Прямые на плоскости

ЗАДАЧИ 6 И 7

Некоторые понятия и определения

1. Ненулевой вектор n, перпендикулярный заданной прямой, называется **нормальным** вектором для этой прямой.

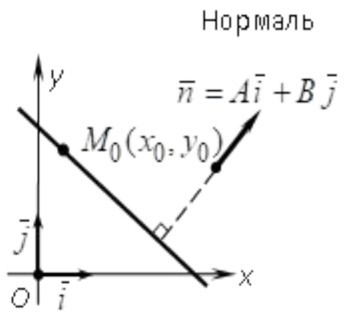

Рис. 3.1

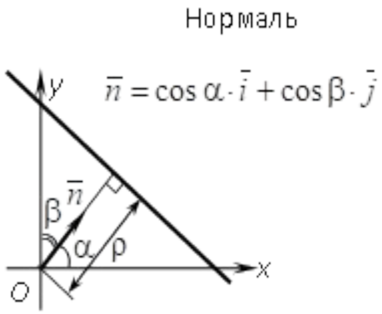

Рис. 3.2

Рис. 3.3

Некоторые понятия и определения

Направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, ***коллинеарный этой прямой***, т.е. принадлежащий или параллельный ей (рис. 3.3). Эти векторы характеризуют направление прямой и используются в уравнениях. Прямую, разумеется, можно задать, указав две точки, через которые она проходит (рис. 3.4). В частности, это могут быть точки на координатных осях (рис. 3.5). В этом случае говорят, что прямая отсекает "***отрезки***" x_1 и y_1 на координатных осях. Направление прямой можно также определить, задав угол α, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (рис. 3.6), при этом используется ***угловой коэффициент***, равный тангенсу этого угла.

Некоторые понятия и определения

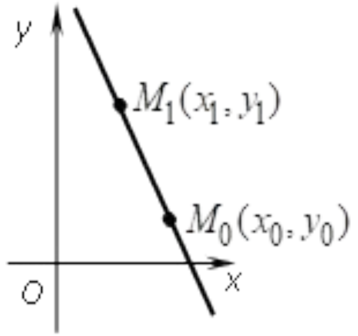

Рис. 3.4

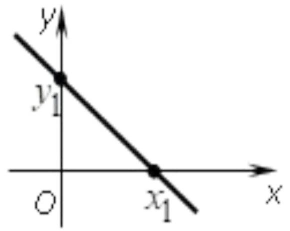

Рис. 3.5

Угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

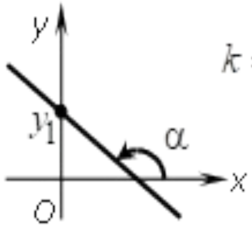

Рис. 3.6

Способы задания прямой на плоскости

1. По точке и нормальному вектору
2. По точке и направляющему вектору
3. По двум точкам

Основные типы уравнений

Таблица 3.1. **Основные типы уравнений прямых на плоскости**

Название	Уравнение	Способ задания прямой
Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$, $A^2+B^2\neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=A\,\overline{i}+B\,\overline{j}$ (рис. 3.1)
Нормированное уравнение прямой	$x\cos\alpha+y\cos\beta-\rho=0$, $\rho\geq 0$	Прямая проходит перпендикулярно вектору $\overline{n}=\cos\alpha\cdot\overline{i}+\cos\beta\cdot\overline{j}$ на расстоянии ρ от начала координат (рис. 3.2)
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \end{cases} t\in\mathbb{R}$; $a^2+b^2\neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ коллинеарно вектору $\overline{p}=a\,\overline{i}+b\,\overline{j}$ (рис. 3.3)
Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$	
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ (рис. 3.4)
Уравнение прямой "в отрезках"	$\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{y}{y_1}=1$, $x_1\neq 0$, $y_1\neq 0$	Прямая отсекает на координатных осях "отрезки" x_1 и y_1 (рис. 3.5)
Уравнение с угловым коэффициентом	$y=kx+y_1$	Прямая проходит через точку $(0,y_1)$ на оси ординат с угловым коэффициентом k (рис. 3.6)

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

1. *Расстояние* d *от точки* $M(x_M, y_M)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ (**рис.** 3.7) *вычисляется по формуле*:

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.1)$$

2. *Расстояние между параллельными прямыми* $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ *и* $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ (**рис.** 3.8) *находится как расстояние* d_1 *от точки* $M_2(x_2, y_2)$, *координаты которой удовлетворяют уравнению* $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, *до прямой* $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ *по формуле*:

$$d_1 = \frac{|A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

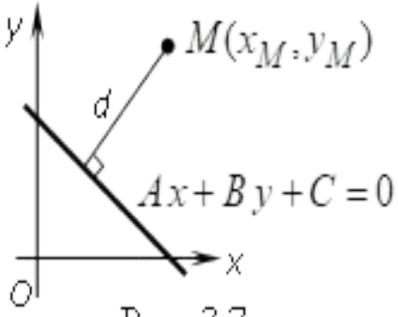

Рис. 3.7

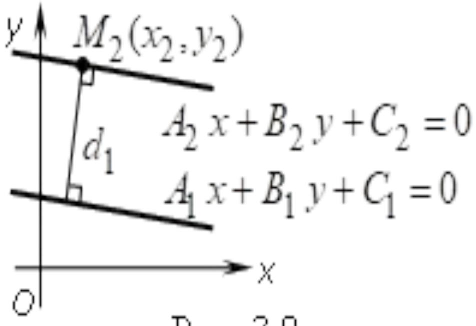

Рис. 3.8

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

3. *Острый угол* φ *между двумя прямыми* l_1 *и* l_2 *находится по формулам:*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \qquad (3.2)$$

если $\overline{p}_1 = a_1 \overline{i} + b_1 \overline{j}$ *и* $\overline{p}_2 = a_2 \overline{i} + b_2 \overline{j}$ *— направляющие векторы прямых* l_1 *и* l_2 *соответственно (в случае задания прямых каноническими или параметрическими уравнениями* (рис. 3.9));

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \qquad (3.3)$$

если $\overline{n}_1 = A_1 \overline{i} + B_1 \overline{j}$ *и* $\overline{n}_2 = A_2 \overline{i} + B_2 \overline{j}$ *— нормали к прямым* l_1 *и* l_2 *соответственно (в случае задания прямых общими уравнениями* (рис. 3.9));

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

если $k_1 k_2 \neq -1$, $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ *и* $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ *— угловые коэффициенты прямых* l_1 *и* l_2 *соответственно (в случае задания прямых уравнениями с угловыми коэффициентами* (рис. 3.10)). *Если* $k_1 k_2 = -1$, *то* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *поскольку прямые перпендикулярны.*

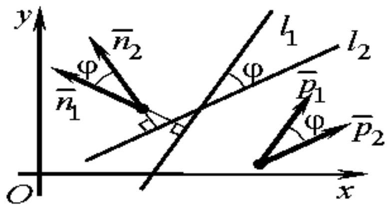

Рис. 3.9

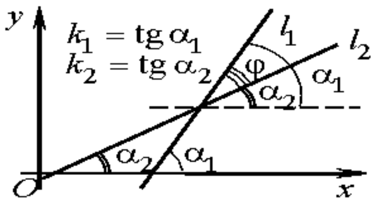

Рис. 3.10

Постановка задачи

В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты точек $A(1,2)$ и $B(4,6)$ (рис. 3.11). Составить следующие уравнения прямой AB:

а) каноническое;

б) параметрическое;

в) общее;

г) нормированное;

д) в отрезках;

е) разрешенное относительно y (т.е. с угловым коэффициентом).

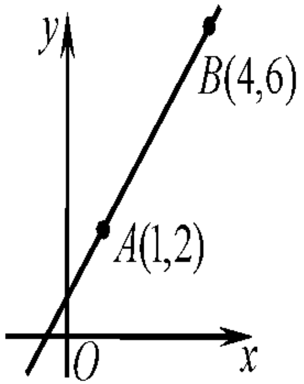

Рис. 3.11

Составить каноническое, параметрическое, общее, нормированное и уравнение прямой в отрезках
Дано; А(1,2) В(4,6)

Решение. а) Составляем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{6-2}$. Вычисляя знаменатели, приходим к каноническому уравнению $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$.

б) Приравниваем каждую дробь канонического уравнения параметру t и выражаем неизвестные x и y:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$. Получили параметрическое уравнение прямой.

в) Перенесем все члены канонического уравнения в левую часть и умножим на общий знаменатель. Приводя свободные члены, получаем общее уравнение: $4x-3y+2=0$.

г) Разделим общее уравнение на длину нормали $\bar{n}=4\bar{i}-3\bar{j}$. Получим $0{,}8x-0{,}6y+0{,}4=0$, так как $|\bar{n}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. Осталось сделать свободный член уравнения неположительным. Поэтому умножаем обе части уравнения на (-1): $-0{,}8x+0{,}6y-0{,}4=0$. Это нормированное уравнение прямой AB.

д) Чтобы получить уравнение прямой в отрезках, нужно свободный член общего уравнения перенести в правую часть и разделить обе части на правую. В полученной левой части умножения неизвестных на коэффициенты заменить делением на обратные величины. Выполняя эти преобразования уравнения $4x-3y+2=0$, последовательно получаем:

$$4x-3y+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-3y=-2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+1{,}5y=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1.$$

Составить уравнение с угловым коэффициентом

е) Выражая неизвестную y из общего уравнения, приходим к уравнению разрешенному относительно y (т.е. уравнению прямой с угловым коэффициентом):

$$4x - 3y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

ж) расстояние от прямой до начала координат ;
з) площадь треугольника, образованного этой прямой с координатными осями;
и) величину угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс

ж) Расстояние ρ от прямой до начала координат O находим по нормированному уравнению:

$\rho = 0{,}4$.

з) Площадь S треугольника, образованного этой прямой с координатными осями, вычисляем, учитывая геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой в отрезках:

$$S = \frac{1}{2}|x_1||y_1| = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\right|\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{6}.$$

и) Величину α угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс находим по угловому коэффициенту. Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, то $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Постановка задачи

В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты вершин $A(1,5)$, $B(13,0)$, $C(5,8)$ треугольника ABC (рис. 3.12). Требуется:

а) составить общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC;

б) составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM;

в) составить общее уравнение прямой, содержащей высоту AH;

г) составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL;

д) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника);

е) найти величину φ угла между прямыми AC и BC;

ж) найти координаты точки O', симметричной точке O относительно прямой AB.

Алгоритм нахождения общего уравнение серединного перпендикуляра к стороне треугольника

1. Находим координаты точки М- середины стороны

2. Искомый серединный перпендикуляр MN проходит через точку М перпендикулярно вектору (стороне треугольника). Находим координаты стороны. ВС – нормаль для серединного перпендикуляра.

3. Запишем общее уравнение нормали с неизвестным свободным членом:

$Ax+By+C=0$

4. Свободный член С выбираем так, чтобы серединный перпендикуляр проходил через точку М. Подставляем вместо x и y координаты точки М. Находим значение С.

5. Записываем общее уравнение серединного перпендикуляра.

Нахождение общего уравнения серединного перпендикуляра к стороне
Дано; A(1,5) B(13,0), C(5,8)

а) Найдем сначала координаты точки M – середины стороны BC. По формуле (1.3): $M(\frac{13+5}{2};\frac{0+8}{2})$, т.е. $M(9;4)$. Искомый серединный перпендикуляр MN проходит через точку M перпендикулярно вектору $\overline{BC}=(5-13 \quad 8-0)=(-8 \quad 8)$. Значит, вектор $\overline{BC}$ служит нормалью для этой прямой. Поэтому ее уравнение имеет вид $-8x+8y+c=0$. Свободный член c выбираем так, чтобы прямая MN проходила через точку M: $(-8)\cdot 9+8\cdot 4+c=0$. Отсюда $c=40$. Сократив уравнение $-8x+8y+40=0$ на (-8), получаем $x-y-5=0$ – общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC.

Составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану АМ. Составить общее уравнение прямой, содержащей высоту АН. Дано; А(1,5) В(13,0), С(5,8) ВС(-8,8)

б) Найдем направляющий вектор $\overline{AM} = (9-1 \quad 4-5) = (8 \quad -1)$. Запишем каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM. Эта прямая проходит через точку A, а вектор $\overline{AM}$ является направляющим для нее. Получаем $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-5}{-1}$.

в) Прямая, содержащая высоту AH, проходит через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$. Следовательно, вектор $\overline{BC}$ – нормаль. Поэтому для этой прямой можно записать общее уравнение. Сначала запишем уравнение $-8(x-1)+8(y-5)=0$, упрощая которое, приходим к общему уравнению $x-y+4=0$.

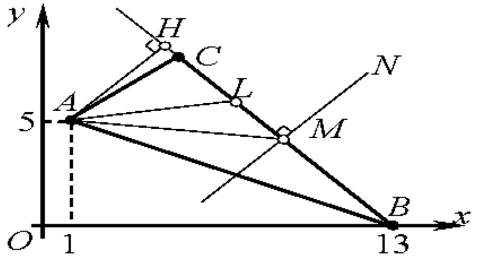

Рис. 3.12

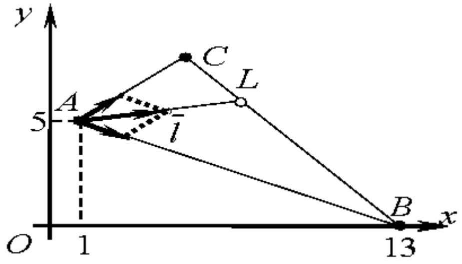

Рис. 3.13

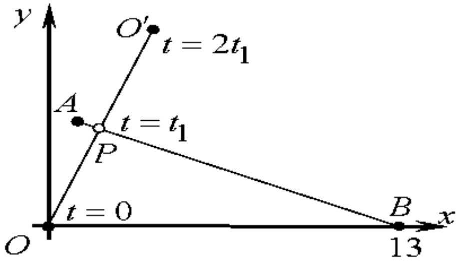

Рис. 3.14

г) Найдем сначала направляющий вектор $\overline{l}$ прямой, содержащей биссектрису AL. Для

Составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL

г) Найдем сначала направляющий вектор $\bar{l}$ прямой, содержащей биссектрису AL. Для этогс

можно отложить от вершины A два единичных вектора $\frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}$, $\frac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}$ и построить на них ромб

(изображенный на рис. 3.13 пунктирными линиями). Диагональ ромба является биссектрисой

угла A, поэтому вектор $\bar{l} = \frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} + \frac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}$ будет направляющим для биссектрисы AL. Находим

координаты и длины векторов $\overline{AB} = (13-1 \quad 0-5) = (12 \quad -5)$, $\left|\overline{AB}\right| = 13$ и

$\overline{AC} = (5-1 \quad 8-5) = (4 \quad 3)$, $\left|\overline{AC}\right| = 5$. Следовательно, $\bar{l} = \frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} + \frac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{112}{65} \\ \frac{14}{65} \end{pmatrix}$.

Записываем параметрическое уравнение прямой AL

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{112}{65}t, \\ y = 5 + \frac{14}{65}t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$.

Найти расстояние от вершины до прямой (т.е. высоту треугольника)

д) Составим уравнение прямой BC. Поскольку известен направляющий вектор $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$, то сначала запишем каноническое уравнение $\dfrac{x-5}{-8} = \dfrac{y-8}{8}$. Затем, упрощая его, получим общее уравнение прямой BC: $x + y - 13 = 0$. Искомое расстояние находим по формуле (3.1):

$$AH = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 13|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = 3{,}5\sqrt{2}.$$

Найти величину угла между прямыми

е) Угол между прямыми AC и BC вычисляем по формуле (3.2). Поскольку известны направляющие векторы $\overline{AC} = (4 \quad 3)$ и $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$ этих прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{|4\cdot(-8)+3\cdot 8|}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{8^2+8^2}} = \frac{8}{5\cdot 8\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$. Заметим, что этот угол острый, а угол C треугольника ABC тупой.

Алгоритм нахождения координат точки, симметричной точке относительно прямой

1. Составляем уравнение общее уравнение прямой.

Если известен направляющий вектор, то сначала записываем каноническое уравнение прямой, а затем общее уравнение прямой. Коэффициенты перед x и y - это координаты нормального вектора прямой.

2. Составляем параметрическое уравнение прямой OO”, проходящей через начало координат, перпендикулярно AB. Направляющий вектор этой прямой перпендикулярен вектору AB. Этот вектор находится из условия (p,AB)=0.

3.Записываем параметрическое уравнение прямой (выражение x и y через параметр t).

4. Подставляем выражения x и y в общее уравнения прямой.

5.Находим параметр t.

6.Подставляем его в параметрическое уравнение. Это есть координаты точки, симметричной относительно заданной прямой

Найти координаты точки , симметричной точке относительно прямой

ж) Для нахождения координат точки O' составим общее уравнение прямой AB. Поскольку известен направляющий вектор $\overline{AB} = (12 \quad -5)$, то сначала составляем каноническое уравнение: $\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y-5}{-5}$. Затем, преобразовывая его, получаем общее уравнение прямой AB: $5x + 12y - 65 = 0$. Теперь составим параметрическое уравнение прямой OO', проходящей через начало координат O, перпендикулярно прямой AB. Направляющий вектор $\overline{p}$ этой прямой перпендикулярен вектору $\overline{AB} = (12 \quad -5)$. Можно взять, например вектор $\overline{p} = (5 \quad 12)$, который удовлетворяет условию ортогональности $(\overline{p}, \overline{AB}) = 0$. Тогда параметрическое уравнение прямой OO' будет следующее

$$\begin{cases} x = 5t, \\ y = 12t, \end{cases} \qquad (3.4)$$

где $t \in \mathbb{R}$. Найдем точку P пересечения прямых OO' и AB (рис. 3.14). Для этого подставим выражения (3.4) в общее уравнение прямой AB:

$$5(5t) + 12(12t) - 65 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 169t = 65 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{5}{13}.$$

Если в точке O соответствует нулевое значение параметра $t = 0$, а точке P – значение параметра $t = t_1 = \frac{5}{13}$, то точке O' будет соответствовать удвоенное значение $t = 2t_1 = \frac{10}{13}$. Это следует из равенства $OO' = 2 \cdot OP$. Подставляя $t = \frac{10}{13}$ в (3.4), находим координаты точки O': $x = 5 \cdot \frac{10}{13} = \frac{50}{13}$, $y = 12 \cdot \frac{10}{13} = \frac{120}{13}$, т.е. $O'(\frac{50}{13}, \frac{120}{13})$.