Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Практика №1
Вычислительная математика

Воскобойников С.П.
Доцент ВШ ПИ ИКНТ, к.ф.-м.н.
voskoboynikov@mail.ru

07.10.2020

Содержание

- Примеры иллюстрирующие трудности вычислений
- Вычисление серии интегралов
- Вычисление корней квадратного уравнения
- Вычисление exp(x)

Вычисление серии интегралов

Написать программу для вычисления интеграла

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 0,1,2,..20$$

двумя способами

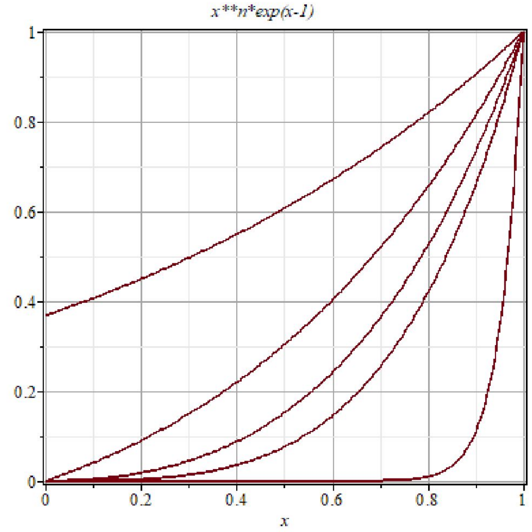
$$I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad I_0 = 1 - e^{-1}, \qquad n = 1,2,...,20$$

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}, \quad I_{21} = \frac{1}{2020}, \qquad n = 21,20,...,1$$

Сравнить результаты

Вычисление серии интегралов

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = \int_0^1 x^n de^{x-1} = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nI_{n-1}$$



$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$I_n = (-1)^n n! I_0 + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!}, \quad I_0 = 1 - e^{-1}, \; n = 0,1,2,\ldots$$

Вычисление серии интегралов. Способ 1

n	I_n
0	0.6321205
1	0.3678795
2	0.2642411
3	0.2072767
4	0.1708932
5	0.1455340
6	0.1267958
7	0.1124296
8	0.1005630
9	0.9493256E-01
10	0.5067444E-01
11	0.4425812
12	-4.310974
13	57.04266
14	-797.5973
15	11964.96
16	-191438.3
17	3254453.
18	-0.5858015E+08
19	0.1113023E+10
20	-0.2226046E+11

Вычисление серии интегралов. Способ 2.

n	I_n
20	0.4759547E-01
19	0.4762023E-01
18	0.5012525E-01
17	0.5277082E-01
16	0.5571936E-01
15	0.5901754E-01
14	0.6273217E-01
13	0.6694771E-01
12	0.7177325E-01
11	0.7735223E-01
10	0.8387707E-01
9	0.9161229E-01
8	0.1009320
7	0.1123835
6	0.1268024
5	0.1455330
4	0.1708934
3	0.2072766
2	0.2642411
1	0.3678795
0	0.6321205

Сравнение двух способов вычисления интегралов

n	I_n
0	0.6321205
1	0.3678795
2	0.2642411
3	0.2072767
4	0.1708932
5	0.1455340
6	0.1267958
7	0.1124296
8	0.1005630
9	0.9493256E-01
10	0.5067444E-01
11	0.4425812
12	-4.310974
13	57.04266
14	-797.5973
15	11964.96
16	-191438.3
17	3254453.
18	-0.5858015E+08
19	0.1113023E+10
20	-0.2226046E+11

n	I_n
20	0.4759547E-01
19	0.4762023E-01
18	0.5012525E-01
17	0.5277082E-01
16	0.5571936E-01
15	0.5901754E-01
14	0.6273217E-01
13	0.6694771E-01
12	0.7177325E-01
11	0.7735223E-01
10	0.8387707E-01
9	0.9161229E-01
8	0.1009320
7	0.1123835
6	0.1268024
5	0.1455330
4	0.1708934
3	0.2072766
2	0.2642411
1	0.3678795
0	0.6321205

Решение квадратного уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$b^2 - 4c > 0$$

$$Способ\ 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$b = -5, \quad c = 6 \qquad b = -10^5, \quad c = 1 \qquad b = -10^9, \quad c = 1$$

Решение квадратного уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$b^2 - 4c > 0$$

Способ 2

$$Если \quad b < 0, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad иначе \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

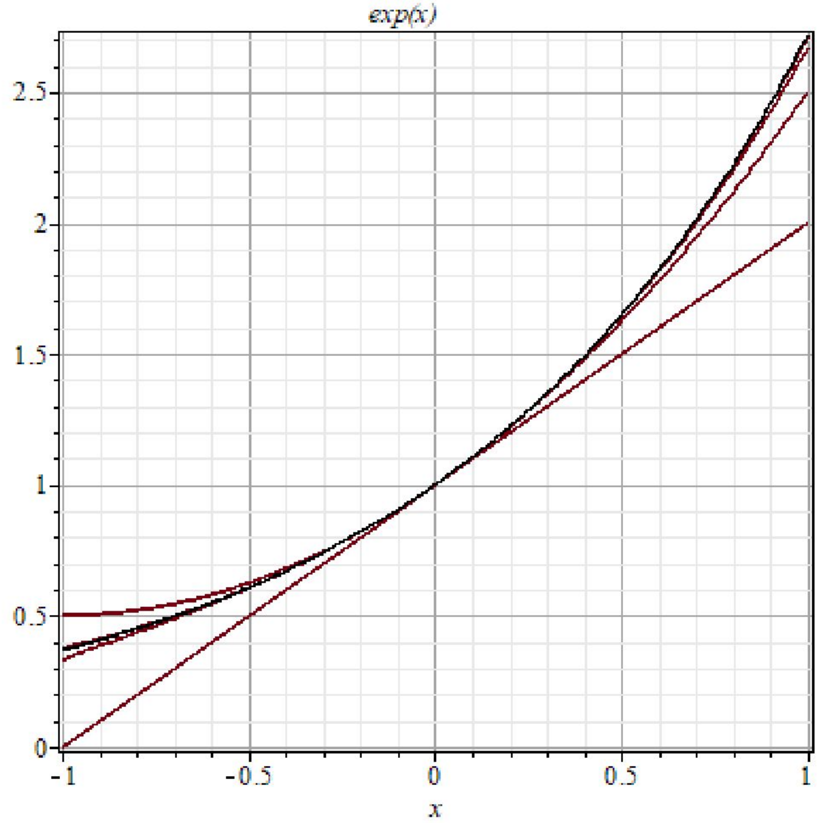
$$x_2 = \frac{c}{x_1}$$

$b = -5, \quad c = 6$ $\qquad$ $b = -10^5, \quad c = 1$ $\qquad$ $b = -10^9, \quad c = 1$

Вычисление exp(x)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



Вычисление exp(x)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$a_k = \frac{x^k}{k!}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$a_0 = 1 \qquad S_0 = a_0$$

$$n = 1,2,\ldots,n_{\max} \qquad a_n = a_{n-1}\frac{x}{n},$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

или $\dfrac{|a_n|}{|S_n|} < \varepsilon_o$ *или* $|a_n| < \varepsilon_o |S_n| + \varepsilon_a$

Вычисление exp(x)

Вычислить e^x *для*

$x = 0.1$

$x = 5$

$x = -5$

$\varepsilon_o = \varepsilon_a = 10^{-4}$ *и сравнить со значением выдаваемым функцией* $\exp(x)$

Вывести на печать номер очередного члена n, промежуточные значения a_n *и* S_n

$$x = \left(1 + \frac{f}{m}\right)m$$

$$x = m + f$$

$$m = [x] \qquad f = \{x\}$$

$$e^x = e^{\left(1 + \frac{f}{m}\right)m} \qquad e^{\left(1 + \frac{f}{m}\right)m} = \left(e^{\left(1 + \frac{f}{m}\right)}\right)^m$$