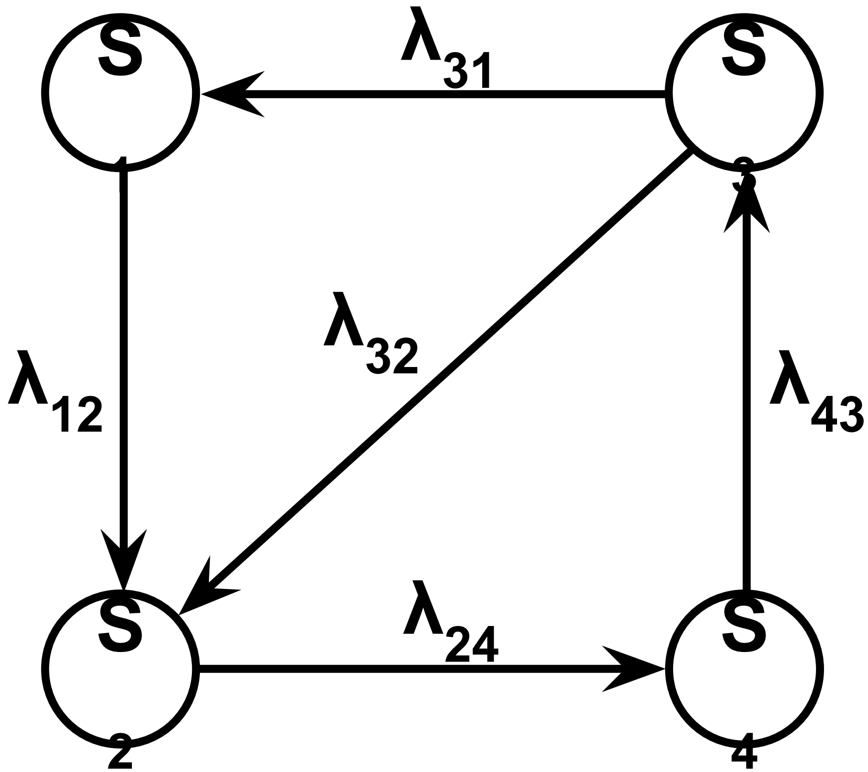


Рис.1. Граф исследуемой системы

Рассмотрим момент времени t.

Придадим t малое приращение Δt и найдем $P_1(t+\Delta t)$ – **вероятность того, что в момент времени** $t+\Delta t$ **система будет находится** в состоянии S_1.

Это может произойти в двух случаях (см. рис. 1):

1) в момент t система была в состоянии $\mathbf{S_1}$ и за время Δt <u>из него не вышла</u>;

2) в момент t система была в состоянии $\mathbf{S_3}$ и за время Δt <u>перешла в</u> $\mathbf{S_1}$.

Вероятность первого случая найдем как **произведение вероятности** $P_1(t)$ того, что в момент t система была в S_1, **на условную вероятность** того, что, будучи в состоянии S_1, система за время Δt не перейдет в S_2:

$$P_1(t)(1-\lambda_{12}\Delta t)$$

Вероятность второго случая равна **вероятности** того, что в момент t система была в S_3, умноженной **на условную вероятность перехода** за время Δt в состояние S_1:

$$P_3(t)\lambda_{31}\Delta t$$

Применим правило сложения вероятностей:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\left(1-\lambda_{12}\Delta t\right) + P_3(t)\lambda_{31}\Delta t$$

Раскроем скобки в правой части, перенесем $P_1(t)$ в левую и разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

Устремим Δt к нулю и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} P_1(t) + \lambda_{31} P_3(t)$$

Левая часть – производная функции $P_1(t)$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} P_1(t) + \lambda_{31} P_3(t) \qquad \textbf{(2)}$$

Для вероятностей остальных состояний такие уравнения получим аналогично.

Запишем их, отбросив для краткости аргумент t у функции $\mathbf{P_i(t)}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = -\lambda_{24}P_2 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \dfrac{dP_3}{dt} = -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{32}P_3 + \lambda_{43}P_4 \\ \dfrac{dP_4}{dt} = -\lambda_{43}P_4 + \lambda_{24}P_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения (3) называют ***уравнениями Колмогорова***.

Интегрирование данной системы уравнений даст нам искомые вероятности состояний как функции времени.

Начальные условия определяются исходным состоянием системы.

Например, если при $t = 0$ система была в состоянии $S_к$, то полагают:

- $P_k(0)=1$;
- $P_i(0)=0$ при $i \neq к$.

Одно из дифференциальных уравнений в системе (3) может быть заменено на балансное алгебраическое уравнение:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

так как система может находиться только в одном состоянии.

Правила составления уравнений Колмогорова

1. В левой части уравнения стоит **производная вероятности состояния системы** по времени.

2. В правой части стоит столько слагаемых, **сколько стрелок связано с данным состоянием**.

3. Каждое слагаемое равно **произведению плотности вероятности перехода**, записанной возле стрелки, **умноженной на вероятность** того **состояния**, из которого стрелка исходит.

4. Слагаемое имеет знак **«+»**, **если стрелка направлена в состояние**, и знак **«–»**, **если стрелка исходит из него.**

Вопрос 2.

Предельные вероятности состояний системы

Если:

1) **число состояний системы конечно;**

2) **из каждого состояния можно перейти в любое другое**,

то при $t \to \infty$ существуют **предельные (финальные) вероятности состояний** (ПВС), которые не зависят от начальных условий.

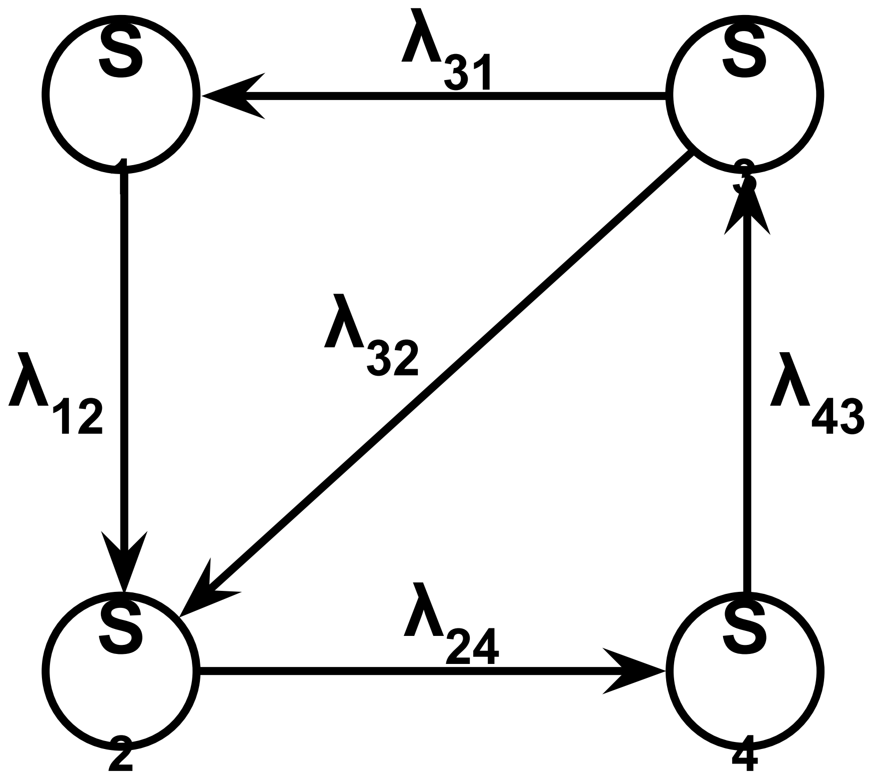
Для вычисления ПВС необходимо:

1) в системе уравнений Колмогорова положить левые части (производные вероятностей состояний) равными нулю;

2) одно из уравнений системы необходимо заменить на балансное;

3) решить полученную систему алгебраических уравнений.

Так, для графа состояний на рис. 1. ПВС существуют, т. к. из каждого состояния можно попасть в любое другое.



Приравняем левые части уравнений системы (3) нулю и перенесем туда отрицательные слагаемые:

$$\begin{cases} \lambda_{12}P_1 = \lambda_{31}P_3 \\ \lambda_{24}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \lambda_{31}P_3 + \lambda_{32}P_3 = \lambda_{43}P_4 \\ \lambda_{43}P_4 = \lambda_{24}P_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Для решения системы (4) одно из ее уравнений заменим на балансное.

$$\begin{cases} \lambda_{12}P_1 = \lambda_{31}P_3 \\ \lambda_{24}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 \\ \lambda_{31}P_3 + \lambda_{32}P_3 = \lambda_{43}P_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

Решив ее, получим значения ПВС.

Физический смысл ПВС – среднее время пребывания системы в данном состоянии (в долевом отношении).

Т.О., предполагаем, что при $t \to \infty$ в системе S устанавливается предельный стационарный режим.