Глава 6. Интегрирование на подмножествах $R^n, n \geq 2$. (Кратный интеграл)

Всюду в этой главе $p, q \in N$, $n = p + q$, $x(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R^p$, $y(y_1, y_2, \ldots, y_q) \in R^q$,

$A_n = L\left(R^n\right)$ – сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств в R^n,

$A_p = L\left(R^p\right)$, $A_q = L\left(R^q\right)$ – сигма-алгебры измеримых по Лебегу множеств в R^p и R^q соответственно;

μ_n – мера Лебега в R^n, μ_p, μ_q – меры Лебега в R^p и R^q;

$R^n = R^p \times R^q$.

Пусть $C_0 \in A_n$, $C \subset C_0, C \in A_n$;

$f : \mathrm{C}_0 \to R$ – измеримое отображение.

Если интеграл Лебега определен (конечный или бесконечный), будем обозначать его:

$$\int_C f\,d\mu_n \equiv \int_C f(x;y)\,d\mu_n(x,\mathrm{y}) \equiv \int_C f(x;y)\,dx_1..dx_p dy_1...dy_q.$$

Если $B_0 \in A_p$, $B \subset B_0, B \in A_p$, $\mathrm{g}:\mathrm{B}_0 \to R$ – измеримо и определен интеграл Лебега от функции g по множеству B, будем обозначать его:

$$\int_C g\,d\mu_p \equiv \int_C g(x)\,d\mu_p(x) \equiv \int_B f(x)\,dx_1..dx_p.$$

§1. Сечения множеств в R^n. Теорема о сечениях.

Определение 1. Пусть $A \subset \mathrm{R}^n, x \in \mathrm{R}^p$.

Множество $A(x) = \left\{ y \in \mathrm{R}^q : (x, y) \in A \right\}$ называется сечением множества A по точке x, $A(x) \subset R^q$.

Аналогично, для $y \in \mathrm{R}^q$ множество $A(y) = \left\{ x \in \mathrm{R}^p : (x, y) \in A \right\} \subset \mathrm{R}^p$ называется сечением множества A по точке y.

Примеры приведем на лекции.

Замечание 1. Сечения $A(x)$, $A(y)$ не являются сечениями фигуры A с точки зрения геометрии, это проекции геометрических сечений на соответствующие подпространства.

Замечание 2. Не все сечения измеримого множества обязаны быть измеримыми. Пример такого множества и его неизмеримого сечения приведем на лекции.

Теорема 1 (о сечениях измеримого по Лебегу множества в R^n).

Пусть $A \in A_n$, (то есть А измеримо по Лебегу, $A \in R^n = R^p \times R^q$).

Тогда почти для всех $x \in \mathrm{R}^p$ сечение $A(x) \in A_q$ (то есть является измеримым по Лебегу) и справедливо равенство:

$$\mu_{p+q} A = \int_{R^p} \mu_q A(x) \, d\mu_p(x) \qquad (*)$$

Доказательство. Будем устанавливать результат теоремы о сечениях поэтапно:

1. А – брус;
2. А – открытое множество;
3. А – пересечение открытых множеств, А – ограничено;
4. А – ограниченное множество нулевой меры;
5. А – ограниченное измеримое множество;
6. А – неограниченное измеримое множество.

Подробно приведем на лекции.