Интеграл Лебега по измеримому в смысле Лебега множеству.

Определение

Пусть функция f определена на измеримом множестве E. Рассмотрим вспомогательную функцию f_E такую, что $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$ и $f_E(x) = 0$ при $x \notin E$. Если функция f_E интегрируема (на $\mathbf{R}$), то будем считать, что f *интегрируема на* E, и будем полагать по определению: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_E(x)dx = \int\limits_E f(x)dx$. Вместо записи $\int\limits_E f(x)dx$ будем употреблять также более короткую: $I_E(f)$.

- Пусть f интегрируема и неотрицательна на измеримом множестве E, тогда множество E_a тех x из E, при которых $f(x) > a$, измеримо при любом a >0. Причем справедливо следующее равенство:

$$|E_a| \leqslant \frac{1}{a} \; I_E(f).$$

Эквивалентные функции

- Функции f и g называются **эквивалентными (f~g)** на множестве E, если они определены на этом множестве и принимают почти всюду на E одинаковые значения.

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x) \qquad \log_a(1+\alpha(x))\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2} \qquad (1+\alpha(x))^m-1\sim m\alpha(x)$$

- Свойства эквивалентных функций:
- **1) рефлексивные**
- **2) симметричные**
- **3) транзитивные**

- **Доказательство транзитивности:**
- Пусть f~ g, g~ h на множестве E.
- Обозначим через E_1 множество, на котором f(x)≠g(x), через E_2 g(x)≠h(x).следовательно $|\mathrm{E}_1| = |\mathrm{E}_2| = 0$.
- Если x не принадлежит G, равное пересечению $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$. тогда f=g, g=h,f=h.
- Значит, f≠h на подмножестве F множества G, но так как G нулевая мера, то и F=0.
- Значит, f~ h.

- Теорема:
  - Если функция f эквивалентна 0 на измеримом множестве E, то она интегрируема на E, причем $I_E(f) = 0$