


# Системы счисления



# Число



способ записи



значение

**Система счисления** – принятый способ записи чисел и сопоставления этим записям реальных значений

Алфавит  $X$  из  $p$  символов и правила записи и обработки чисел с помощью символов этого алфавита называются **системой счисления с основанием  $p$** . Число  $x$  в системе с основанием  $p$  обозначается как  $(x)_p$  или  $x_p$ .

## Система счисления.

- Любая система счисления – это система кодирования числовых величин, позволяющая выполнять операции кодирования и декодирования, то есть по любой числовой величине однозначно находить его кодовое представление и по любой кодовой записи – восстанавливать соответствующую ей числовую величину.
- Наиболее используемые в информатике системы счисления:
  - двоичная, над алфавитом  $X = \{0, 1\}$ ;
  - восьмеричная, над  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ;
  - шестнадцатеричная, над  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ , где символы A, B, C, D, E, F имеют десятичные веса 10, 11, 12, 13, 14, 15.

## Позиционные и непозиционные системы счисления

- Система счисления, в которой количественное значение каждой цифры (вес цифры или символа алфавита) зависит от ее места (позиции) в записи числа или слова, называется *позиционной*; в противном случае система называется *непозиционной*.

Самая простая *непозиционная* система с одним символом – палочкой (количество палочек равно изображаемому числу).

Другой пример – древняя римская система записи чисел с алфавитом вида

|   |   |    |    |     |     |      |
|---|---|----|----|-----|-----|------|
| I | V | X  | L  | C   | D   | M    |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

Примеры римских чисел: III (3), IV (4), V (5), VI (6), IX (9).

Запись числа в этой системе получается двусторонней конкатенацией, причем правая конкатенация ассоциируется с добавлением, а левая конкатенация – с убавлением (например, IV и VI).

# Позиционная система счисления

**Основание** позиционной системы счисления – это количество различных цифр, используемых для изображения числа (в данной системе счисления).

**Позиция** – это место каждой цифры в числе.

**Вещественное неотрицательное число** в позиционной системе счисления с основанием  $p$  можно представить в виде многочлена:

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-s} = a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_1 * p^1 + a_0 * p^0 + a_{-1} * p^{-1} + a_{-2} * p^{-2} + \dots + a_{-s} * p^{-s}$$

**нижние индексы** - определяют месторасположение цифры в числе

**$n$  и  $s$**  - количества разрядов для записи целой и дробной частей числа соответственно.

# Примеры

Десятичная система

$$23,43_{10} = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$692_{10} = 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2$$

Двоичная система

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Восьмиричная система

$$341,5_8 = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^{-1}$$

Шестнадцатеричная система

$$A1F,4_{16} = A \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1}$$

# Позиционная система счисления

$$N_{\max} = P^n - 1$$

максимальное целое число, которое может быть представлено в  $n$  разрядах.

$$N_{\min} = P^{-s}$$

минимальное значащее число (не равное 0), которое можно записать в  $s$  разрядах дробной части.

Всего можно записать

$$N = P^{n+s}$$

чисел

---

$$(P^n - 1) + (1 - P^{-s}) = P^n - P^{-s} \text{ - максимальное вещественное число}$$

Двоичная система счисления для представления целых неотрицательных чисел

**Двоичная система счисления** - позиционная система счисления с основанием 2, цифры 0 и 1.

Преимущества:

1. Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
  2. Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и скорость работы.
  3. Простота создания таблиц сложения и умножения.
-



# Двоичная система счисления

Восемь бит дают  $2^8=256$  различных комбинаций включенных и выключенных состояний:

"выключено" (00000000)



"включено" (11111111).

|                 |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номера битов:   | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Значения битов: | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Целое неотрицательное число в  
двоичной системе счисления

$$A_i = A_n * 2^n + A_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + A_1 * 2^1 + A_0 * 2^0$$

$$A_i = 0 \text{ или } 1$$

## Арифметические операции в двоичной системе счисления выполняются поразрядно

- *Сложение* в двоичной системе счисления осуществляется по правилам.

$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 2_{10} = 10_2$  (перенос единицы в старший разряд).

- *Вычитание* в двоичной системе счисления имеет вид

$0 - 0 = 0, 1 - 0 = 1, 1 - 1 = 0, 0 - 1 = 10 - 1 = 1$  (единицу забираем у старшего разряда).

- *Умножение* в двоичной системе счисления имеет вид

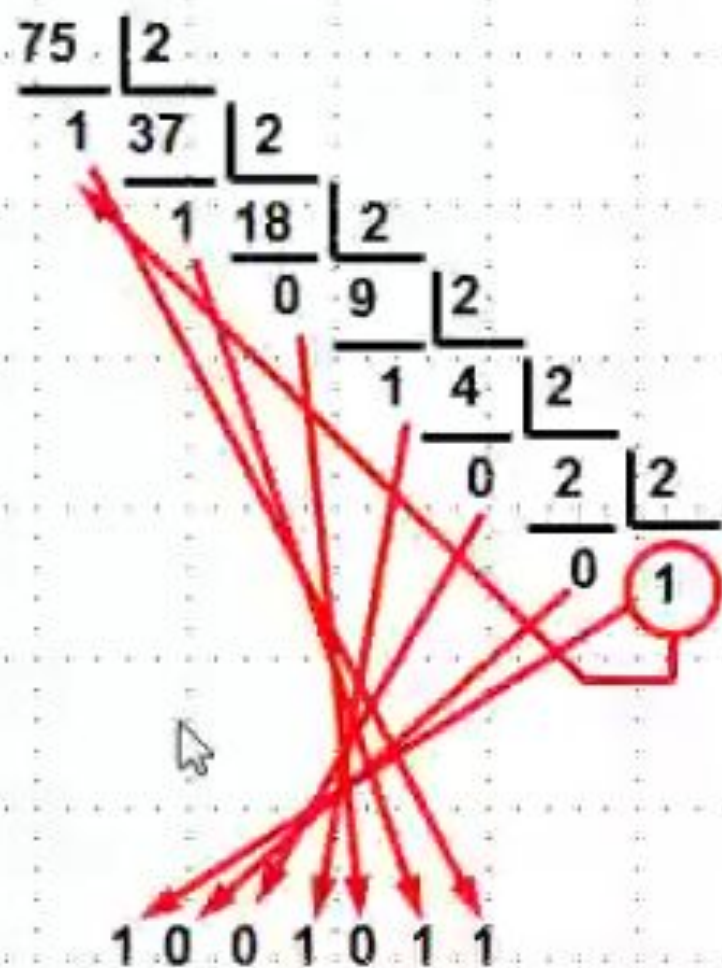
$0 * 0 = 0, 0 * 1 = 0, 1 * 0 = 0, 1 * 1 = 1.$

- *Деление* в двоичной системе счисления имеет вид

$0 : 0 = \text{не определено}, 1 : 0 = \text{не определено},$

$0 : 1 = 0, 1 : 1 = 1.$

# Преобразование десятичных чисел в двоичные



$$75_{10} = 1\,001\,011_2$$

# Преобразование чисел из двоичной системы


Преобразование двоичных чисел в десятичные

$$11001_2 = ?_{10}$$


|          |          |         |         |         |         |
|----------|----------|---------|---------|---------|---------|
| 5        | 4        | 3       | 2       | 1       | 0       |
| $2^5=32$ | $2^4=16$ | $2^3=8$ | $2^2=4$ | $2^1=2$ | $2^0=1$ |
| 1        | 1        | 0       | 0       | 1       | 1       |
| 32       | +16      |         |         | +2      | +1      |

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 51$$





# Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

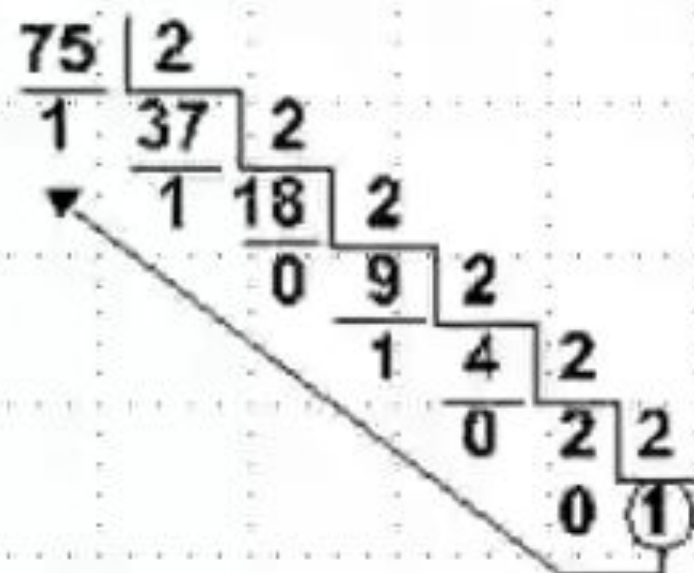


## Правило 1

Перевод числа  $x$  из системы счисления с основанием  $P$  в систему счисления с основанием  $Q$  заключается в последовательном нахождении остатков от деления числа  $x$  на основание  $Q$ , при этом процесс продолжается до тех пор, пока частное от деления не будет меньше основания  $Q$ . Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием  $P$ , т.е. основание  $Q$  должно также быть выражено в системе счисления с основанием  $P$ .

Остатки от деления должны быть выражены цифрами системы счисления с основанием  $Q$ . Представление искомого числа в системе счисления с основанием  $Q$  получается выписыванием последнего частного и остатков от деления в обратном порядке.

Пример: Перевести число 75 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.



Ответ:  $75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8 = 4B_{16}$ .



## Правило 2

Перевод числа  $x$  из системы счисления с основанием  $P$  в систему счисления с основанием  $Q$  осуществляется путем представления числа  $x$  по степеням основания  $P$ . Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием  $Q$ , т. е. основание  $P$  и цифры исходного числа должны также быть выражены в системе счисления с основанием  $Q$ .

На практике такой порядок перевода чисел используется при переводе в десятичную систему счисления.

$$23E_{16} = ?_{10} = 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 574_{10}$$

$$1076_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 574_{10}$$

## Перевод дробных чисел

- перевести отдельно целую часть числа  $x$
- перевести отдельно дробную часть числа  $x$
- итоговый результат будет иметь вид  $(x)_p = [x]_p, \{x\}_p$ 
  - при переводе дробной части ограничиваются нахождением нескольких значащих цифр после запятой, если перевод точно сделать невозможно

Как правило, это происходит через промежуточный перевод в десятичную систему:

$$O, Y_p \rightarrow O, Y_{10}; \quad O, Y_{10} \rightarrow O, Y_q$$

## Шаг 1

$$O, Y_p \rightarrow O, Y_{10}$$

Пусть основание системы счисления  $p$ , дробь содержит  $s$  цифр и  $\underline{b}_k$  – цифры дроби ( $1 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq \underline{b}_k \leq p-1$ ), то она может быть представлена в виде суммы:

$$O, \underline{Y}_p = \sum \underline{b}_k p^{-k}$$

$$0,011_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,375_{10}$$

## Шаг 2

$$O, Y_{10} \rightarrow O, Y_q$$

1. Умножить исходную дробь в десятичной системе счисления на  $q$ ; выделить целую часть – она будет первой цифрой новой дроби;
2. Для оставшейся дробной части операцию умножения с выделением целой и дробной частей повторять, пока в дробной части не останется 0, или не будет достигнута желаемая точность. Появляющиеся при этом целые будут цифрами новой дроби;
3. Записать дробь в виде последовательности цифр после нуля с разделителем (запятой) в порядке их появления в п.1 и 2.

Пример: найти:  $12,8_{10} = ?_2$

- Переводим целую часть:

$$\begin{array}{r} 12 \quad | \quad 2 \\ \hline 0 \quad 6 \quad | \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad | \quad 2 \\ \hline 1 \quad 1 \end{array}$$

$$12_{10} = 1100_2;$$

- переводим дробную часть:

$$0,8 \times 2 = 1,6;$$

$$0,6 \times 2 = 1,2;$$

$$0,2 \times 2 = 0,4;$$

$$0,4 \times 2 = 0,8;$$

$$0,8_{10} = 0,1100110..._2;$$

- результат перевода:  $12,8_{10} = 1100,1100110011..._2$ .

Для перевода из 2-ной в 8-ную и наоборот, из 2-ной в 16-ную и наоборот, из 8-ной в 16-ную и обратно, используется таблица.

При переводе в 8-ную систему или из нее необходимо группировать цифры в тройки битов (триады), а при переводе в 16-ную или из нее – группировать их в четверки битов (тетрады). Можно добавлять, если нужно, незначащие нули (слева от целой части и справа от мантиссы) или отбрасывать их.

## ОСНОВАНИЕ СИСТЕМЫ

|    | 10 | 2   | 8    | 16 |
|----|----|-----|------|----|
| 0  | 0  | 000 | 0000 |    |
| 1  | 1  | 001 | 0001 |    |
| 2  | —  | 010 | 0010 |    |
| 3  | —  | 011 | 0011 |    |
| 4  | —  | 100 | 0100 |    |
| 5  | —  | 101 | 0101 |    |
| 6  | —  | 110 | 0110 |    |
| 7  | —  | 111 | 0111 |    |
| 8  | —  | —   | 1000 |    |
| 9  | —  | —   | 1001 |    |
| 10 | —  | —   | 1010 |    |
| 11 | —  | —   | 1011 |    |
| 12 | —  | —   | 1100 |    |
| 13 | —  | —   | 1101 |    |
| 14 | —  | —   | 1110 |    |
| 15 | —  | —   | 1111 |    |

## Переводы в смешанных системах

- Из 2-ной системы в 8-ную (двоично-восьмеричное изображение):

$$101,10111_2 = \underbrace{101}_{5_8}, \underbrace{101}_{5_8} \underbrace{110_2}_{6_8} = 5,56_8;$$

- из 8-ной системы в 2-ную (восьмерично-двоичное изображение):

$$6,24_8 = \underbrace{6}_{110_2}, \underbrace{2}_{010_2} \underbrace{4_8}_{100_2} = 110,0101_2;$$

## Переводы в смешанных системах

- из 2-ной системы в 16-ную (двоично-шестнадцатеричное изображение):

$$101,10111_2 = \underbrace{0101}_{5_{16}}, \underbrace{1011}_{11(B)_{16}} \underbrace{1000_2}_{8_{16}} = 5,BS_{16}$$

- из 16-ной системы в 2-ную (шестнадцатерично-двоичное изображение):

$$1A, F3_{16} = \underbrace{1}_{0001_2} \underbrace{A}_{1010_2} \underbrace{F}_{1111_2} \underbrace{3}_{0011_2} = 11010,11110011_2$$