

Прямые на плоскости

ЗАДАЧИ 6 И 7

Некоторые понятия и определения

1. Ненулевой вектор n , перпендикулярный заданной прямой, называется **нормальным** вектором для этой прямой.

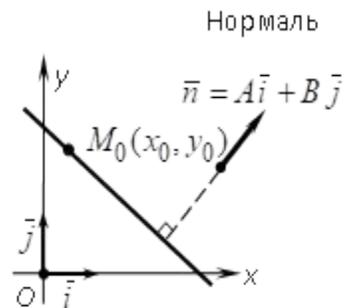


Рис. 3.1

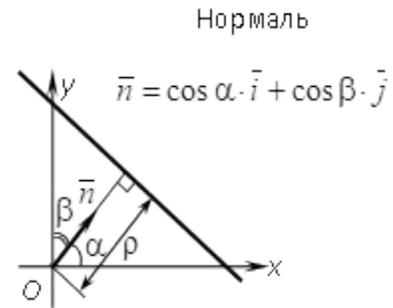


Рис. 3.2



Рис. 3.3

Некоторые понятия и определения

Направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, *коллинеарный этой прямой*, т.е. принадлежащий или параллельный ей (рис. 3.3). Эти векторы характеризуют направление прямой и используются в уравнениях. Прямую, разумеется, можно задать, указав две точки, через которые она проходит (рис. 3.4). В частности, это могут быть точки на координатных осях (рис. 3.5). В этом случае говорят, что прямая отсекает "*отрезки*" x_1 и y_1 на координатных осях. Направление прямой можно также определить, задав угол α , который она образует с положительным направлением оси абсцисс (рис. 3.6), при этом используется *угловой коэффициент*, равный тангенсу этого угла.

Некоторые понятия и определения

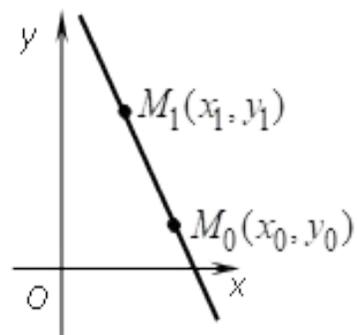


Рис. 3.4

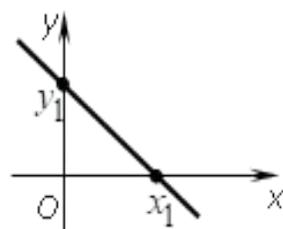


Рис. 3.5

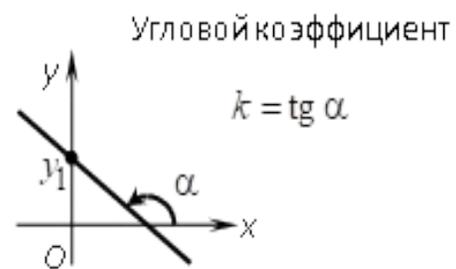


Рис. 3.6

Способы задания прямой на плоскости

1. По точке и нормальному вектору
2. По точке и направляющему вектору
3. По двум точкам

Основные типы уравнений

Таблица 3.1. Основные типы уравнений прямых на плоскости

Название	Уравнение	Способ задания прямой
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0,$ $A^2 + B^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ (рис. 3.1)
Нормированное уравнение прямой	$x \cos \alpha + y \cos \beta - \rho = 0,$ $\rho \geq 0$	Прямая проходит перпендикулярно вектору $\vec{n} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j}$ на расстоянии ρ от начала координат (рис. 3.2)
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases} t \in \mathbb{R};$ $a^2 + b^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (рис. 3.3)
Каноническое уравнение прямой	$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$	
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ (рис. 3.4)
Уравнение прямой "в отрезках"	$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1,$ $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$	Прямая отсекает на координатных осях "отрезки" x_1 и y_1 (рис. 3.5)
Уравнение с угловым коэффициентом	$y = kx + y_1$	Прямая проходит через точку $(0, y_1)$ на оси ординат с угловым коэффициентом k (рис. 3.6)

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

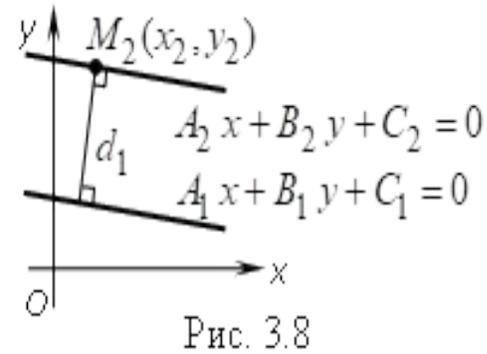
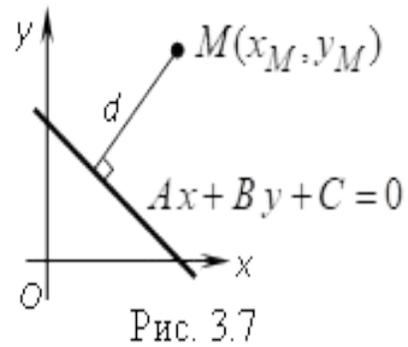
1. Расстояние d от точки $M(x_M, y_M)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (рис. 3.7) вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.1)$$

2. Расстояние между параллельными прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (рис. 3.8) находится как расстояние d_1 от точки $M_2(x_2, y_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, до прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ по формуле:

$$d_1 = \frac{|A_1x_2 + B_1y_2 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости



Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

3. Острый угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2 находится по формулам:

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad (3.2)$$

если $\vec{p}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}$ и $\vec{p}_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых каноническими или параметрическими уравнениями (рис. 3.9));

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (3.3)$$

если $\vec{n}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j}$ и $\vec{n}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j}$ – нормали к прямым l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых общими уравнениями (рис. 3.9));

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

если $k_1 k_2 \neq -1$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно (в случае задания прямых уравнениями с угловыми коэффициентами (рис. 3.10)). Если $k_1 k_2 = -1$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поскольку прямые перпендикулярны.

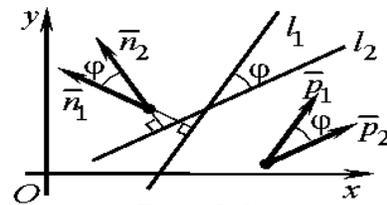


Рис. 3.9

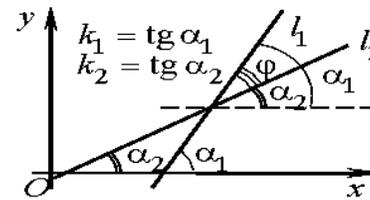


Рис. 3.10

Постановка задачи

В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты точек $A(1,2)$ и $B(4,6)$ (рис.

3.11). Составить следующие уравнения прямой AB :

- а) каноническое;
- б) параметрическое;
- в) общее;
- г) нормированное;
- д) в отрезках;
- е) разрешенное относительно y (т.е. с угловым коэффициентом).

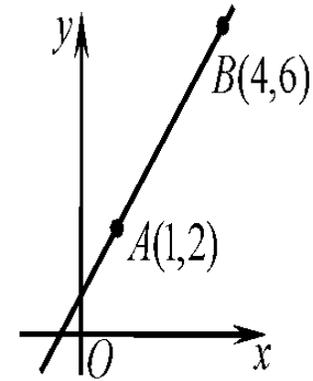


Рис. 3.11

Составить каноническое, параметрическое, общее, нормированное и уравнение прямой в отрезках Дано; A(1,2) B(4,6)

Решение. а) Составляем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-2}{6-2}$

Вычисляя знаменатели, приходим к каноническому уравнению $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$.

б) Приравниваем каждую дробь канонического уравнения параметру t и выражаем неизвестные x и y :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 4t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$. Получили параметрическое уравнение прямой.

в) Перенесем все члены канонического уравнения в левую часть и умножим на общий знаменатель. Приводя свободные члены, получаем общее уравнение: $4x - 3y + 2 = 0$.

г) Разделим общее уравнение на длину нормали $\vec{n} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Получим $0,8x - 0,6y + 0,4 = 0$, так как $|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Осталось сделать свободный член уравнения неположительным. Поэтому умножаем обе части уравнения на (-1) : $-0,8x + 0,6y - 0,4 = 0$. Это нормированное уравнение прямой AB .

д) Чтобы получить уравнение прямой в отрезках, нужно свободный член общего уравнения перенести в правую часть и разделить обе части на правую. В полученной левой части умножения неизвестных на коэффициенты заменить делением на обратные величины. Выполняя эти преобразования уравнения $4x - 3y + 2 = 0$, последовательно получаем:

$$4x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y = -2 \Leftrightarrow -2x + 1,5y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1.$$

Составить уравнение с угловым коэффициентом

е) Выражая неизвестную y из общего уравнения, приходим к уравнению разрешенному относительно y (т.е. уравнению прямой с угловым коэффициентом):

$$4x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

- ж) расстояние от прямой до начала координат ;
з) площадь треугольника, образованного этой прямой с координатными осями;
и) величину угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс
-

ж) Расстояние ρ от прямой до начала координат O находим по нормированному уравнению:

$$\rho = 0,4.$$

з) Площадь S треугольника, образованного этой прямой с координатными осями, вычисляем, учитывая геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой в отрезках:

$$S = \frac{1}{2} |x_1| |y_1| = \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \right| \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{6}.$$

и) Величину α угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс находим по угловому коэффициенту. Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, то $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Постановка задачи

В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты вершин $A(1,5)$, $B(13,0)$, $C(5,8)$ треугольника ABC (рис. 3.12). Требуется:

- а) составить общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC ;
- б) составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM ;
- в) составить общее уравнение прямой, содержащей высоту AH ;
- г) составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL ;
- д) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника);
- е) найти величину φ угла между прямыми AC и BC ;
- ж) найти координаты точки O' , симметричной точке O относительно прямой AB .

Алгоритм нахождения общего уравнение серединного перпендикуляра к стороне треугольника

1. Находим координаты точки M - середины стороны
2. Искомый серединный перпендикуляр MN проходит через точку M перпендикулярно вектору (стороне треугольника). Находим координаты стороны. BC – нормаль для серединного перпендикуляра.
3. Запишем общее уравнение нормали с неизвестным свободным членом:
 $Ax + By + C = 0$
4. Свободный член C выбираем так, чтобы серединный перпендикуляр проходил через точку M . Подставляем вместо x и y координаты точки M . Находим значение C .
5. Записываем общее уравнение серединного перпендикуляра.

Нахождение общего уравнения серединного перпендикуляра к стороне

Дано; $A(1,5)$ $B(13,0)$, $C(5,8)$

а) Найдем сначала координаты точки M – середины стороны BC . По формуле (1.3):

$M(\frac{13+5}{2}; \frac{0+8}{2})$, т.е. $M(9;4)$. Искомый серединный перпендикуляр MN проходит через точку

M перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (5 - 13 \quad 8 - 0) = (-8 \quad 8)$. Значит, вектор \overline{BC} служит

нормалью для этой прямой. Поэтому ее уравнение имеет вид $-8x + 8y + c = 0$. Свободный член

c выбираем так, чтобы прямая MN проходила через точку M : $(-8) \cdot 9 + 8 \cdot 4 + c = 0$. Отсюда

$c = 40$. Сократив уравнение $-8x + 8y + 40 = 0$ на (-8) , получаем $x - y - 5 = 0$ – общее

уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC .

**Составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM . Составить общее уравнение прямой, содержащей высоту AH .
Дано; $A(1,5)$ $B(13,0)$, $C(5,8)$ $BC(-8,8)$**

б) Найдем направляющий вектор $\overline{AM} = (9-1 \quad 4-5) = (8 \quad -1)$. Запишем каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM . Эта прямая проходит через точку A , а вектор \overline{AM} является направляющим для нее. Получаем $\frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{-1}$.

в) Прямая, содержащая высоту AH , проходит через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$. Следовательно, вектор \overline{BC} – нормаль. Поэтому для этой прямой можно записать общее уравнение. Сначала запишем уравнение $-8(x-1) + 8(y-5) = 0$, упрощая которое, приходим к общему уравнению $x - y + 4 = 0$.

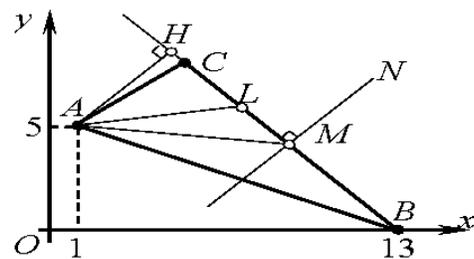


Рис. 3.12

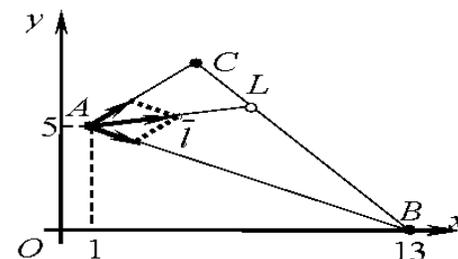


Рис. 3.13

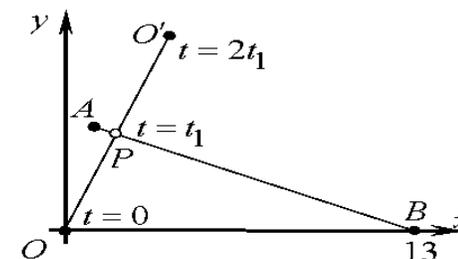


Рис. 3.14

г) Найдем сначала направляющий вектор \vec{l} прямой, содержащей биссектрису AL . Для

Составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL

г) Найдем сначала направляющий вектор \vec{l} прямой, содержащей биссектрису AL . Для этого

можно отложить от вершины A два единичных вектора $\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$, $\frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$ и построить на них ромб

(изображенный на рис. 3.13 пунктирными линиями). Диагональ ромба является биссектрисой

угла A , поэтому вектор $\vec{l} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$ будет направляющим для биссектрисы AL . Находим

координаты и длины векторов $\overline{AB} = (13 - 1 \quad 0 - 5) = (12 \quad -5)$, $|\overline{AB}| = 13$ и

$\overline{AC} = (5 - 1 \quad 8 - 5) = (4 \quad 3)$, $|\overline{AC}| = 5$. Следовательно, $\vec{l} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112 \\ 65 \\ 14 \\ 65 \end{pmatrix}$.

Записываем параметрическое уравнение прямой AL

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{112}{65}t, \\ y = 5 + \frac{14}{65}t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$.

Найти расстояние от вершины до прямой (т.е. высоту треугольника)

д) Составим уравнение прямой BC . Поскольку известен направляющий вектор $\overline{BC} = (-8 \ 8)$

, то сначала запишем каноническое уравнение $\frac{x-5}{-8} = \frac{y-8}{8}$. Затем, упрощая его, получим

общее уравнение прямой BC : $x + y - 13 = 0$. Искомое расстояние находим по формуле (3.1):

$$AH = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 13|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = 3,5\sqrt{2}.$$

Найти величину угла между прямыми

е) Угол между прямыми AC и BC вычисляем по формуле (3.2). Поскольку известны направляющие векторы $\overline{AC} = (4 \ 3)$ и $\overline{BC} = (-8 \ 8)$ этих прямых, то

$$\cos \varphi = \frac{|4 \cdot (-8) + 3 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2}} = \frac{8}{5 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$. Заметим, что этот угол острый, а угол C треугольника ABC тупой.

Алгоритм нахождения координат точки , симметричной точке относительно прямой

1. Составляем уравнение общее уравнение прямой.

Если известен направляющий вектор, то сначала записываем каноническое уравнение прямой, а затем общее уравнение прямой. Коэффициенты перед x и y - это координаты нормального вектора прямой.

2. Составляем параметрическое уравнение прямой OO'' , проходящей через начало координат, перпендикулярно AB . Направляющий вектор этой прямой перпендикулярен вектору AB . Этот вектор находится из условия $(p, AB)=0$.

3. Записываем параметрическое уравнение прямой (выражение x и y через параметр t).

4. Подставляем выражения x и y в общее уравнения прямой.

5. Находим параметр t .

6. Подставляем его в параметрическое уравнение. Это есть координаты точки, симметричной относительно заданной прямой

Найти координаты точки, симметричной точке относительно прямой

ж) Для нахождения координат точки O' составим общее уравнение прямой AB . Поскольку известен направляющий вектор $\overline{AB} = (12 \ -5)$, то сначала составляем каноническое уравнение: $\frac{x-1}{12} = \frac{y-5}{-5}$. Затем, преобразовывая его, получаем общее уравнение прямой AB :

$5x + 12y - 65 = 0$. Теперь составим параметрическое уравнение прямой OO' , проходящей через начало координат O , перпендикулярно прямой AB . Направляющий вектор \overline{p} этой прямой перпендикулярен вектору $\overline{AB} = (12 \ -5)$. Можно взять, например вектор $\overline{p} = (5 \ 12)$, который удовлетворяет условию ортогональности $(\overline{p}, \overline{AB}) = 0$. Тогда параметрическое уравнение прямой OO' будет следующее

$$\begin{cases} x = 5t, \\ y = 12t, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $t \in \mathbb{R}$. Найдем точку P пересечения прямых OO' и AB (рис. 3.14). Для этого подставим выражения (3.4) в общее уравнение прямой AB :

$$5(5t) + 12(12t) - 65 = 0 \Leftrightarrow 169t = 65 \Leftrightarrow t_1 = \frac{5}{13}.$$

Если в точке O соответствует нулевое значение параметра $t = 0$, а точке P — значение параметра $t = t_1 = \frac{5}{13}$, то точке O' будет соответствовать удвоенное значение $t = 2t_1 = \frac{10}{13}$. Это следует из равенства $OO' = 2 \cdot OP$. Подставляя $t = \frac{10}{13}$ в (3.4), находим координаты точки O' :

$$x = 5 \cdot \frac{10}{13} = \frac{50}{13}, \quad y = 12 \cdot \frac{10}{13} = \frac{120}{13}, \quad \text{т.е. } O' \left(\frac{50}{13}, \frac{120}{13} \right).$$