Матриці і задачі оптимального планування

ЛЕКЦІЯ 2

План

- 1. Визначення матриці, їх види.
- 2. Дії над матрицями.
- 3. Обернена матриця та її знаходження.
- 4. Поняття про ранг матриці та його обчислення.
- 5. Економічні задачі з використанням теорії матриць.

А. *Поняття матриці.* Матрицею називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, яка містить **m** рядків та **n** стовпців, взята в квадратні або круглі дужки.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Або коротко $\left[a_{ij}\right] = (\iota = 1,2,\dots, m;\ j = 1,2,\dots, n).$

В цьому випадку вважають, що матриця має розмірність $m \times n$. Матриці позначають латинськими буквами $A, B, C, E, \dots$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де перший індекс означає номер рядка, а другий j – номер стовпця. Якщо кількість рядків не рівна кількості стовпців, тобто $m \neq n$, то матриця називається прямокутною, якщо $m = n$ - квадратною. В цьому випадку число $m = n$ називається порядком матриці. Елементи квадратної матриці, в яких $i = j$ утворюють головну діагональ.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи , крім головної діагоналі, рівні нулю, тобто

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі рівні одиниці, то її називають одиничною матрицею. Вона позначається буквою E (від російського слова “единица”) і має вигляд

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають рівну кількість рядків та стовпців і елементи яких співпадають.

Матриця, в якої всі елементи рівні нулю, називається нуль-матрицею або нульовою. Її позначають буквою **0**.

Якщо матриця складається тільки з одного рядка, то вона називається матрицею-рядком.

Матриця, яка складається з одного стовпця, називається матрицею-стовпцем.

Якщо в матриці A поміняти рядки на стовпці, а стовпці – на рядки, то одержану матрицю називають транспонованою і позначають A'.

Якщо визначник квадратної матриці рівний нулю ($|A| = 0$), то матриця A називається виродженою(або особливою), якщо ($|A| \neq 0$)- невиродженою (або неособливою).

Матриця вигляду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

називається верхньою трикутною, а матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - нижньою трикутною.

Матрицю

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

називають матрицею трапецеїдального вигляду, якщо одночасно $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{jj}$ відмінні від нуля.

Б. *Дії над матрицями.* Сумою (різницею) двох матриць A і B називається матриця C, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n),$$

де a_{ij}, b_{ij} - відповідні елементи матриць A і B.

Приклад. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix};$$

Розв'язування. За означенням знаходимо

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+(-2) & -3+5 \\ 3+6 & 4+7 & 0+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 9 & 11 & -5 \end{bmatrix};$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-4) & 1-(-2) & -3-5 \\ 3-6 & 4-7 & 0-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Із означення суми матриць випливає, що мають місце переставний та сполучний закони $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$, а також $A+0=0+A=A$. Це означає, що при додаванні до довільної матриці A нульової матриці, одержимо ту саму матрицю.

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добутки

елементів матриці A на число k, тобто $Ak = kA = [ka_{ij}]$

$(i = 1,2,..., m; j = 1,2,..., n)$.

Приклад. Знайти матрицю $4A$, якщо матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

За означенням $$4A = \begin{bmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot(-2) & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot(-4) & 4\cdot 5 \end{bmatrix}.$$

Із означення добутку матриці на число (або числа на матрицю) випливає, що

$$1\cdot A = A\cdot 1 = 1, \qquad 0\cdot A = A\cdot 0 = 0,$$

$$k(mA) = (km)A = kmA, \qquad (k+m)A = A(k+m) = kA + mA.$$

Як бачимо, додавання і множення матриці на число характеризується тими властивостями, що і додавання та множення чисел.

Зауваження. Множення матриці на число відрізняється від множення визначника на число. Матрицю множать на число k, помноживши всі її елементи на це число. Якщо визначник множать на число k, то множать на нього всі елементи одного якогось рядка (або стовпця).

Нехай матриця A містить m рядків і p стовпців, а матриця B має p рядків і n стовпців. Тоді добутком матриць A і B називається матриця C, елементи c_{ij} якої рівні сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \qquad (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n).$$

Добуток матриці A на матрицю B позначають AB. Множення матриці A на матрицю B виконується за такою схемою:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & b_{1j} & \cdot \\ \cdot & b_{2j} & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{pj} & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

<u>Зауваження.</u> Добуток AB має зміст лише тоді, коли кількість стовпців матриці A співпадає з кількістю рядків матриці B

Приклад. Знайти добутки AB і BA, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

і переконатись, що $AB \neq BA.$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+(-2)(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5\\ 3\cdot 2+4\cdot(-1) & 3\cdot 0+4\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -10\\ 2 & 20\end{bmatrix}.$$

Аналогічно

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot(-2)+0\cdot 4\\ (-1)\cdot 1+5\cdot 3 & (-1)\cdot(-2)+5\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 14 & 22\end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що $AB \neq BA.$

Приклад. Знайти добуток AB, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 2\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix}.$$

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot(-3)+2\cdot 1+(-1)\cdot 6 & 1\cdot(-2)+2\cdot 0+(-1)\cdot(-4) & 1\cdot 5+2\cdot 2+(-1)\cdot 7\\ 0\cdot(-3)+3\cdot 1+4\cdot 6 & 0\cdot(-2)+3\cdot 0+4\cdot(-4) & 0\cdot 5+3\cdot 2+4\cdot 7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & 2 & 2\\ 27 & -16 & 34\end{bmatrix}.$$

(Тут добуток BA невизначений, оскільки кількість стовпців першої матриці не дорівнює кількості рядків другої матриці).

Приклад. Знайти добуток AE, якщо $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 4\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 4\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-2)\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-4)\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 5\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 5\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(Легко переконатись, що має місце і рівність $EA=A$).

Для множення матриць має місце сполучний та розподільчий закон множення

$$A(BC)=(AB)C, \quad (A+B)C=AC+BC, \quad C(A+B)=CA+CB.$$

Відмітимо, що добуток двох матриць може бути нульовою матрицею, хоч кожна із них не є нульовою.

Обернена матриця.

Оберненою для заданої квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}, добуток на яку матриці A рівний одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad \text{або} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Дамо схему знаходження оберненої матриці для заданої квадратної матриці:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Обчислимо визначник матриці $A(|A|)$.
2. Транспонуємо матрицю A, тобто одержуємо матрицю:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A' і запишемо їх у вигляді матриці $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4.Поділимо кожен елемент матриці $\overline{A}$ на визначник матриці A, тобто помножимо число $\dfrac{1}{|A|}$ на матрицю $\overline{A}$. Одержана матриця буде оберненою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overline{A} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Із цієї схеми випливає, що обернена матриця існує тільки для невироджених матриць, тобто коли $|A| \neq 0$.

Матриця, яка складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці, називається приєднаною (або союзною) до матриці A.

Зауваження. Приєднана матриця матиме такий же вигляд $\overline{A}$, якщо транспонувати матрицю, складену із алгебраїчних доповнень елементів матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Визначник цієї матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4+24+9-4-18-12=3.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента даної матриці

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-2-(-6)=4;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(6-3) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(6-8) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-(-3)) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-4) = -5;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(6-12) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7.$$

Приєднана матриця буде такою:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця A^{-1} для заданої матриці A має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 12 - 2 - 12 + 16 + 2 = 0.$$

Оскільки $|A| = 0$, тобто матриця A вироджена, то оберненої для неї не існує.

Дякую за увагу!