

Глава 6. Интегрирование на подмножествах $R^n, n \geq 2$.

(Кратный интеграл)

Всюду в этой главе $p, q \in N, n = p + q, x(x_1, x_2, \dots, x_p) \in R^p,$

$$y(y_1, y_2, \dots, y_q) \in R^q,$$

$A_n = L(R^n)$ – сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $R^n,$

$A_p = L(R^p), A_q = L(R^q)$ – сигма-алгебры измеримых по Лебегу

множеств в R^p и R^q соответственно;

μ_n – мера Лебега в R^n, μ_p, μ_q – меры Лебега в R^p и R^q ;

$$R^n = R^p \times R^q.$$

Пусть $C_0 \in A_n, C \subset C_0, C \in A_n$;

$f: C_0 \rightarrow R$ – измеримое отображение.

Если интеграл Лебега определен (конечный или бесконечный), будем обозначать его:

$$\int_C f d\mu_n \equiv \int_C f(x; y) d\mu_n(x, y) \equiv \int_C f(x; y) dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q.$$

Если $B_0 \in A_p$, $B \subset B_0$, $B \in A_p$, $g: B_0 \rightarrow R$ – измеримо и определен интеграл Лебега от функции g по множеству B , будем обозначать его:

$$\int_C g d\mu_p \equiv \int_C g(x) d\mu_p(x) \equiv \int_B f(x) dx_1 \dots dx_p.$$

§1. Сечения множеств в R^n . Теорема о сечениях.

Определение 1. Пусть $A \subset R^n, x \in R^p$.

Множество $A(x) = \{y \in R^q : (x, y) \in A\}$ называется сечением множества A по точке x , $A(x) \subset R^q$.

Аналогично, для $y \in R^q$ множество $A(y) = \{x \in R^p : (x, y) \in A\} \subset R^p$ называется сечением множества A по точке y .

Примеры приведем на лекции.

Замечание 1. Сечения $A(x)$, $A(y)$ не являются сечениями фигуры A с точки зрения геометрии, это проекции геометрических сечений на соответствующие подпространства.

Замечание 2. Не все сечения измеримого множества обязаны быть измеримыми. Пример такого множества и его неизмеримого сечения приведем на лекции.

Теорема 1 (о сечениях измеримого по Лебегу множества в R^n).

Пусть $A \in A_n$, (то есть A измеримо по Лебегу, $A \in R^n = R^p \times R^q$).

Тогда почти для всех $x \in R^p$ сечение $A(x) \in A_q$ (то есть является измеримым по Лебегу) и справедливо равенство:

$$\mu_{p+q}A = \int_{R^p} \mu_q A(x) d\mu_p(x) \quad (*)$$

Доказательство. Будем устанавливать результат теоремы о сечениях поэтапно:

1. A – брус;
2. A – открытое множество;
3. A – пересечение открытых множеств, A – ограничено;
4. A – ограниченное множество нулевой меры;
5. A – ограниченное измеримое множество;
6. A – неограниченное измеримое множество.

Подробно приведем на лекции.