Биномиальное распределение

Лекция

План лекции

1. **Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.**
2. **Вероятность редких событий. Формула Пуассона**
3. **Часто встречающиеся распределения дискретных случайных величин.**

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Задача: **Какова вероятность появления события А при проведении серии испытаний при одних и тех же условиях?**

Допущения:

- **Вероятность ожидаемого события Р(А)=р остается постоянной в каждом испытании**
- **Учитываются только два исхода: появление события А или его альтернатива** $\overline{A}$
- **Р(**$\overline{A}$**)=q, причем p+q=1**

- **Формула Бернулли описывает вероятность появления** $P_n(k)$ **события** A **в** n **независимых испытаниях** k **раз.**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^n \cdot q^{n-k}$$ с учетом, что $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

имеем

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^n \cdot q^{n-k}$$

формула Бернулли

Пример: Согласно ГОСТу вероятность содержания лекарственных веществ в одной грануле равна 0,9. Какова вероятность того, что из 10 гранул 5 удовлетворяют нормативам?

$$P_{10}(5)=\frac{10!}{5!5!}\cdot 0{,}9^{5}\cdot 0{,}1^{5}=0{,}0015$$

Частные случаи формулы Бернулли

1. Вероятность осуществления события А в n испытаниях ровно n раз равна:

$$P_n(n) = \frac{n!}{n!0!} \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$$

2. Вероятность осуществления события А в n испытаниях нуль раз равна:

$$P_n(0) = \frac{n!}{n!0!} \cdot p^0 \cdot q^n = q^n$$

Частные случаи формулы Бернулли

3. Вероятность осуществления события А в n испытаниях не более m раз равна:

$$P_n(m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$$

4. Вероятность осуществления события А в n испытаниях не менее m раз равна:

$$P_n(m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$$

Пример:

Что вероятнее выиграть у равносильного противника:

Не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение: Так как противники равносильны, то вероятность выигрыша и проигрыша в каждой партии одинаковы.

1. Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех:

$$p = P_4(3) + P_4(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}31$$

2. Вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми:

$$p = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{7}{32} + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right) \cdot (\frac{1}{2})^8 = \frac{93}{256} =$$

$$0{,}36$$

Вероятность редких событий. Формула Пуассона

- Если вероятность ожидаемого события А очень мала ($p \to 0$, а вероятность альтернативы $q \to 1$).

$$P_k \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda = np$$

формула Пуассона

Пример:

- Пусть известно, что в партии препарата имеется n=100 000 ампул. Вероятность нахождения поврежденной ампулы p=0,0001. Найти вероятность того, что партия содержит ровно 5 бракованных ампул.

$$P_n(X) \approx \frac{(np)^x}{X!} e^{-np} = \frac{\lambda^x}{X!} e^{-\lambda}$$

$$np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$$

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 \mathring{a}^{-10}}{5!} = \frac{10^5 0{,}000045}{120} = 0{,}0375$$

Биномиальное распределение

Генерация: в отдельном опыте благоприятное событие может произойти с вероятностью **p**.

P (m, n) - вероятность того, что в **n** опытах благоприятное событие произойдет **m** раз

$$P(m,n) = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

Биномиальное распределение

x	0	1	2	…	n
p	q^n	$C_n^{n-1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$C_n^{n-2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	p^n

- $M(X) = n \cdot p$
- $D(X) = n \cdot p \cdot q$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Распределение Пуассона

Генерация: точно так же, как и для биномиального распределения, благоприятное событие может произойти с вероятностью **p**, однако число опытов **n** велико, а величина **p** мала (благоприятные события редки).

Вероятность того, что в **n** опытах благоприятное событие выпадет **k** раз:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$$

- **M(X)=D(X)=λ=n·p**

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

- Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. М.: Аспект-пресс, 2005, с.173-181.
- Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики. М., ГЭОТАР-Медиа, 2007.
- Журбенко Л. Математика в примерах и задачах. М.: Инфра-М, 2009.
- **Учебно–методические пособия**:
- Шапиро Л.А., Шилина Н.Г. Руководство к практическим занятиям по медицинской и биологической статистике Красноярск: ООО «Поликом». – 2003.