Теория линейных электрических цепей

Часть1.

Литература

<u>ОСНОВНАЯ</u>

- 1. Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи: Учеб./ Е.А. Волков, Э.И. Санковский, Д.Ю. Сидорович; Под общ. ред. В.А.Кудряшова. – М.: Маршрут, 2005.

<u>ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ</u>

- Каллер М.Я., Соболев Ю.В., Богданов А.Г. Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. – М.: Транспорт, 1987.
- Бессонов Л.А. Линейные электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1983.

Структура курса

1. Цепи с сосредоточенными параметрами (2 семестр 2 курса). *Лекции, практические занятия, контрольные задания, тесты, <u>ЗАЧЁТ.</u>*
2. Цепи с сосредоточенными параметрами (1 семестр 3 курса). *Лекции, практические занятия, контрольные задания, тесты, курсовой проект, <u>ЭКЗАМЕН.</u>*

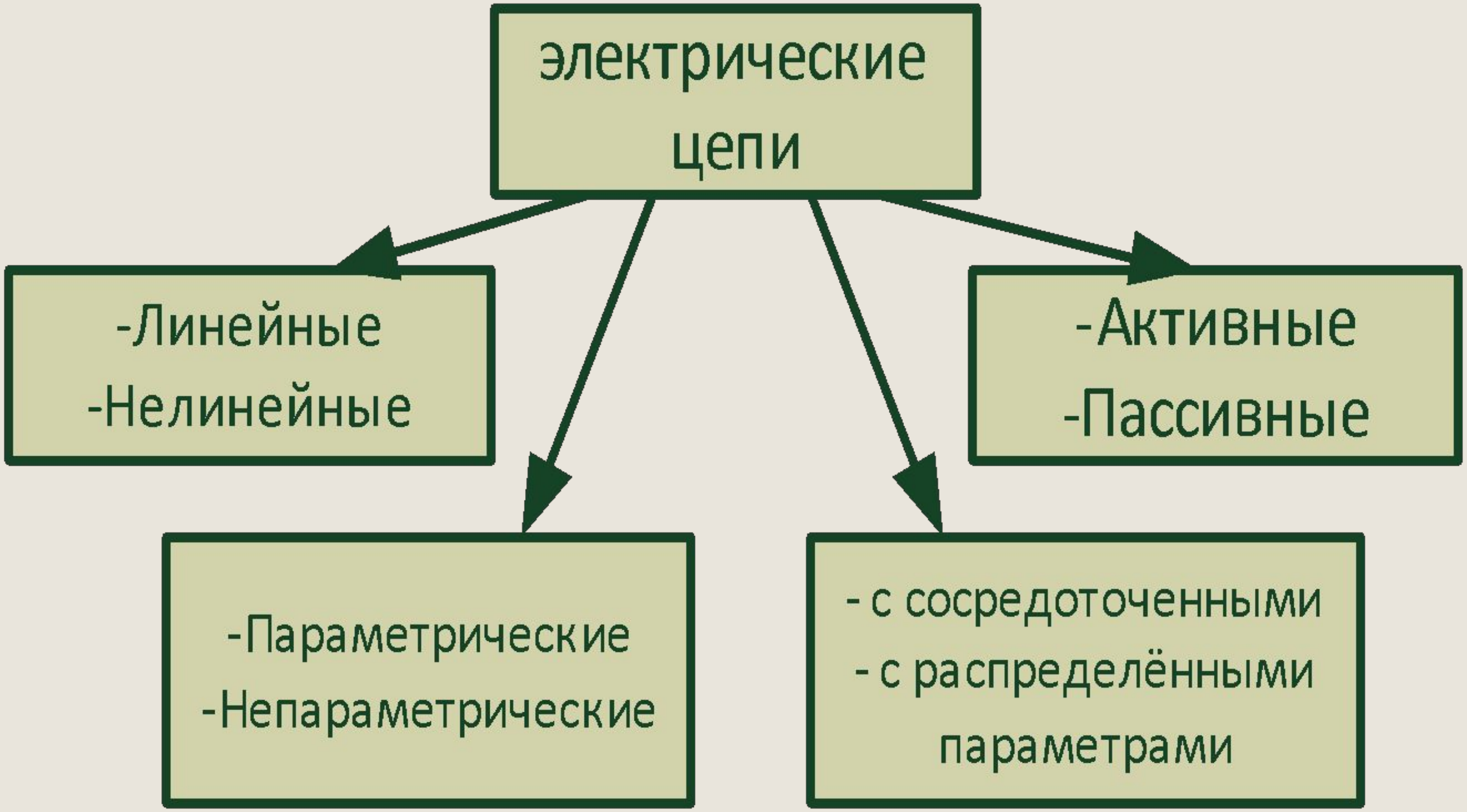
Лекция 1. Введение.

Основная задача ТЦ- изучение методов ***анализа и синтеза*** электрических цепей.

- Задача анализа - расчет электрических величин для заданной цепи.
- Задача синтеза – создание электрической цепи с заданными параметрами

Электрическая цепь - совокупность элементов и устройств, образующих путь или пути для электрического тока

Классификация цепей



Линейные цепи

- Цепи, составленные из линейных элементов. Связь между Э, U, I выражается линейными уравнениями (т. е. уравнениями первой степени). Поэтому для их расчета применяются аналитические методы с обычными алгебраическими преобразованиями.

Нелинейные цепи

- Цепи в которые входят пассивные элементы, электрическое сопротивление которых существенно зависит от тока или напряжения, в результате чего ток не находится в прямопропорциональной зависимости по отношению к напряжению.

Примечание

- И к линейным и к нелинейным цепям применимы законы Кирхгофа, которые имеют общий характер. Но к нелинейным цепям ***не применим*** принцип наложения.
- Для них существуют аналитические методы: графические, графо-аналитические, итерационные.

- Активными называются цепи, содержащие источники электрической энергии.
- Параметрическими - электрические цепи, в которых хотя бы один из параметров (R,L,C) является переменным во времени.

Цепи с сосредоточенными параметрами

- $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = f(t),$

где :

$f(t)$ - внешнее воздействие

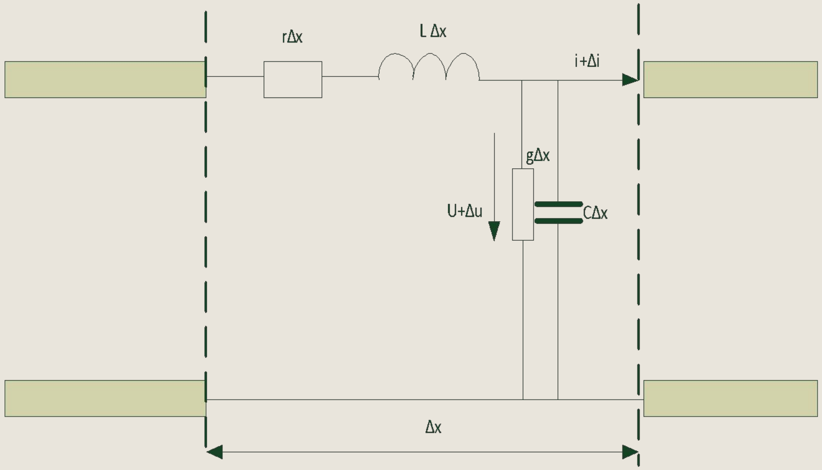
y –реакция цепи на данное внешнее воздействие

n - порядок дифференциального уравнения

a_i - коэффициент дифференциального уравнения

- Цепи с распределённым параметрами – цепи, в которых ЭМ поле и потери равномерно или неравномерно распределены вдоль всей цепи, и в результате- напряжения и токи на различных участках даже неразветвленной цепи отличаются друг от друга.

Участок цепи (рельсовая цепь, жилы кабеля связи....)



- $i=i(x,t)$
- $u=u(x,t)$

- На основании закона Кирхгофа:

$$\Delta u = \left(ri + L\frac{di}{dt}\right)\Delta x$$

$$\Delta i = \left(gu + C\frac{du}{dt}\right)\Delta x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

Классификация цепей по типу дифференциального уравнения не является единственным признаком.

В зависимости от ***топологических особенностей*** электрические цепи бывают

- планарные, непланарные (объемные);
- разветвленные и неразветвленные;
- простейшие (одноконтурные, двухузловые) и сложные (многоконтурные, многоузловые).

По ***энергетическим свойствам*** цепи могут быть активными и пассивными.

- Активные содержат активные элементы-источники, пассивные не содержат источников.

По ***числу внешних выводов*** электрические цепи могут быть двухполюсниками, четырехполюсниками, многополюсниками.

Элементы электрической цепи

- Элементы электрической цепи
  - Источники энергии
    - Первичные — Преобразуют различные виды энергии в электрическую
    - Вторичные — Выпрямители, стабилизаторы
  - Потребители энергии — Преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии

Допущение:
Каждый элемент цепи полностью характеризуется зависимостью между U и I на его зажимах, при этом внутренние процессы происходящие в элементе не рассматриваются

Элементы электрической цепи

- ***Активные*** **–**способны поставлять энергию в цепь.
- ***Пассивные*** **–**способны накапливать и расходовать энергию.

Идеальные **-**способны накапливать или расходовать энергию.

Идеальный активный элемент:

- независимый источник напряжения (э.д.с. или $u(t)$, $R_{вн}=0$)
- независимый источник тока (I, $i(t)$, $R_{вн}=\infty$)
- зависимые источники напряжения или тока, управляемые напряжением или током.

Параметры пассивных элементов:

R, L, C

(Идеальные пассивные элементы имеют только 1 параметр)

- Реальная линейная цепь включает в себя резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы, диоды, транзисторы, операционные усилители, источники питания и сигнала и т. д.

- В каждом из элементов электрической цепи при протекании тока происходят электромагнитные процессы, связанные с превращением подводимой к элементу энергии в энергию магнитного либо электрического поля, либо в тепловую энергию.

Каждый из процессов в цепях связывают с определенным элементом:

- например, *превращение энергии в тепло* связано с элементом “сопротивление”,
- *запасание магнитной энергии* - с элементом “индуктивность”, “взаимная индуктивность”,
- *запасание электрической энергии* - с элементом “емкость”.
- Поэтому модели реальных элементов должны отражать протекающие в них процессы.

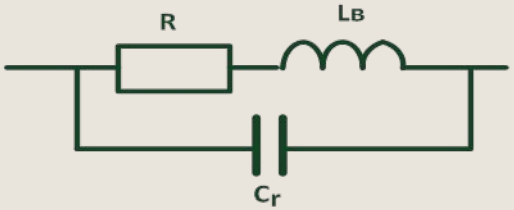
Идеальный резистивный элемент

- Обладает только свойством рассеивания энергии.
- Математическая модель определяется законом Ома ($u=iR$) и называется ВАХ $R=\frac{U}{i}$ (Ом, кОм, мОм)
- Величина, обратная сопротивлению называется проводимостью резистора (G)-измеряется в Сименсах (См).
- Мощность, рассеиваемая резистивным элементом в виде тепла, равна: $p=ui=Ri^2=Gu^2$

Схема замещения резистора

- основная функция резистора – превращение электрической энергии в тепло
- он имеет выводы, которыми он устанавливается в схему и которые имеют индуктивность. Кроме того, между этими выводами существует емкость.

- Модель резистора



Идеальная индуктивность

- Согласно закону электромагнитной индукции, напряжение на индуктивном элементе пропорционально скорости изменения тока в нём:

$$U=\frac{d\Psi}{dt}=L\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

При $i=const$ $u=0$ (при включении L в цепь постоянного тока, свойства L эквивалентны К.З. цепи).

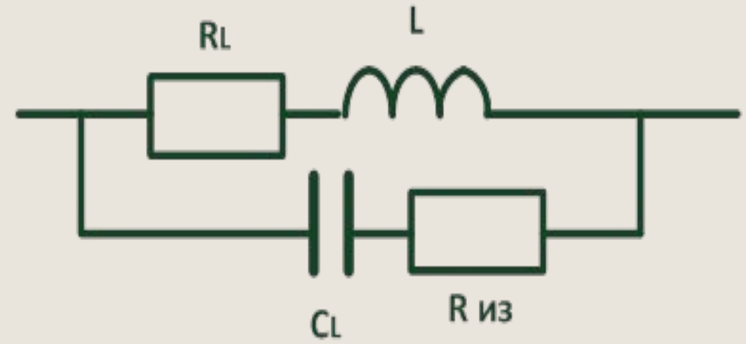
- Мгновенная мощность эл. колебаний в L под действием запасённой энергии $p=ui= Li\,\frac{di}{dt}$ (2)

Отсюда: энергия

$$W_L=\int_{-\infty}^{\infty} pdt = Li\,di=\frac{Li^2}{2} \qquad (3)$$

Так как направления u и i могут не совпадать, то, согласно (2), $p>0$ (L потребляет энергию); $p<0$ (L отдаёт энергию).

Индуктивность



- модель индуктивной катушки
- где R_L – сопротивление провода намотки, $R_{из}$ – сопротивление изоляции, C_L – межвитковая емкость.
- Индуктивный элемент обладает только свойством накопления энергии магнитного поля.
- Математическая модель L – это <u>*вебер-амперная характеристика*</u> (зависимость суммарного магнитного потока, образованного в витках катушки (потокосцепление) от величины протtкающего через катушку тока i.
- $\Psi = iL$ $\quad L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\sum_{n-1}^{\omega} \psi_n}{i}$
  - n-номер витка с которым сцепляется поток ψ_n
  - ω – число витков катушки

Ёмкостной элемент

- Обладает только свойством накопления энергии электрического поля.
- Математическая модель –вольт-кулоновская характеристика $q = Cu \quad C = \frac{q}{u} \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$ (4)
- ток в емкостном элементе пропорционален скорости изменения приложенного к нему напряжения.
- Если $u = const$, то $i = 0$ (в цепи постоянного тока ёмкость- эквивалент разрыва цепи (ХХ).
- Мгновенная мощность $p = ui = uC\frac{du}{dt}$ (5)

Отсюда: энергия

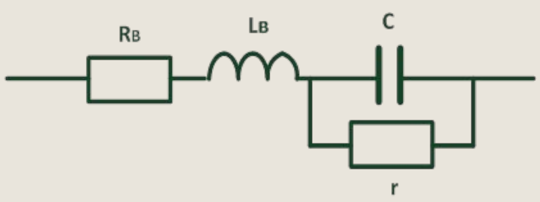
$$W_C = \int_{-\infty}^{\infty} p dt = C \int_{-\infty}^{\infty} u du = C\,\frac{u^2}{2} \quad (6)$$

Если $p > 0$, то С накапливает энергию

$p < 0$, то С –отдаёт энергию.

Конденсатор

- имеет выводы, с помощью которых он устанавливается в устройство, следовательно, он имеет индуктивность выводов.
- Кроме того, в нем за счет переменного электрического поля происходит переполяризация диэлектрика, на что затрачивается энергия. Это явление учитывается наличием в модели конденсатора сопротивления r, сопротивление выводов учитывается сопротивлением Rв.
- Модель конденсатора



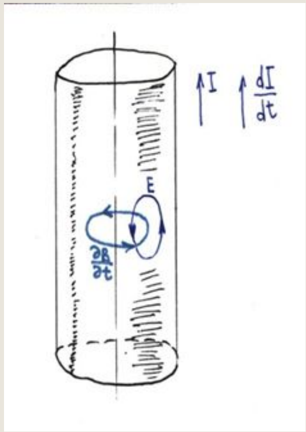
- В моделях R, L, C – это идеальные элементы (сопротивление, индуктивность, емкость), т.е. в них происходит только преобразование энергии внешнего источника в тепло, в магнитную и электрическую энергию, соответственно;

- $L_В$, C_R, $R_В$, r, R_L, C_L, $R_{из}$ – это тоже идеальные элементы, они неизбежно сопровождают R, L, C, поэтому они называются паразитными.

- В зависимости от диапазона частот, в котором используются элементы, их модели могут быть упрощены.

Скин-эффект

- Поверхностный эффект, скин-эффект — эффект уменьшения амплитуды электромагнитных волн по мере их проникновения вглубь проводящей среды. В результате этого эффекта, например, переменный ток высокой частоты при протекании по проводнику распределяется не равномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое.



Вокруг проводника с током имеется магнитное поле, силовые линии которого являются концентрическими окружностями с центром на оси проводника.

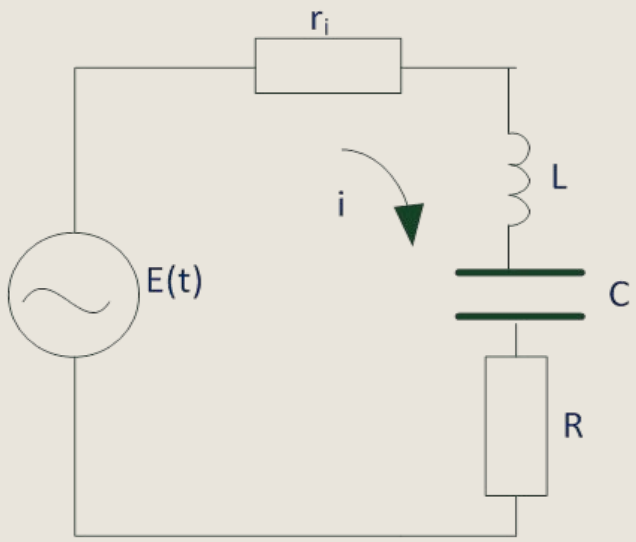
В результате увеличения силы тока возрастает индукция магнитного поля, а форма силовых линий при этом остаётся прежней. Поэтому в каждой точке внутри проводника производная dB/dt направлена по касательной к линии индукции магнитного поля и, следовательно, линии dB/dt также являются окружностями, совпадающими с линиями индукции магнитного поля.

Изменяющееся магнитное поле по закону электромагнитной индукции $\mathrm{rot}\, E = -dB/dt$ создаёт электрическое индукционное поле, силовые линии которого представляют замкнутые кривые вокруг линии индукции магнитного поля.

Вектор напряжённости индукционного поля в более близких к оси проводника областях направлен противоположно вектору напряжённости электрического поля, создающего ток, а в более дальних — совпадает с ним. В результате плотность тока уменьшается в приосевых областях и увеличивается вблизи поверхности проводника, то есть возникает скин-эффект.

50 Гц - 9,34 мм
10МГц- 0,021 мм

Последовательный колебательный контур

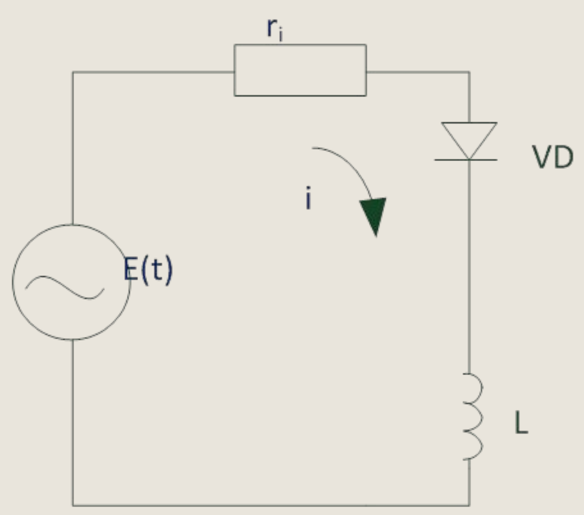
- 

- $L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt+(r_i+R)i=E(t)$

Цепь с диодом

- $U = \frac{1}{b_0}\ln(\frac{e+e_0}{e_0}) \rightarrow L\frac{di}{dt}+\mathrm{ri}+\frac{1}{b_0}\ln\frac{e+e_0}{e_0} = \mathrm{e(t)}$

Нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка



Электромагнитные поля и электрические цепи

- Электромагнитное поле –особая форма материи. Посредством ЭМ поля осуществляется взаимодействие между зараженными частицами. Описывается ЭМ поле уравнениями Максвелла.

Уравнения Максвелла

- ***<u>1 уравнение Максвелла</u>***

$$\boxed{\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

E-векторное электрическое поле

P-суммарный заряд

ε_0- диэлектрическая постоянная

(ε_0 =8,85418782…..10^{-12} Ф/м)

Уравнения Максвелла

- ***3 уравнение Максвелла***

$$\nabla \mathrm{B} = 0$$

В-векторное магнитное поле

- ***2 уравнение Максвелла***

$$\nabla \mathrm{x} E = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$$

Уравнения Максвелла

- ***4 уравнение Максвелла***

$$\nabla x B = {}^{i}/_{\varepsilon_0 c^2} + (1/c^2)\delta E/\delta t$$

$\delta E/\delta t$ - частная производная E по времени

2. Режим гармонических колебаний в линейных электрических цепях

- Простейший вариант периодических колебаний - ***гармонические***, когда колеблющаяся величина **s(t)**, изменяется на интервале $-\infty<t<\infty$ по знаку синуса или косинуса.
- если временной интервал ограничен $t_1 \leq t \leq t_2$ то это - «отрезок гармонического колебания» и он обладает отличными свойствами

Важность гармонических колебаний

- Широко используются для передачи сигналов и электрической энергии
- Удобно использовать как испытательный сигнал
- Это единственный тип колебаний, форма которого не изменяется при прохождении через любую линейную систему
- Любое негармоническое колебание может быть представлено в виде суммы гармонических

Основные определения

- $S(t)=S_m\cos(\omega t+\phi_0)=S_m\cos\Theta(t)$
- $\boldsymbol{S_m}$- амплитуда колебаний - наибольшее по абсолютному значению отклонение колеблющейся величины.
- $\boldsymbol{\Theta(t)=(\omega t+\phi_0)}$ – периодически изменяющийся аргумент функции $S(t)$ называемый мгновенной фазой или просто фазой колебания. Выражается в радианах. (1 рад=$57{,}3^0$)
- $\boldsymbol{\phi_0}$ -начальная фаза (рад)-значение мгновенной фазы при $t=0$, т.е. $\Theta(0)=\phi_0$

Основные определения

- $\boldsymbol{\omega = d\theta/dt}$ –круговая частота (угловая скорость)- определяет скорость изменения фазы, выражается в (рад/с), т.е. круговая частота численно равна изменению мгновенной фазы за единицу времени (сек).
- Т- период колебаний-наименьший интервал времени, через который процесс повторяется

$$s(t)=s(t \pm mT)$$

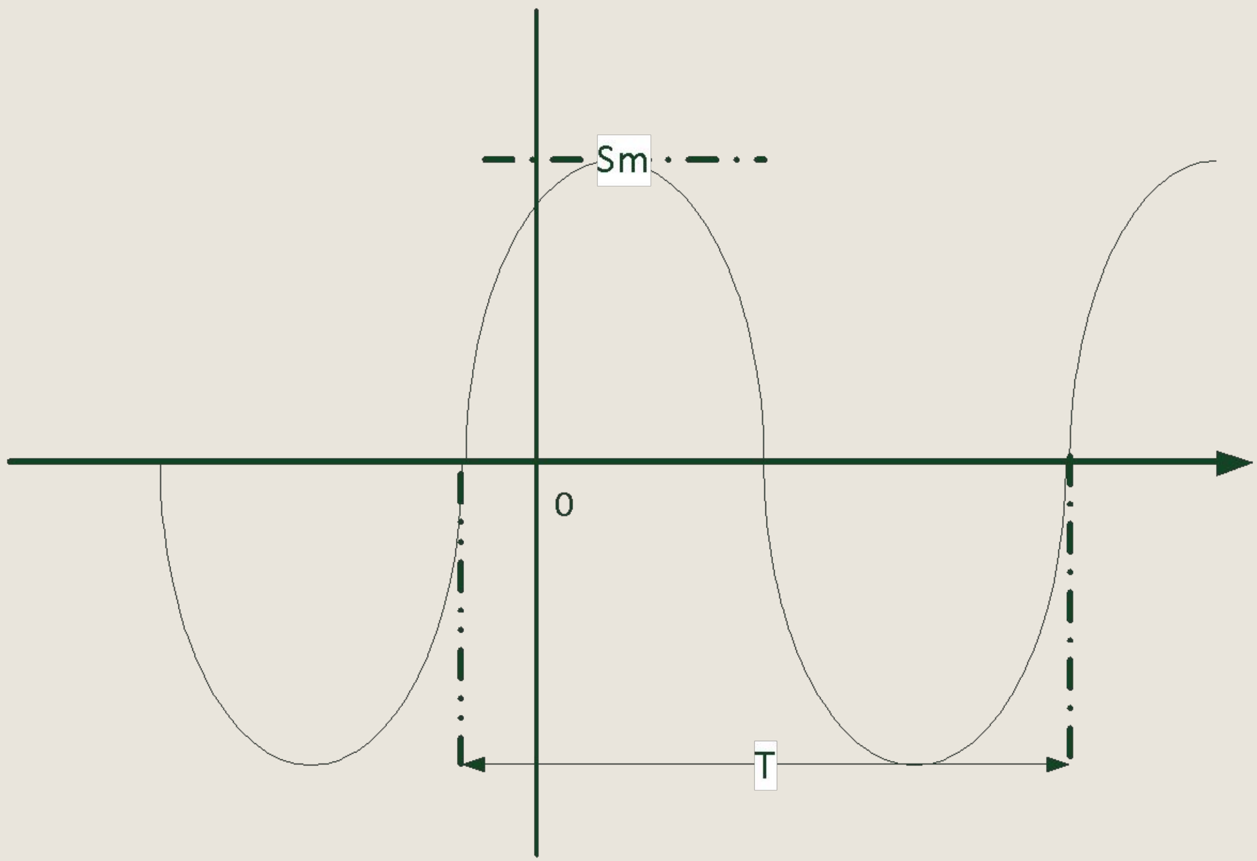
Этому периоду соответствует изменение фазы на 2π радиан.

$$2\pi=[\omega(t+T)+ \phi_0]- \omega(t+ \phi_0)= \omega T \qquad \omega= 2\pi/T= 2\pi f$$

$f=1/T$ –циклическая частота

$$\phi_{рад}= \pi\, \phi_{град}/180$$

Основные определения



Операции над гармоническими колебаниями

- Умножение на константу

$$s(t)=as_1(t)=aS_{m1}\cos(\omega t+\varphi_{01})$$

- Дифференцирование

$$s(t)=\frac{d}{dt}\left[S_{1m}\cos(\omega t+\varphi_{01})\right]=S_{1m}\frac{d}{dt}\left[\cos(\omega t+\varphi_{01})\right]=$$

$$=S_{1m}\left[-\omega\sin(\omega t+\varphi_{01})\right]=\omega S_{1m}\cos(\omega t+\varphi_{01}-\pi/2)=$$

$$=S_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Операции над гармоническими колебаниями

- Интегрирование

$$\int S_{m1}\cos(\omega t+\varphi_{01})dt=\frac{S_{1m}}{\omega}\sin(\omega t+\varphi_{01})=\frac{S_{1m}}{\omega}\cos(\omega t+\varphi_{01}-\frac{\pi}{2})=$$

$$=S_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$

- Алгебраическое сложение гармонических колебаний одинаковой частоты

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=S_{m1}\cos(\omega t+\varphi_{01})+S_{m2}\cos(\omega t+\varphi_{02})$$

$$S_m=\sqrt{S_{1m}^2+S_{2m}^2+2S_{1m}S_{2m}\cos(\varphi_{01}-\varphi_{02})}$$

$$-1\leq\cos(\varphi_{01}-\varphi_{02})\leq 1$$

$$S_m = \sqrt{S^2_{1m} + S^2_{2m} + 2\, S_{1m} S_{2m} \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}$$

$(-1 \le \cos(\phi_{01} - \phi_{02}) \le 1)$

- Если $\phi_{01} - \phi_{02} = 0$ -амплитуда максимальна

$S_m = S_{1m} + S_{m2}$

- Если $\phi_{01} - \phi_{02} = \pm\pi$ -амплитуда минимальна

$S_m = |S_{1m} - S_{m2}|$

- Если $\phi_{01} - \phi_{02} = \pm\pi/2$ - колебания находятся в квадратуре

$$S_m = \sqrt{S^2_{1m} + S^2_{2m}}$$

Выводы

- Линейные операции над гармонической функцией приводят только к изменению её *амплитуды и начальной фазы.*
- Наложение 2-х гармонических колебаний одной частоты создает гармоническое колебание той же частоты; амплитуда результирующего колебания зависит от соотношения начальных фаз слагаемых колебаний и находится в диапазоне:

$$|S_{1m}-S_{m2}| \le S_m \le |S_{1m}+S_{m2}|$$

- Наложение любого числа гармонических колебаний одной частоты создает гармоническое колебание той же частоты; амплитуду и начальную фазу результирующего колебания можно найти последовательно применяя формулы сложения для каждой пары колебаний.

Энергетические характеристики гармонических колебаний

- Мгновенная мощность
- Средняя мощность
- Действующее (эффективное) значение амплитуды напряжения и тока

Мгновенная мощность

- ***Мгновенная мощность*** гармонических колебаний при согласованных направлениях напряжения и тока определяется как произведение мгновенных значений напряжения и тока.
- $p(t)=u(t)i(t)=U_m I_m \cos(\omega t+\varphi_{0U}) \cos(\omega t+\varphi_{0i})$

  $(\cos x \cos y=1/2\cos(x+y)+1/2 \cos (x-y))$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi_{0u} - \varphi_{0i})+\frac{U_m I_m}{2}\cos(2\omega t+\varphi_{0u}+ \varphi_{0i})$$

Потребляемая мощность содержит постоянную составляющую, относительно которой она колеблется с удвоенной частотой 2ω.

Средняя мощность

- Средняя (активная) мощность произвольных колебаний определяется как отношение энергии, подведённой к цепи за некоторый промежуток времени, к длительности этого промежутка t_2-t_1 при условии, что $t_2 \to \infty$
  - $P_{ср}=(U_m I_m \cos\phi)/2$

где $\phi = \phi_{0u} - \phi_{0i}$

- Средняя, или активная мощность пропорциональна амплитудам напряжения и тока и косинусу сдвига фазы между ними
- Чем меньше разность фаз, тем больше активная мощность
- Средняя мощность, потребляемая цепью равна алгебраической сумме средних мощностей, потребляемых в каждом элементе сети.

Среднеквадратичные значения напряжений и токов(действующие, эффективные)

- $U=\sqrt{\lim_{t2\to\infty}\left(\frac{1}{t2-t1}\right)\int_{t1}^{t2} u^2\,(t)dt}$

$I=\sqrt{\lim\limits_{t2\to\infty}\left(\frac{1}{t2-t1}\right)\int_{t1}^{t2} i^2\,(t)dt}$

- Для периодических сигналов

$U=\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)\int_{0}^{T} u^2\,(t)dt}$ $\qquad$ $I=\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)\int_{0}^{T} i^2\,(t)dt}$

Подставим мгновенные значения напряжений и токов, тогда:

$U_д=\frac{U_m}{\sqrt{2}}\approx 0,707\ U_m$ $\qquad$ $I_д=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\approx 0,707\ I_m$

Характеристики линейных электрических цепей

- Свойства электрической цепи определяются реакцией её на то или иное воздействие. В качестве воздействий в теории цепей принимают <u>элементарные, тестовые сигналы.</u>
- Реакции цепи на эти сигналы и определяют её характеристики.

<u>Тестовые сигналы должны отвечать следующим требованиям:</u>

1. Расчет или экспериментальное определение реакции цепи на их воздействие должны быть достаточно простыми.
2. Суммой тестовых сигналов должно определяться любое сложное воздействие на цепь.

Выполнение этих требований даёт возможность при расчете реакции цепи на сложное воздействие применять ***принцип суперпозиции***:

найдя реакцию цепи на тестовое воздействие (т. е. характеристику цепи) и представив реальный сигнал суммой тестовых сигналов, реакцию цепи на сложное воздействие получим как сумму реакций цепи на каждый тестовый сигнал в отдельности.

- Суммой гармонических функций можно представить как периодический так и непериодический сигнал, удовлетворяющий условиям Дирихле или абсолютной интегрируемости.

- Применение принципа наложения существенно облегчает решение многих задач в линейных электрических цепях.
- Весь дальнейший материал будет относиться к <u>линейным электрическим цепям с постоянными параметрами.</u>
- Применительно к этим цепям в их теории решаются две задачи: анализа и синтеза.
- <u>***Задача анализа***</u> формулируется следующим образом: задано входное воздействие и линейная цепь с параметрами элементов, требуется найти реакцию цепи на заданное воздействие.
- <u>***Задача синтеза***</u> формулируется следующим образом: заданы входное воздействие и требуемая реакция цепи на это воздействие; необходимо найти электрическую цепь и ее параметры, преобразующую входное воздействие в выходную реакцию.

В качестве тестовых сигналов применяют

- гармоническую функцию единичной амплитуды
  $u = cos\omega\, t$, $u = sin\omega t$ или $u = exp\, j\omega\, t$;
- единичный скачок (функцию Хевисайда) $\sigma(t)$;
- единичный импульс (дельта-функцию Дирака) $\delta(t)$;

Отрезок гармонического колебания

- Определяется общей функцией вида:

$$x(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t<0 \\ A_m \sin(\omega t+\varphi) \text{ или } A_m \cos(\omega t+\varphi) & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

- !!!!!!! Воздействия в виде отрезков гармонического колебания не являются периодическими, т.к. вблизи точки разрыва t=0 условие периодичности не выполняется.

Единичный скачок (функция Хевисайда)

-

$$\sigma(t)=\begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ ½ \text{ при } t=0 \\ 1 \text{ при } t>0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \sigma(t)=\begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ 1 \text{ при } t \geq 0 \end{cases}$$

Задержанный скачок:

$$\sigma(t-t_0)=\begin{cases} 0 \text{ при } t < t_0 \\ 1 \text{ при } t \geq t_0 \end{cases}$$

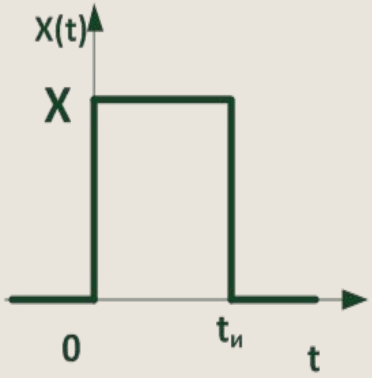
- Произведение любой ограниченной во времени функции $f(t)$ на функцию Хэвисайда представляет собой саму функцию при $t \geq t_0$ и равно нулю при $t < t_0$:

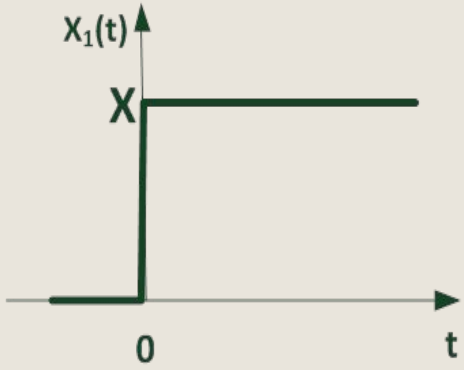
$$f(t) \cdot \sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < t_0 \\ f(t) \text{ при } t \geq t_0 \end{cases}$$

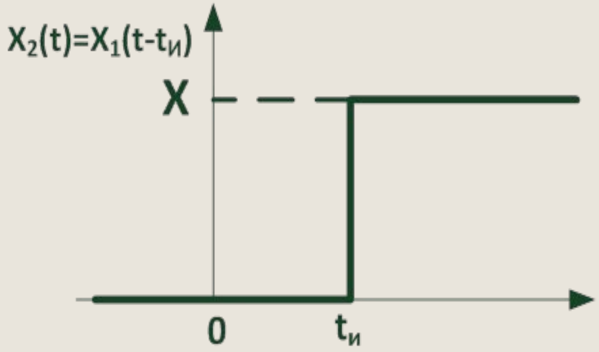
Единичный импульс (дельта-функция Дирака) δ(t)

- $x_1(t) = X \times \delta(t)$ $\qquad$ $x_2(t) = X \times \delta(t - t_и)$

- $x(t) = x_1(t)$-$x_2(t) = \mathrm{X}[\delta(t) - \delta(t - t_и)]$





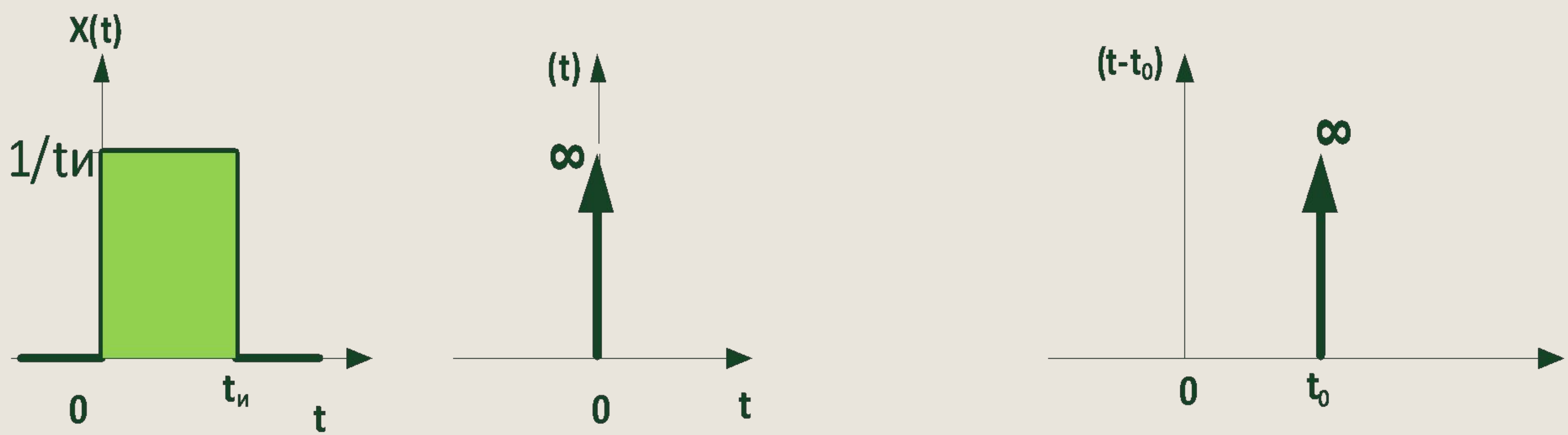


- Площадь импульса =1 и не зависит от его длительности.
- **<u>Df:</u>** импульс бесконечно малой длительности $(t_и \rightarrow 0)$ определяется функцией Дирака $\delta(t)$:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty \text{ при } t=0\\ 0 \text{ при } t\neq 0\end{cases}$$

Её задержанный вариант имеет вид:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty \text{ при } t=t_0\\ 0 \text{ при } t\neq t_0\end{cases}$$



Свойства *дельта-функции Дирака δ(t)*

- При всех значениях $t \neq t_0$ она равна нулю
- при $t = t_0$ принимает бесконечно большое значение
- Интеграл от *δ-функции* равен единице:

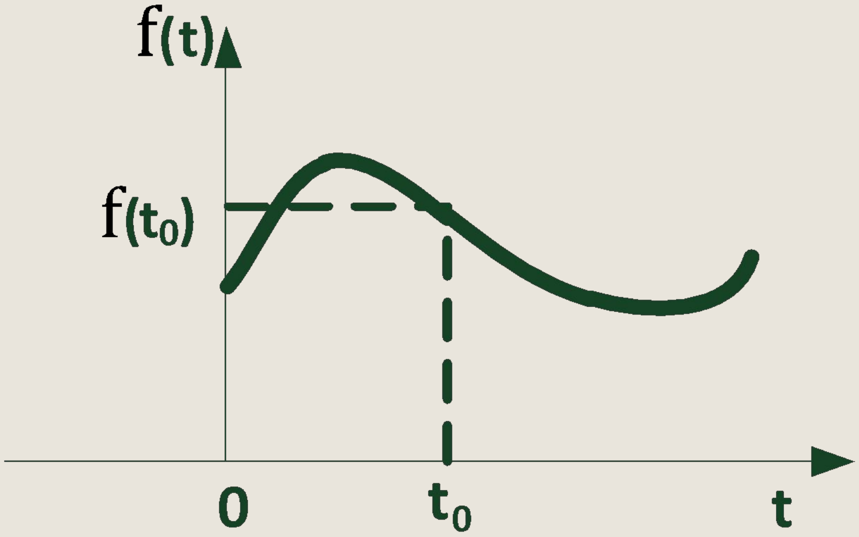
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\mathrm{dt} = 1;$$

- Для любой непрерывной на всей оси t функции f(t) имеет место равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)\ ;$$

Фильтрующее свойство δ-функции

- δ-функция ставит в соответствие каждой функции *f(t)* число $f(t_0)$, т.е. выбирает то значение функции *f(t)*, которое приходится на момент $t=t_0$



Так как δ(*t*) – симметричная функция, то

$$\int_{-\infty}^{0} \delta(t)dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t)dt,$$

т.е. δ(*t*) = δ(-*t*). Поэтому можно написать

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \begin{cases} 0; & \textit{ïðè} \;\; t < 0 \\ 1/2; & \textit{ïðè} \;\; t = 0 \\ 1; & \textit{ïðè} \;\; t > 0 \end{cases}$$

Сравним с единичным скачком

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0 \\ ½ \text{ при } t=0 \\ 1 \text{ при } t>0 \end{cases}$$

Связь единичного импульса и единичного скачка

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = \sigma(t)$$

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

Временное представление

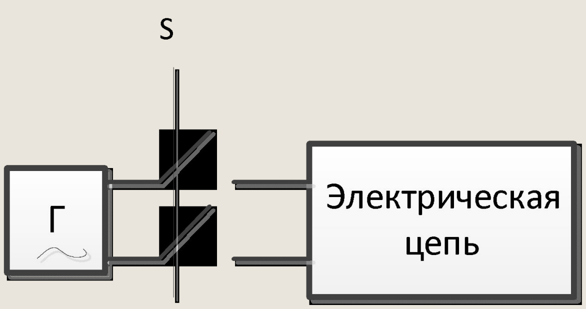
- При использовании импульсов в качестве элементарных составляющих сложных сигналов напряжения или тока, говорят о временном представлении сигналов.
- В этом случае применяется единичный импульс:

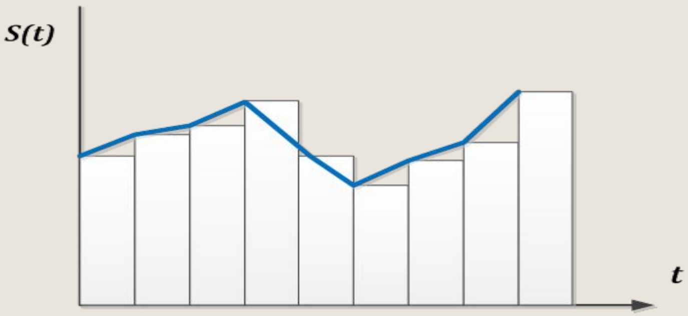
$u(t) = \int_0^t u(\tau)\delta(t-\tau)dt$ (Интеграл наложения или свёртка)

u(t) – сумма импульсов, поступающих в последовательные моменты времени.

Временное представление импульсных сигналов

- Непериодический непрерывный сигнал при сравнительно медленном изменении его напряжения можно представить последовательностью равноотстоящих узких импульсов.
- Эти импульсы получаются на входе цепи при подключении непрерывного сигнала через периодически замыкающийся контакт.





- Последовательность импульсов на выходе ключа:

U(t)= u(t)$\sum_{к} \delta(t-kT) = \sum_{k} u(kt)\delta(t-kT)$ -

это дискретный аналог интеграла наложения.

Спектр напряжения такой последовательности импульсов:

$F[U(t)] = \int_{0}^{\infty} \sum_{k} u(kT)\delta(t-kT)e^{-j\omega kt}\mathrm{dt} = \sum_{k} u(kT)e^{j\omega kT}$

Частотное представление импульсных сигналов

- Периодическая непрерывная функция времени имеет дискретный линейчатый непериодический спектр.
- На основании симметрии прямого и обратного преобразований Фурье можно утверждать, что

импульсная непериодическая последовательность (дискретный сигнал) имеет периодический непрерывный спектр.

Операторное представление импульсных сигналов

- ***Мгновенная мощность*** гармонических колебаний при согласованных направлениях напряжения и тока определяется как произведение мгновенных значений напряжения и тока.
- $p(t)=u(t)i(t)=U_m I_m \cos(\omega t+\varphi_{0U}) \cos(\omega t+\varphi_{0i})$

$(\cos x \cos y=1/2\cos(x+y)+1/2 \cos (x-y))$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi_{0u} - \varphi_{0i}) + \frac{U_m I_m}{2}\cos(2\omega t+\varphi_{0u} + \varphi_{0i})$$

Потребляемая мощность содержит постоянную составляющую, относительно которой она колеблется с удвоенной частотой 2ω.

Реакции на тестовые сигналы

1. Комплексная характеристика –реакция цепи при нулевых начальных условиях на гармонический тестовый сигнал.

2. Переходная характеристика - реакция цепи при нулевых начальных условиях на единичный скачок.

3. Импульсная характеристика - реакция цепи при нулевых начальных условиях на дельта функцию.

Перечисленные характеристики могут относиться как к характеристикам передачи (в этом случае они называются соответственно

1. комплексным коэффициентом передачи,
2. переходной передаточной
3. импульсной передаточной характеристиками цепи),

так и к входным и выходным функциям цепи (входные сопротивления и проводимости).

- Входные сопротивления вычисляются как отношение входного напряжения к входному току, а проводимость - величина, обратная входному сопротивлению.
- Выходное сопротивление вычисляется как отношение выходного напряжения к выходному току, а проводимость - величина, обратная сопротивлению.

Начальные условия

- $a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx = ax^{//}+bx^{/}+cx=f^{/}(t),$

где:

f(t)-воздействие;

X(t)-искомый ток или напряжение;

a,b,c –коэффициенты, соответствующие значениям реактивных и активных элементов.

Df: ***нулевыми начальными условиями*** называется такое состояние электрической цепи в момент t_0, при котором значения всех напряжений на ёмкостях и токов в индуктивностях равны нулю

$u_c(t_0)=0 \quad i_L(t_0)=0$

Комплексный коэффициент передачи цепи K(jω)

- Отношение комплексной амплитуды тока (напряжения) на выходе к комплексной амплитуде тока (напряжения) на входе цепи.

K(jω)=$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ K(jω)=$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$

Если подаётся тестовый сигнал $e^{j\omega t}$ единичной амплитуды, то $K(j\omega) = \dot{U}_2$

K(jω)=|K(jω)|e^(jφ(ω))

|K(jω)| - модуль комплексного числа

φ(ω) – аргумент комплексного числа

Комплексный коэффициент передачи цепи К(jω)

- |***К(jω)***| - модуль комплексного числа- называется ***АЧХ*** ***(амплитудно-частотной характеристикой цепи),*** ***она показывает зависимость коэффициента передачи от частоты.***
  - Аргумент **φ(ω)** называется ***фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) цепи;*** ***она показывает зависимость сдвига фаз между входным и выходным напряжением (током) от частоты.***
  - Величина $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = t_з$ называется ***групповым***

временем задержки (ГВЗ); она ***показывает время задержки сигнала с частотой ω при прохождении через цепь.***

Операторное, частотное и временное представление непрерывных и импульсных воздействий и реакций цепей.

- *элементарные тестовые сигналы:* $sin\omega t$, $cos\omega t$, $expj\omega t$, *единичный скачек* $\sigma(t)$ *и единичный импульс* (t).
- ***При расчете реакции линейной электрической цепи на сложное воздействие*** часто применяют принцип наложения, согласно которому решение этой задачи разделяется на три этапа:

1. Вычисление реакции цепи на каждый из простых сигналов
2. Представление сложного сигнала в виде суммы простых.
3. Вычисление реакции цепи на сложное воздействие путем суммиро вания реакций на все простые сигналы.

Лекция №2

«Канонические схемы двухполюсников RC, RL и LC, свойства их сопротивлений и проводимостей»

Определение двухполюсника

- Двухполюсником называется любая электрическая цепь, рассматриваемая относительно двух зажимов, т.е. имеющая два внешних зажима.

Классификация двухполюсников

По числу элементов

-одноэлементные

-двухэлементные

n- элементные

Линейные не содержат в своем составе нелинейных элементов, описываются линейным дифференциальным уравнением,

нелинейные.

По характеру элементов

-Реактивные

-Диссипативные

По наличию источников энергии

-Пассивные

-Активные

Классификация двухполюсников

- Двухполюсники бывают линейные и нелинейные. Двухполюсник будет линейным, если он не содержит в своем составе нелинейных элементов. Он описывается линейным дифференциальным уравнением.
- Если в составе двухполюсника есть нелинейные элементы, то он называется нелинейным. Такой двухполюсник описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

По характеру элементов

двухполюсники могут быть реактивные и диссипативные.

- **Реактивные** двухполюсники состоят только из индуктивностей и емкостей. В таких двухполюсниках не происходит потерь энергии на тепло.
- **Диссипативные** двухполюсники имеют в своем составе, кроме индуктивностей и емкостей, ещё и сопротивления, которые обуславливают в таких двухполюсниках превращение подводимой энергии в тепловую.

Активные и пассивные

Пассивный двухполюсник не имеет внутри себя источников энергии и поэтому мощность на нём не может превышать ту, которая к нему подведена.

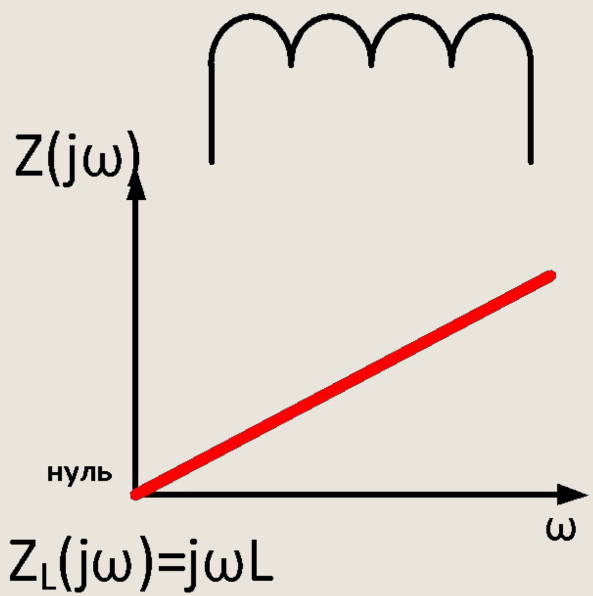
Активный двухполюсник имеет в своем составе источники энергии.

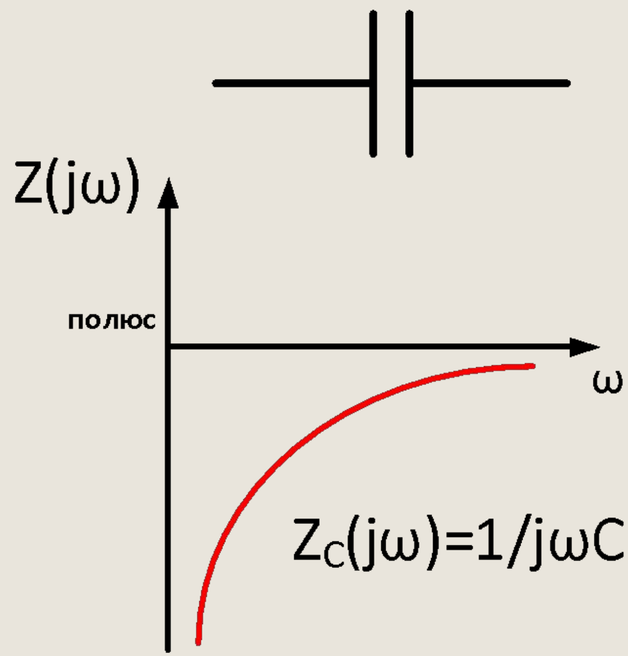
- Любой двухполюсник может быть охарактеризован своей входной функцией:

Это может быть:

- $Z(j\omega)$-входное сопротивление
- $Y(j\omega)$-входная проводимость

Одноэлементные двухполюсники

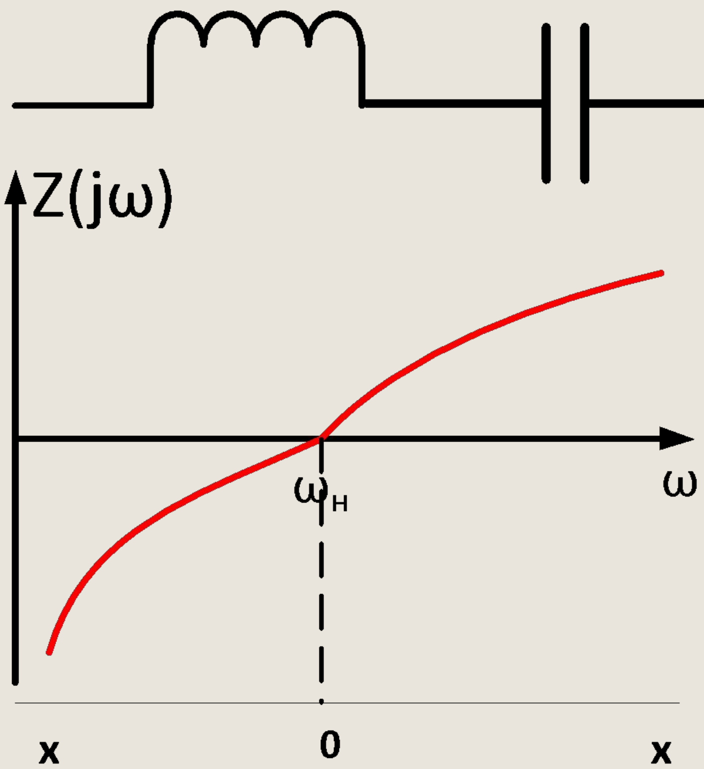


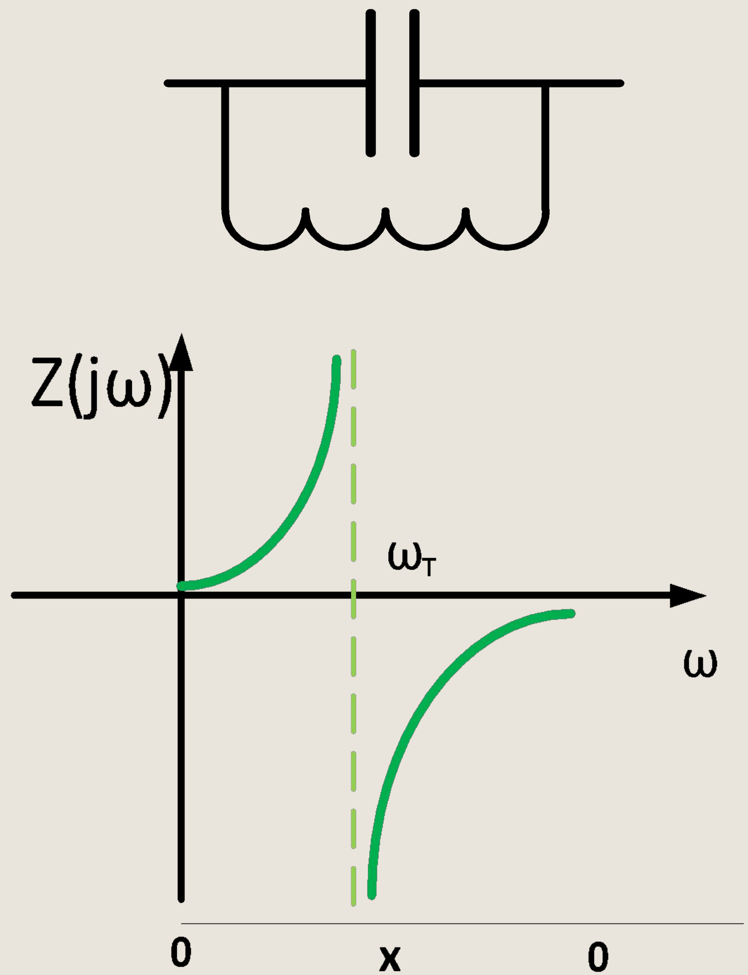


- Частоты, на которых величина входного сопротивления двухполюсника становится равной нулю ($Z_{вх}$=0)называются нулями входной функции.
- Частоты, на которых величина входного сопротивления двухполюсника стремится к бесконечности ($Z_{вх}=\infty$)называются полюсами входной функции.

Двухэлементные двухполюсники

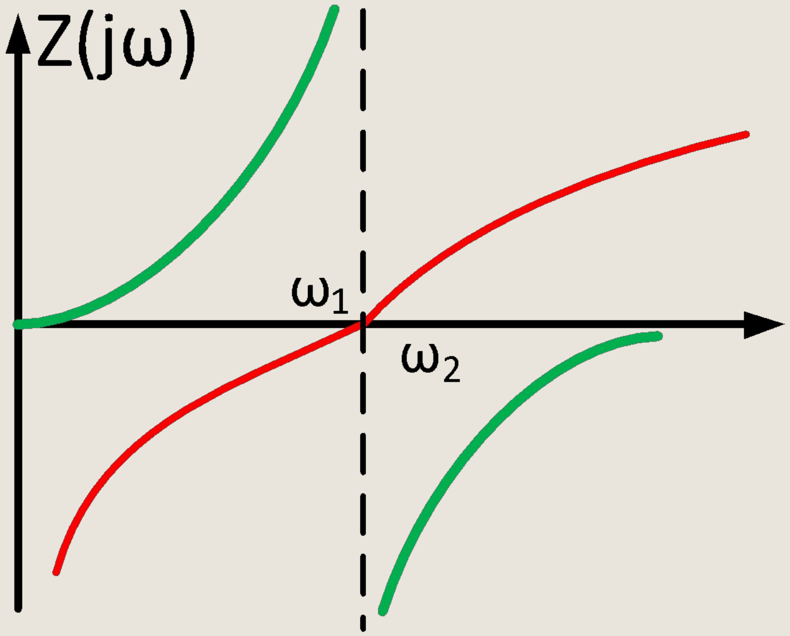
- Реактивные LC-двухполюсники



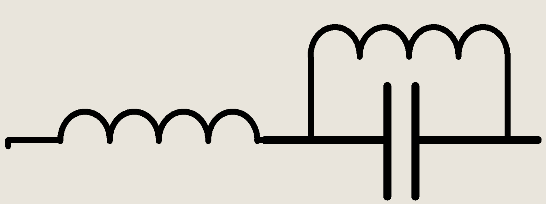


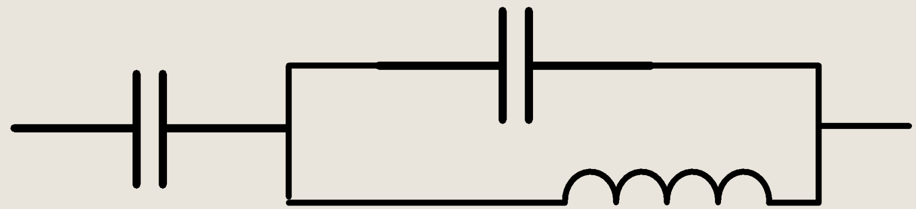
Взаимнообратные двухполюсники

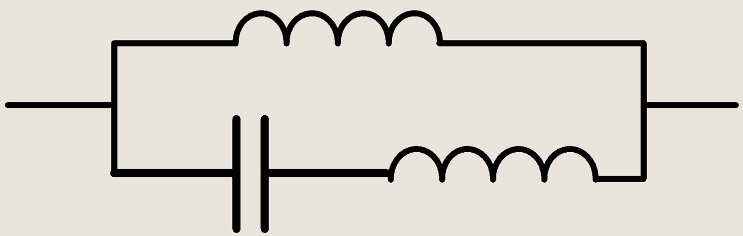
- Пусть ω1=ω2 $Z(\omega_1)\,Z(\omega_2)=R^2$

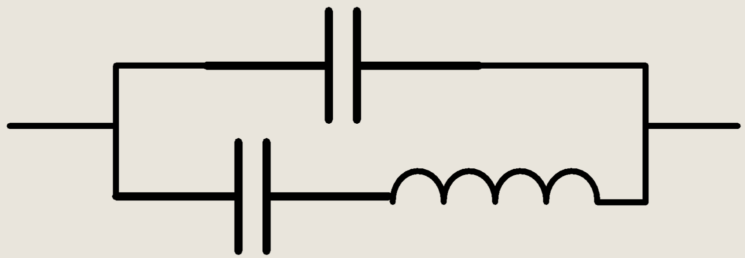


Трехэлементные двухполюсники



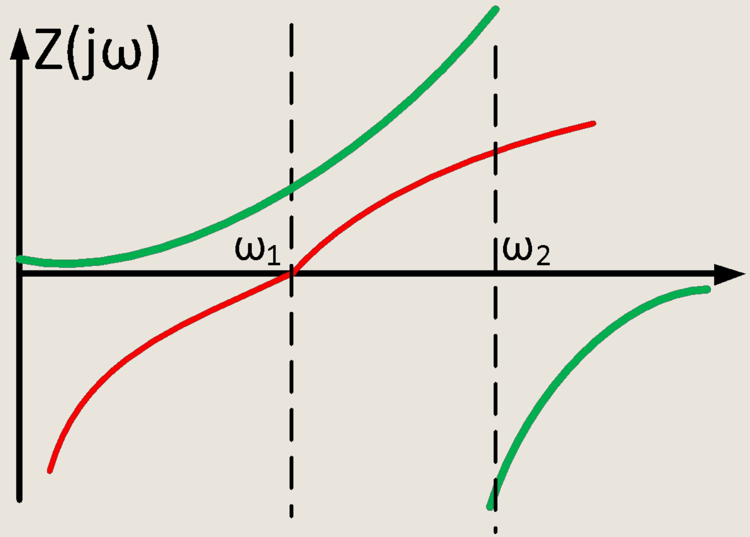






Потенциальнообратные

- ω1≠ω2



Общие свойства двухполюсников

1. Число резонансных частот любого реактивного двухполюсника на единицу меньше общего числа реактивных элементов схемы

2.Частоты резонансов напряжения и токов реактивного двухполюсника чередуются

3. При резонансе напряжений характер реактивности двухполюсника меняется с емкостного на индуктивный, при резонансе токов- с индуктивного на емкостной

4. Если в схеме двухполюсника есть путь протекания постоянного тока, то первым будет резонанс токов. Если такого пути нет-резонанс напряжений

Общие свойства двухполюсников

- 5. Зависимость сопротивления любого реактивного двухполюсника от частоты можно представить формулой Фостера:

$$Z(\omega) = \pm j\omega^{\pm 1}\mathrm{k}\frac{\prod_{p=1}^{m}(\omega^2-\omega^2{}_p)}{\prod_{\varrho=1}^{m}(\omega^2-\omega^2{}_\varrho)}$$

m- число резонансов напряжения

n-число резонансов токов