



Матриці і задачі оптимального планування

ЛЕКЦІЯ 2

План

- ▶ 1. Визначення матриці, їх види.
- ▶ 2. Дії над матрицями.
- ▶ 3. Обернена матриця та її знаходження.
- ▶ 4. Поняття про ранг матриці та його обчислення.
- ▶ 5. Економічні задачі з використанням теорії матриць.

А. Поняття матриці. Матрицею називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, яка містить m рядків та n стовпців, взята в квадратні або круглі дужки.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Або коротко $[a_{ij}] = (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$.

В цьому випадку вважають, що матриця має розмірність $m \times n$.
Матриці позначають латинськими буквами A, B, C, E, \dots

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де перший індекс означає номер рядка, а другий j – номер стовпця. Якщо кількість рядків не рівна кількості стовпців, тобто $m \neq n$, то матриця називається прямокутною, якщо $m = n$ - квадратною. В цьому випадку число $m = n$ називається порядком матриці. Елементи квадратної матриці, в яких $i = j$ утворюють головну діагональ.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім головної діагоналі, рівні нулю, тобто

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі рівні одиниці, то її називають одиничною матрицею. Вона позначається буквою E (від російського слова “єдиница”) і має вигляд

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Дві матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають рівну кількість рядків та стовпців і елементи яких співпадають.

Матриця, в якій всі елементи рівні нулю, називається нуль-матрицею або нульовою. Її позначають буквою 0 .

Якщо матриця складається тільки з одного рядка, то вона називається матрицею-рядком.

Матриця, яка складається з одного стовпця, називається матрицею-стовпцем.

Якщо в матриці A поміняти рядки на стовпці, а стовпці – на рядки, то одержану матрицю називають транспонованою і позначають A' .

Якщо визначник квадратної матриці рівний нулю ($|A| = 0$), то матриця A називається виродженою (або особливою), якщо ($|A| \neq 0$)-невиродженою (або неособливою).

Матриця вигляду

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

називається верхньою трикутною, а матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \text{нижньою трикутною.}$$

Матрицю

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

називають матрицею трапецеїдального вигляду, якщо одночасно

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{jj}$ відмінні від нуля.

Б. Дії над матрицями. Сумою (різницею) двох матриць A і B називається матриця C , елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B , тобто

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

де a_{ij}, b_{ij} - відповідні елементи матриць A і B .

Приклад. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix};$$

Розв'язування. За означенням знаходимо

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-4) & 1 + (-2) & -3 + 5 \\ 3 + 6 & 4 + 7 & 0 + (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 9 & 11 & -5 \end{bmatrix};$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-4) & 1 - (-2) & -3 - 5 \\ 3 - 6 & 4 - 7 & 0 - (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Із означення суми матриць випливає, що мають місце переставний та сполучний закони $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$, а також $A+0=0+A=A$. Це означає, що при додаванні до довільної матриці A нульової матриці, одержимо ту саму матрицю.

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добутки

елементів матриці A на число k , тобто $Ak = kA = [ka_{ij}]$
($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Приклад. Знайти матрицю $4A$, якщо матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

За означенням $4A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-4) & 4 \cdot 5 \end{bmatrix}.$

Із означення добутку матриці на число (або числа на матрицю) випливає, що

$$1 \cdot A = A \cdot 1 = A, \quad 0 \cdot A = A \cdot 0 = 0,$$

$$k(mA) = (km)A = k mA, \quad (k+m)A = A(k+m) = kA + mA.$$

Як бачимо, додавання і множення матриці на число характеризується тими властивостями, що і додавання та множення чисел.

Зауваження. Множення матриці на число відрізняється від множення визначника на число. Матрицю множать на число k , помноживши всі її елементи на це число. Якщо визначник множать на число k , то множать на нього всі елементи одного якогось рядка (або стовпця).

Нехай матриця A містить m рядків і p стовпців, а матриця B має p рядків і n стовпців. Тоді добутком матриць A і B називається матриця C , елементи c_{ij} якої рівні сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Добуток матриці A на матрицю B позначають AB . Множення матриці A на матрицю B виконується за такою схемою:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{2j} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Зауваження. Добуток AB має зміст лише тоді, коли кількість стовпців матриці A співпадає з кількістю рядків матриці B

Приклад. Знайти добутки AB і BA , якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

і переконатись, що

$$AB \neq BA.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2)(-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що $AB \neq BA$.

Приклад. Знайти добуток AB , якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 & 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ 27 & -16 & 34 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(Тут добуток BA невизначений, оскільки кількість стовпців першої матриці не дорівнює кількості рядків другої матриці).

Приклад. Знайти добуток AE , якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(Легко переконатись, що має місце і рівність $EA=A$).

Для множення матриць має місце сполучний та розподільчий закон множення

$$A(BC)=(AB)C, \quad (A+B)C=AC+BC, \quad C(A+B)=CA+CB.$$

Відмітимо, що добуток двох матриць може бути нульовою матрицею, хоч кожна із них не є нульовою.

Обернена матриця.

Оберненою для заданої квадратної матриці A називається така матриця A^{-1} , добуток на яку матриці A рівний одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad \text{або} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Дано схему знаходження оберненої матриці для заданої квадратної матриці:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Обчислимо визначник матриці $A(|A|)$.
2. Транспонуємо матрицю A , тобто одержуємо матрицю:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A' і запишемо їх у вигляді матриці \bar{A} :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Поділимо кожен елемент матриці \bar{A} на визначник матриці A , тобто помножимо число $\frac{1}{|A|}$ на матрицю \bar{A} . Одержана матриця

буде оберненою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bar{A} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Із цієї схеми випливає, що обернена матриця існує тільки для невідроджених матриць, тобто коли $|A| \neq 0$.

Матриця, яка складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці, називається приєднаною (або союзною) до матриці A .

Зауваження. Приєднана матриця матиме такий же вигляд \bar{A} , якщо транспонувати матрицю, складену із алгебраїчних доповнень елементів матриці A .

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 24 + 9 - 4 - 18 - 12 = 3.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента даної матриці

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - (-6) = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 8) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - (-3)) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-4) = -5;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 12) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7.$$

Приєднана матриця буде такою:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця A^{-1} для заданої матриці A має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 12 - 2 - 12 + 16 + 2 = 0.$$

Оскільки $|A| = 0$, тобто матриця A вироджена, то оберненої для неї не існує.

Дякую за увагу!