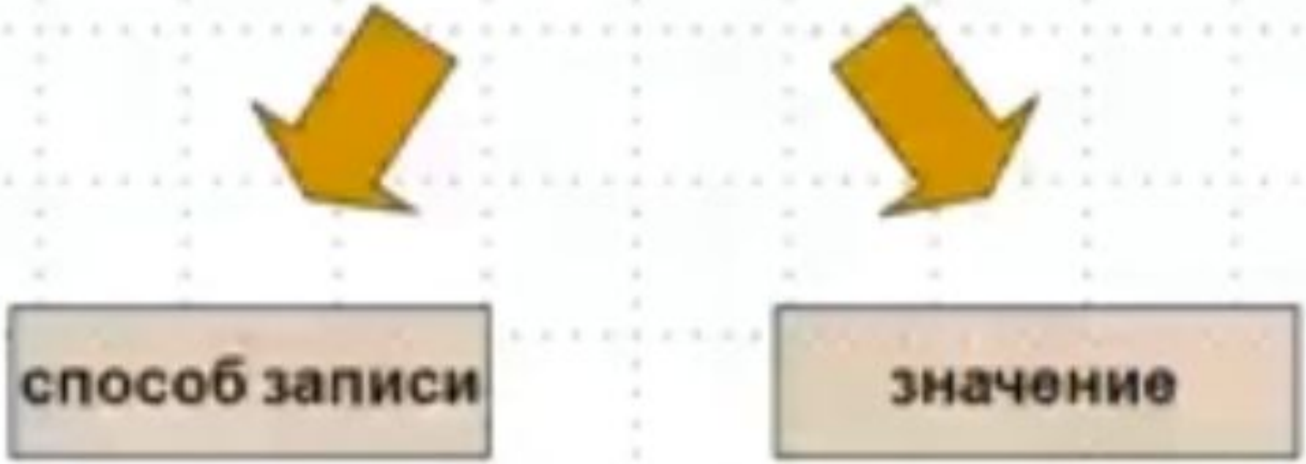
Системы счисления

Число



Система счисления – принятый способ записи чисел и сопоставления этим записям реальных значений

Алфавит *X* из *p* символов и правила записи и обработки чисел с помощью символов этого алфавита называются *системой счисления с основанием p*. Число *x* в системе с основанием *p* обозначается как $(x)_p$ или x_p.

Система счисления

- Любая система счисления – это система кодирования числовых величин, позволяющая выполнять операции кодирования и декодирования, то есть по любой числовой величине однозначно находить его кодовое представление и по любой кодовой записи – восстанавливать соответствующую ей числовую величину.
- Наиболее используемые в информатике системы счисления:
  - двоичная, над алфавитом X = {0,1};
  - восьмеричная, над X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7};
  - шестнадцатеричная, над X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}, где символы A, B, C, D, E, F имеют десятичные веса 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Позиционные и непозиционные системы счисления

- Система счисления, в которой количественное значение каждой цифры (вес цифры или символа алфавита) зависит от ее места (позиции) в записи числа или слова, называется *позиционной*; в противном случае система называется *непозиционной*.

Самая простая *непозиционная* система с одним символом – палочкой (количество палочек равно изображаемому числу).

Другой пример – древняя римская система записи чисел с алфавитом вида

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Примеры римских чисел: III (3), IV (4), V (5), VI (6), IX (9).

Запись числа в этой системе получается двусторонней конкатенацией, причем правая конкатенация ассоциируется с добавлением, а левая конкатенация – с убавлением (например, IV и VI).

Позиционная система счисления

Основание позиционной системы счисления – это количество различных цифр, используемых для изображения числа (в данной системе счисления).

Позиция – это место каждой цифры в числе.

Вещественное неотрицательное число в позиционной системе счисления с основанием *p* можно представить в виде многочлена:

$$a_{n-1}a_{n-2}\ \dots\ a_1a_0,\ a_{-1}\dots a_{-s} = a_{n-1}*p^{n-1} + \dots + a_1*p^1 + a_0*p^0 + a_{-1}*p^{-1} + a_{-2}*p^{-2} + \dots a_{-s}*p^{-s}$$

нижние индексы - определяют месторасположение цифры в числе

n и **S** - количества разрядов для записи целой и дробной частей числа соответственно.

Примеры

Десятичная система

$$23{,}43_{10} = 2*10^1 + 3*10^0 + 4*10^{-1} + 3*10^{-2}$$

$$692_{10} = 6*10^2 + 9*10^1 + 2$$

Двоичная система

$$1101_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$$

Восьмиричная система

$$341{,}5_8 = 3*8^2 + 4*8^1 + 1*8^0 + 5*8^{-1}$$

Шестнадцатеричная система

$$A1F{,}4_{16} = A*16^2 + 1*16^1 + F*16^0 + 4*16^{-1}$$

Позиционная система счисления

$$N_{\max} = P^n - 1$$

максимальное целое число, которое может быть представлено в *n* разрядах

$$N_{\min} = P^{-s}$$

минимальное значащее число (не равное 0), которое можно записать в *s* разрядах дробной части

Всего можно записать $N = P^{n+s}$ чисел

(P^n – 1) + (1 – P^(-s)) = P^n – P^(-s) максимальное вещественное число

Двоичная система счисления для представления целых неотрицательных чисел

Двоичная система счисления - позиционная система счисления с основанием 2, цифры 0 и 1.

Преимущества:

1. Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
2. Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и скорость работы.
3. Простота создания таблиц сложения и умножения.

Двоичная система счисления

Восемь бит дают $2^8=256$ различных комбинаций включенных и выключенных состояний:

"выключено" (**00000000**) "включено" (**11111111**).

Номера битов:	7	6	5	4	3	2	1	0
Значения битов:	0	1	0	0	0	0	0	1

Целое неотрицательное число в двоичной системе счисления

$$A = A_n*2^n + A_{n-1}*2^{n-1} + \dots + A_1*2^1 + A_0*2^0$$

A_i = 0 или 1

Арифметические операции в двоичной системе счисления выполняются поразрядно

- *Сложение* в двоичной системе счисления осуществляется по правилам

$0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2_{10} = 10_2$ (перенос единицы в старший разряд).

- *Вычитание* в двоичной системе счисления имеет вид

$0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $0 - 1 = 10 - 1 = 1$ (единицу забираем у старшего разряда).

- Умножение в двоичной системе счисления имеет вид

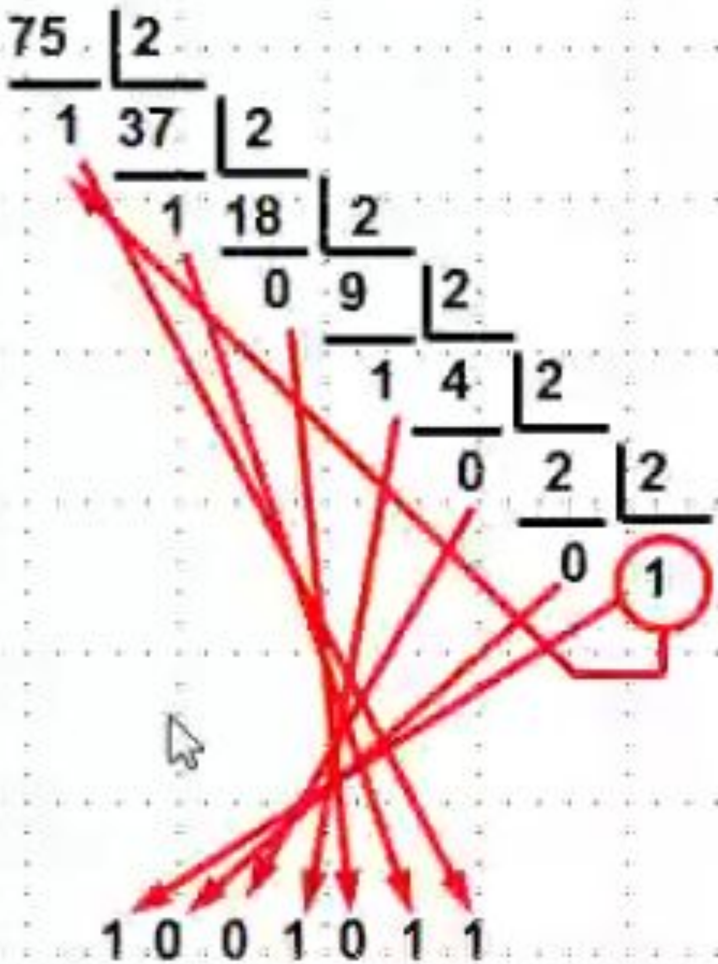
$0 * 0 = 0$, $0 * 1 = 0$, $1 * 0 = 0$, $1 * 1 = 1$.

- Деление в двоичной системе счисления имеет вид

  $0 : 0$ = не определено, $1 : 0$ = не определено,

  $0 : 1 = 0$, $1 : 1 = 1$.

Преобразование десятичных чисел в двоичные



$75_{10} = 1\,001\,011_2$

Преобразование чисел из двоичной системы

Преобразование двоичных чисел в десятичные

$110011_2 = ?_{10}$

5	4	3	2	1	0
$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
1	1	0	0	1	1
32	+16			+2	+1

$$1*2^5+1*2^4+0*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0=51$$

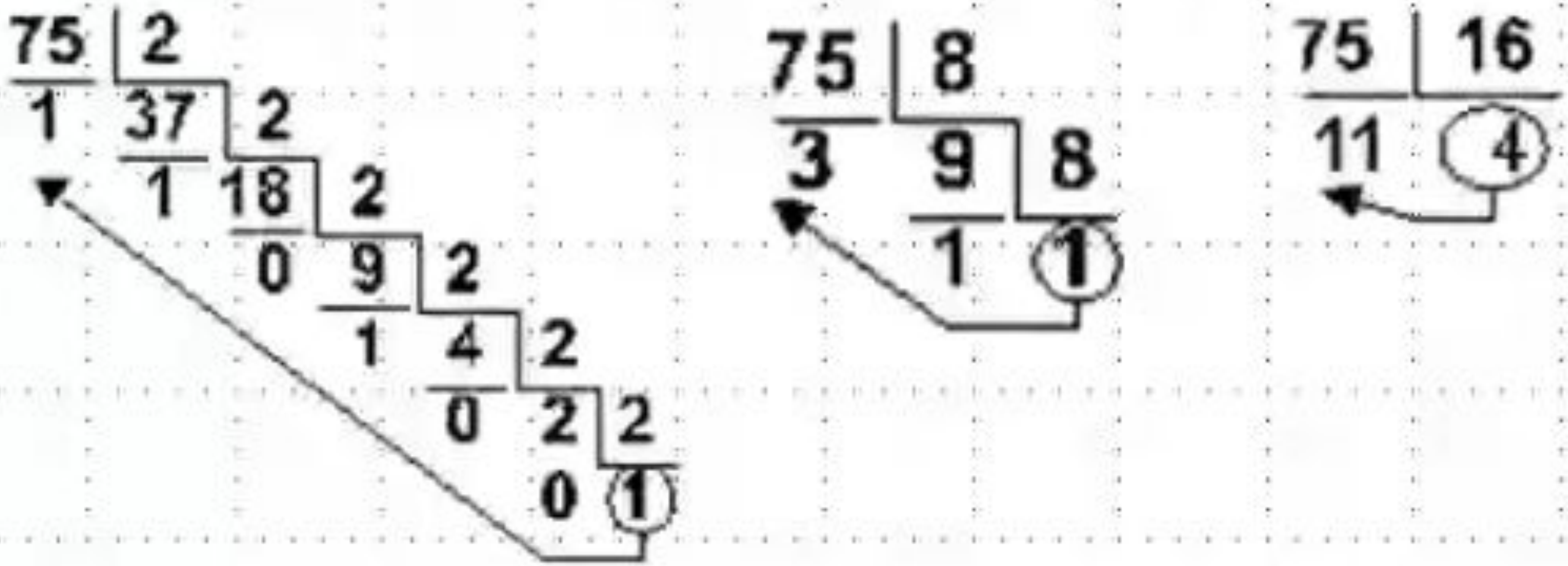
Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Правило 1

Перевод числа x из системы счисления с основанием P в систему счисления с основанием Q заключается в последовательном нахождении остатков от деления числа x на основание Q, при этом процесс продолжается до тех пор, пока частное от деления не будет меньше основания Q. Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием P, т.е. основание Q должно также быть выражено в системе счисления с основанием P.

Остатки от деления должны быть выражены цифрами системы счисления с основанием Q. Представление искомого числа в системе счисления с основанием Q получается выписыванием последнего частного и остатков от деления в обратном порядке.

Пример: Перевести число 75 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную



Ответ: $75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8 = 4B_{16}$.

Правило 2

Перевод числа *x* из системы счисления с основанием *P* в систему счисления с основанием *Q* осуществляется путем представления числа *x* по степеням основания *P*. Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием *Q*, т. е. основание *P* и цифры исходного числа должны также быть выражены в системе счисления с основанием *Q*.

На практике такой порядок перевода чисел используется при переводе в десятичную систему счисления.

$$23E_{16} = ?_{10} = 2*16^2+3*16^1+E*16^0 = 574_{10}$$

$$1076_8 = 1*8^3+0*8^2+7*8^1+6*8^0 = 574_{10}$$

Перевод дробных чисел

- перевести отдельно целую часть числа x
- перевести отдельно дробную часть числа x
- итоговый результат будет иметь вид $(x)_p = [x]_p, \{x\}_p$
  - при переводе дробной части ограничиваются нахождением нескольких значащих цифр после запятой, если перевод точно сделать невозможно

Как правило, это происходит через промежуточный перевод в десятичную систему:

$$\boxed{O,Y_p \to O,Y_{10};\ \ O,Y_{10} \to O,Y_q}$$

Шаг 1

$$O,Y_p \to O,Y_{10}$$

Пусть основание системы счисления ***p***, дробь содержит ***s*** цифр и b_k – цифры дроби ($1 \le k \le n$, $0 \le b_k \le p^{-1}$), то она может быть представлена в виде суммы:

$$O,Y_p = \sum b_k\, p^{-k}$$

$$0{,}011_2 = 0*2^{-1}+1*2^{-2}+1*2^{-3}=0{,}375_{10}$$

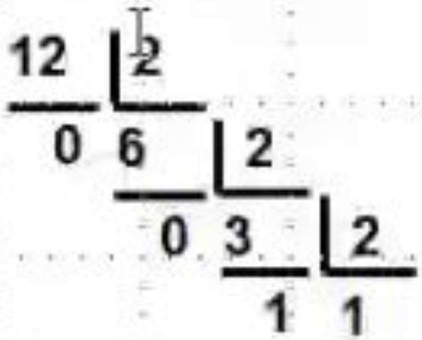
Шаг 2

$$\boxed{O,Y_{10} \to O,Y_q}$$

1. Умножить исходную дробь в десятичной системе счисления на q, выделить целую часть – она будет первой цифрой новой дроби;
2. Для оставшейся дробной части операцию умножения с выделением целой и дробной частей повторять, пока в дробной части не останется 0, или не будет достигнута желаемая точность. Появляющиеся при этом целые будут цифрами новой дроби;
3. Записать дробь в виде последовательности цифр после нуля с разделителем (запятой) в порядке их появления в п.1 и 2.

Пример: найти: $12{,}8_{10} = ?_2$

- Переводим целую часть:



$12_{10} = 1100_2$;

- переводим дробную часть:

$0{,}8 \text{ x } 2 = \mathbf{1}{,}6$;

$0{,}6 \text{ x } 2 = \mathbf{1}{,}2$;

$0{,}2 \text{ x } 2 = \mathbf{0}{,}4$;

$0{,}4 \text{ x } 2 = \mathbf{0}{,}8$;

$0{,}8_{10} = 0{,}1100110\ldots_2$;

- результат *перевода*: $12{,}8_{10} = 1100{,}1100110011\ldots_2$.

Для *перевода* из 2-ной в 8-ную и наоборот, из 2-ной в 16-ную и наоборот, из 8-ной в 16-ную и обратно, используется таблица.

При *переводе* в 8-ную *систему* или из нее необходимо группировать цифры в тройки битов (триады), а при *переводе* в 16-ную или из нее – группировать их в четверки битов (тетрады). Можно добавлять, если нужно, незначащие нули (слева от целой части и справа от мантиссы) или отбрасывать их.

ОСНОВАНИЕ СИСТЕМЫ			
10	2	8	16
0	0	000	0000
1	1	001	0001
2	—	010	0010
3	—	011	0011
4	—	100	0100
5	—	101	0101
6	—	110	0110
7	—	111	0111
8	—	—	1000
9	—	—	1001
10	—	—	1010
11	—	—	1011
12	—	—	1100
13	—	—	1101
14	—	—	1110
15	—	—	1111

Переводы в смешанных системах

- Из 2-ной *системы* в 8-ную (двоично-восьмеричное изображение):

$$101{,}10111_2 = \underbrace{101}_{5_8}{,}\ \underbrace{101}_{5_8}\ \underbrace{110_2}_{6_8} = 5{,}56_8;$$

- из 8-ной *системы* в 2–ную (восьмерично-двоичное изображение):

$$6{,}24_8 = \underbrace{6}_{110_2}{,}\ \underbrace{2}_{010_2}\ \underbrace{4_8}_{100_2} = 110{,}0101_2;$$

Переводы в смешанных системах

- из 2-ной *системы* в 16-ную (двоично-шестнадцатеричное изображение):

$$101,10111_2 = \underbrace{0101}_{5_{16}},\underbrace{1011}_{11(B)_{16}}\ \underbrace{1000_2}_{8_{16}} = 5,B8_{16};$$

- из 16-ной *системы* в 2-ную (шестнадцатеричное-двоичное изображение):

$$1A,F3_{16} = \underbrace{1}_{0001_2}\ \underbrace{A}_{1010_2},\ \underbrace{F}_{1111_2}\ \underbrace{3_{16}}_{0011_2} = 11010,11110011_2$$