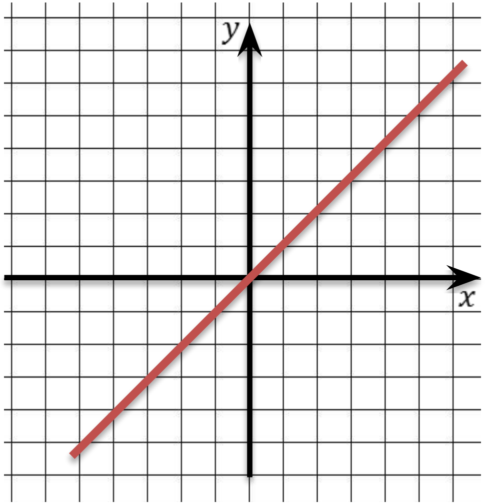
Степенные функции, их свойства и графики

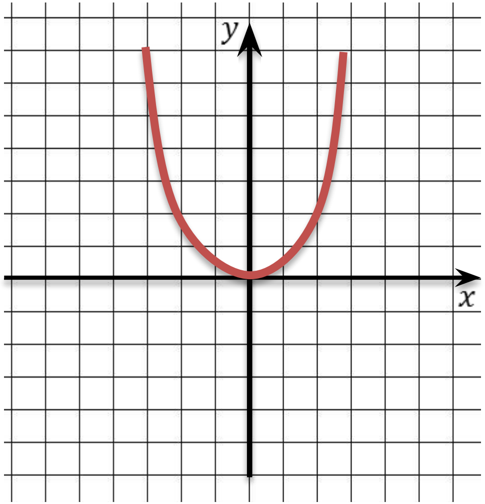
- $y = x^r$, где r – любое действительное число

если r – натуральное, то $y = x^n$

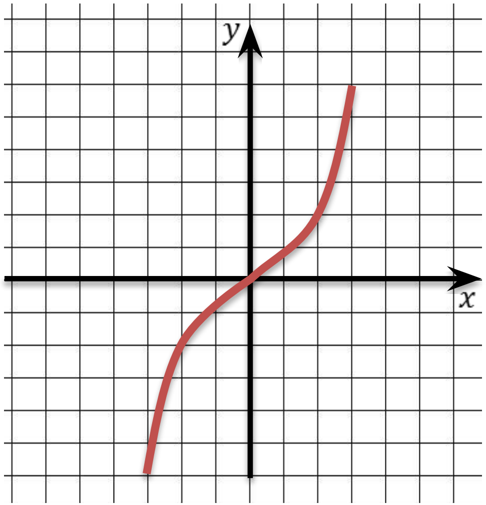
$n = 1 \Rightarrow y = x$



$n = 2k \Rightarrow y = x^{2k}$

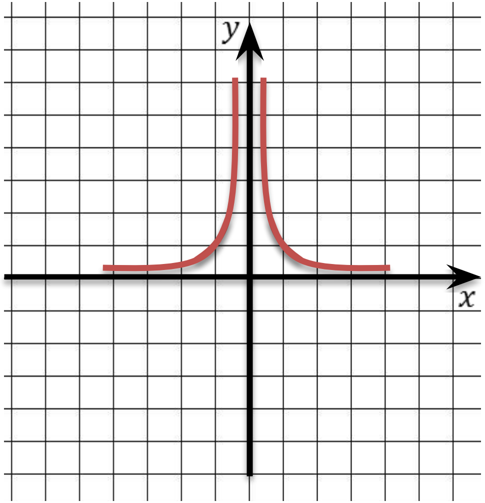


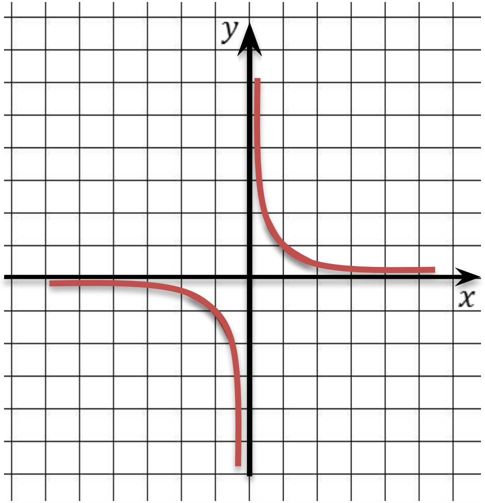
$n = 2k + 1 \Rightarrow y = x^{2k+1}$

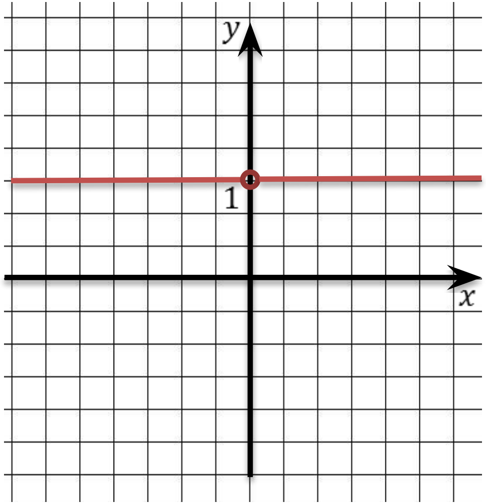


если $r = -n$, то $y = \frac{1}{x^n}$

$n = 2k \Rightarrow y = \frac{1}{x^{2k}}$ $\quad$ $n = 2k + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^{2k+1}}$ $\quad$ $n = 0 \Rightarrow y = 1, x \neq 0$







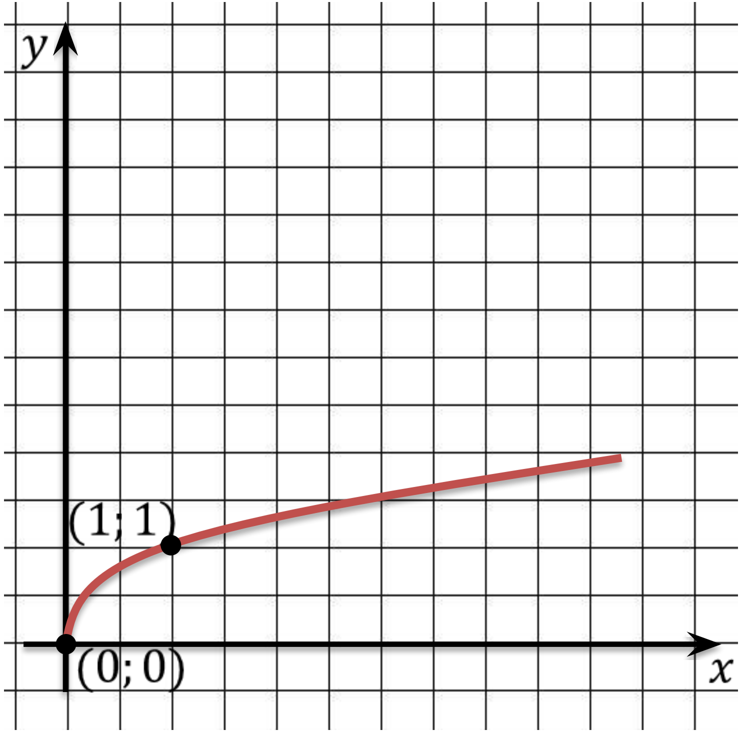
$$y = x^r,\ r = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} > 0 \qquad \frac{m}{n} < 0$$

$$0 < \frac{m}{n} < 1 \qquad \frac{m}{n} > 1$$

$y = x^r,\ r = \frac{m}{n},\ 0 < \frac{m}{n} < 1$

$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},\ x \ge 0$



1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция возрастает при $x \in D(y)$

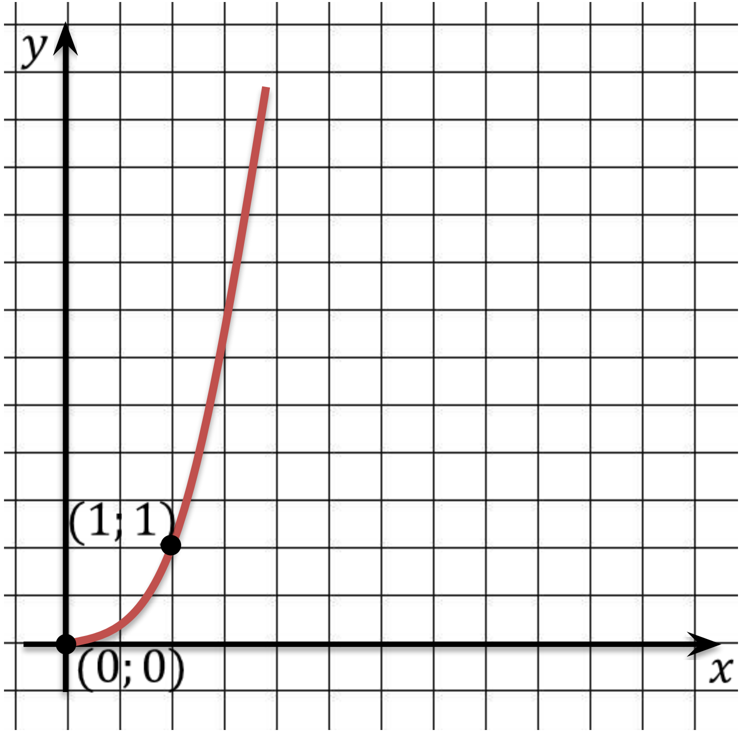
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ – не существует

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вверх при $x \in D(y)$

$$y = x^r, r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} > 1$$



1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция возрастает при $x \in D(y)$

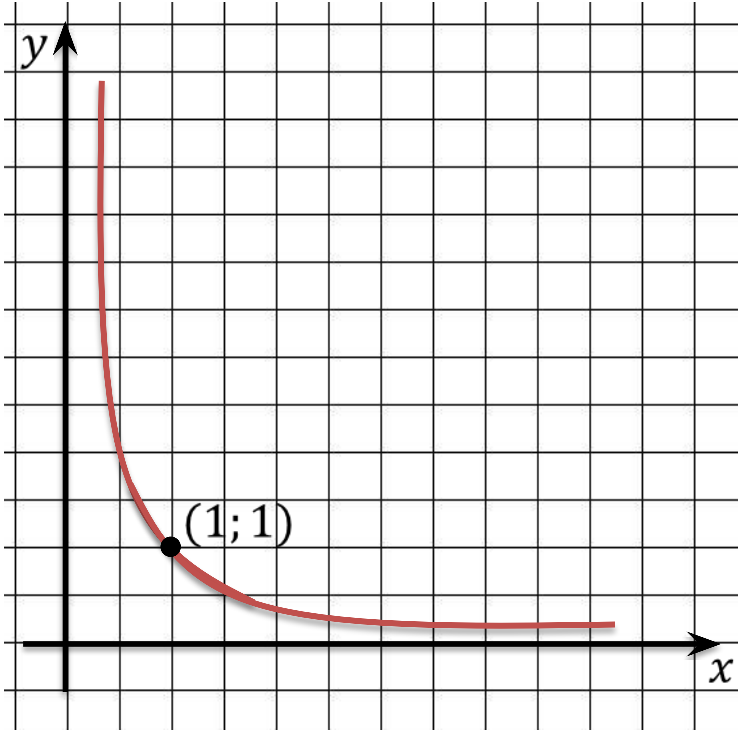
5. функция не ограничена сверху,
но ограничена снизу

6. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вниз
при $x \in D(y)$

$$y = x^r,\ r = \frac{m}{n},\ \frac{m}{n} < 0$$



1. $D(y) = (0; +\infty)$

2. $E(y) = (0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция убывает при $x \in D(y)$

5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вниз при $x \in D(y)$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} =$$

$$= -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

$$\boldsymbol{(x^m)' = mx^{m-1}, m \in Z, x \neq 0}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Теорема: Если $x > 0$ и r – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

$y = x^r, r = \frac{m}{n}, 0 < \frac{m}{n} < 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция возрастает при $x \in D(y)$

5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ – не существует

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вверх при $x \in D(y)$

9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$

$y = x^r, r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} > 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция возрастает при $x \in D(y)$

5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ – не существует

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вниз при $x \in D(y)$

9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$

$y = x^r, r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} < 0$

1. $D(y) = (0; +\infty)$

2. $E(y) = (0; +\infty)$

3. функция не является ни четной, ни нечетной

4. функция убывает при $x \in D(y)$

5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют

7. функция непрерывна при $x \in D(y)$

8. график функции выпуклый вниз при $x \in D(y)$

9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$

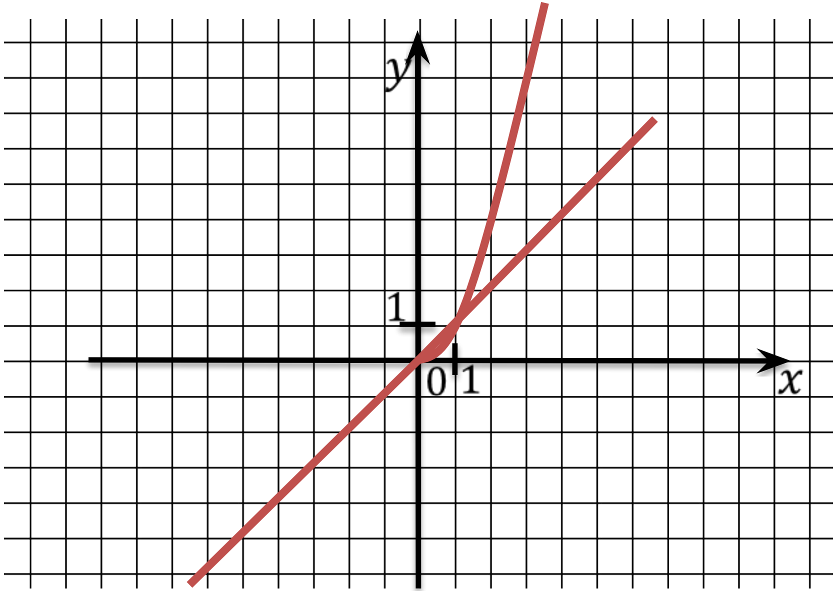
Пример:

Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{если } x < 0 \\ x^{\frac{5}{3}}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция возрастает при $x \in D(y)$
5. функция не ограничена ни сверху, ни снизу
6. $y_{\text{наим}}, y_{\text{наиб}}$ – не существует
7. функция непрерывна при $x \in D(y)$
8. график функции выпуклый вниз при $x \in (0; +\infty)$
9. функция дифференцируема при $x \in (0; +\infty)$



Пример:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

Найти производные функций а) $y = \boldsymbol{x^8}$; б) $y = \boldsymbol{x^{-4}}$; в) $y = \boldsymbol{x^{\frac{3}{5}}}$; г) $y = \boldsymbol{x^{\frac{7}{2}}}$;

д) $y = \boldsymbol{x^{-\frac{3}{4}}}$.

Решение:

а) $y' = (\quad)' = 8x^7$

б) $y' = (\quad\quad)' = -4(x)^{-4-1} = -4(x)^{-5}$

в) $y' = (\quad)' = \frac{3}{5}(x)^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}(x)^{-\frac{2}{5}}$

г) $y' = (\quad)' = \frac{7}{2}(x)^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}(x)^{\frac{5}{2}}$

д) $y' = (\quad\quad)' = -\frac{3}{4}(x)^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}(x)^{-\frac{7}{4}}$

Пример:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Написать уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{3x-1}$ в точке $x = \mathbf{3}$.

Решение:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$$

$$f(3) = \sqrt[3]{3 \cdot \quad -1} = \sqrt[3]{8} = \mathbf{2}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{3x-1}\right)' = \left((3x-1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3x-1)^{\frac{1}{3}-1} = (3x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(3) = (3 \cdot 3 - 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}$$

$$y = \quad + \qquad \cdot (x-3) = 2 + 0{,}25x - 0{,}75 = 0{,}25x + 1{,}25$$

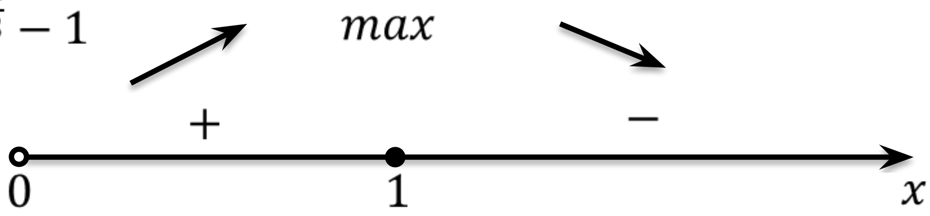
Пример:

Исследовать функцию $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$D(y) = [0; +\infty)$

$$y' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x\right)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 1 = x^{-\frac{1}{3}} - 1$$



y' – не существует при $x = 0$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ – точка максимума

Функция возрастает при $x \in (0; 1)$

$y_{max} = y(1) = \frac{1}{2}$

Функция убывает при $x \in (1; +\infty)$

Пример:

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x$ на $[1; 9]$.

Решение:

$D(y) = [0; +\infty)$

$$y' = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x\right)' = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\right)' - 2 = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 2 = x^{\frac{1}{2}} - 2$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in [1; 9]$

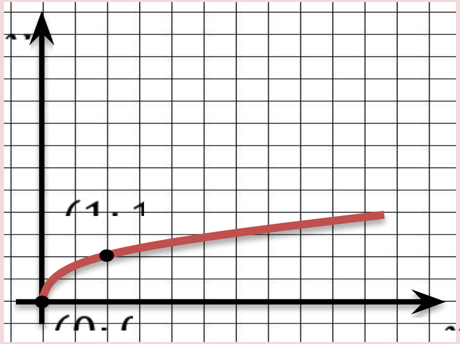
$$y(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot 1 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

$$y(4) = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot 4 = \frac{16}{3} - 8 = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3} = y_{\text{наим}}$$

$$y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot 9 = 18 - 18 = 0 = y_{\text{наиб}}$$

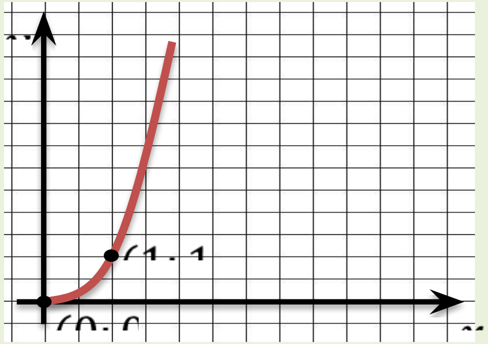
$y = x^r, r = \frac{m}{n}, 0 < \frac{m}{n} < 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$
2. $E(y) = [0; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция возрастает при $x \in D(y)$
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу
6. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует
7. функция непрерывна при $x \in D(y)$
8. график функции выпуклый вверх при $x \in D(y)$
9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$



$y = x^r, r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} > 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$
2. $E(y) = [0; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция возрастает при $x \in D(y)$
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу
6. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует
7. функция непрерывна при $x \in D(y)$
8. график функции выпуклый вниз при $x \in D(y)$
9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$



$y = x^r, r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} < 0$

1. $D(y) = (0; +\infty)$
2. $E(y) = (0; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция убывает при $x \in D(y)$
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу
6. $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$ – не существуют
7. функция непрерывна при $x \in D(y)$
8. график функции выпуклый вниз при $x \in D(y)$
9. функция дифференцируема при $x \in D(y)$